КУРС МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

М. К. Лебенча и С. И. Новоселов

КУРС МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

ЧАСТЬ 2

Высшая школа
1961

М. К. ГРЕБЕНЧА и С. И. НОВОСЕЛОВ

КУРС МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

ЧАСТЬ 2

ИЗДАНИЕ ТРЕТЬЕ

Допущено
Министерством высшего и среднего
специального образования СССР
в качестве учебного пособия
для физико-математических факультетов
университетов и педагогических институтов

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
«ВЫСШАЯ ШКОЛА»
Москва—1961

Михаил Кузьмич Гребенча,
Сергей Иосифович Новоселов

КУРС МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА
Часть 2

Редактор *Д. А. Тальский*
Техн. редактор *С. С. Горохова*
Корректоры: *Н. С. Ткаченко*
и *Я. А. Шалина*

Сдано в набор 10/X 1960 г.
Подписано к печати 8/III 1961 г.
Бумага $60\times92^1/_{16}=35$ печ. л.=36,89 уч.-изд. л.
Тираж 22.000. Цена 1 р. 20 к. Зак. 1850.
Т-02629

Государственное издательство
«Высшая школа»
Москва, Б-62, Подсосенский п., 20

Типография № 2 им. Евг. Соколовой
УПП Ленсовнархоза
Ленинград, Измайловский пр., 29.

ОГЛАВЛЕНИЕ.

Стр.

Предисловие 7

Глава I

Точечные множества в евклидовом пространстве

§ 1. Введение. 9
§ 2. Евклидовы плоскость и пространство. 9
§ 3. Евклидово пространство n измерений. 11
§ 4. Простейшие точечные множества в пространстве E_n. 14
§ 5. Ограниченные и неограниченные множества. 16
§ 6. Окрестности, предельные точки. 18
§ 7. Открытые и замкнутые множества, области. 21
§ 8. Принцип стягивающихся кубов. 31
§ 9. Принцип предельных точек. 33

Глава II

Функции нескольких аргументов

§ 10. Функции точки. 35
§ 11. График функции двух аргументов. 42
§ 12. Предел функции в точке. 48
§ 13. Непрерывные функции. 53
§ 14. Функции, непрерывные в замкнутой области. 58
§ 15. Понятие поверхности. 63
§ 16. Предельная функция. 69
§ 17. Повторные пределы. 76
§ 18. Равномерная сходимость. 80
§ 19. Геометрическая интерпретация равномерной сходимости. 87
§ 20. Критерий Коши. 95
§ 21. Предельный переход под знаком интеграла. 96
§ 22. Переход к пределу под знаком производной. 100

Глава III

Дифференциальное исчисление функций нескольких аргументов

§ 23. Частные производные. 104
§ 24. Теорема Лагранжа. 107
§ 25. Дифференцируемые функции. 110
§ 26. Касательная плоскость к поверхности. 116
§ 27. Дифференцирование сложных функций. 119
§ 28. Производная функции по направлению. 123
§ 29. Теорема Эйлера об однородных функциях 125
§ 30. Частные производные высших порядков. 127
§ 31. Производные высших порядков от сложных функций. 132
§ 32. Формула Тейлора. 134
§ 33. Экстремумы функций нескольких аргументов. 139

Глава IV

Неявные функции, отображения

Стр.

§ 34. Регулярные отображения 154
§ 35. Неявные функции 162
§ 36. Дифференцируемость неявных функций 171
§ 37. Об исследовании неявных функций 182
§ 38. Основные свойства регулярных отображений 184
§ 39. Зависимость между функциями 191
§ 40. Геометрические приложения 198
§ 41. Криволинейные координаты 203
§ 42. Понятие о многомерной поверхности 212
§ 43. Условный экстремум 213

Глава V

Числовые ряды

§ 44. Понятие ряда, сходящиеся и расходящиеся ряды 228
§ 45. Критерий Коши 234
§ 46. Основные теоремы о рядах 236
§ 47. Знакопостоянные ряды 238
§ 48. Признаки сходимости и расходимости знакопостоянных рядов . . . 243
§ 49. Абсолютно и условно сходящиеся ряды 251
§ 50. Об оценке погрешностей при вычислениях с рядами 257
§ 51. Теоремы о перестановке членов ряда 260
§ 52. Действия над рядами 264
§ 53. Теорема о группировке членов абсолютно сходящегося ряда. Двойные ряды 267

Глава VI

Функциональные ряды

§ 54. Понятие функционального ряда 272
§ 55. Равномерно сходящиеся ряды и их свойства 274
§ 56. Почленное дифференцирование и интегрирование функциональных рядов 281
§ 57. Степенные ряды 284
§ 58. Равномерная сходимость степенного ряда 289
§ 59. Арифметические действия над степенными рядами 291
§ 60. Почленное дифференцирование и интегрирование степенных рядов . 292
§ 61. Ряд Тейлора 296
§ 62. Теорема единственности. Техника разложения функций в степенные ряды 301
§ 63. Понятие аналитической функции 308
§ 64. Понятие об аналитических функциях комплексного аргумента . . . 310
§ 65. Аналитическое определение показательной и тригонометрических функций 312
§ 66. Представление функций при помощи рядов. Приближенное вычисление значений функции 318

Глава VII

Ортогональные системы. Ряды Фурье

§ 67. Ортогональные системы функций 324
§ 68. Ряд Фурье 328
§ 69. Сходимость в среднем, замкнутые ортонормальные системы 331

Стр.
§ 70. Тригонометрическая система. 335
§ 71. Интегральное представление частной суммы ряда Фурье. 339
§ 72. Сходимость ряда Фурье. 341
§ 73. Разложение функций в тригонометрические ряды. 344
§ 74. Равномерная сходимость ряда Фурье. 353
§ 75. Замкнутость тригонометрической системы. 355
§ 76. Понятие о приложениях рядов Фурье. 361

Глава VIII

Численные и графические методы анализа

§ 77. Точечное интерполирование. Формула Лагранжа. 366
§ 78. Разности различных порядков и факториальные полиномы. . . . 370
§ 79. Интерполяционная формула Ньютона. 374
§ 80. Остаточный член интерполяции. 377
§ 81. Графические методы. 381

Глава IX

Кратные интегралы

§ 82. Квадрируемые фигуры. 388
§ 83. Свойства квадрируемых фигур. 393
§ 84. Правильные разбиения. 396
§ 85. Понятие кубируемой фигуры. 399
§ 86. Простейшие квадрируемые фигуры. 399
§ 87. Интегральные суммы. 401
§ 88. Кратные интегралы. 403
§ 89. Геометрическая интерпретация двойного интеграла. 405
§ 90. Теоремы об интегрируемых функциях. 408
§ 91. Повторные интегралы, распространенные на прямоугольник. . . . 411
§ 92. Вычисление кратных интегралов посредством повторных. 419
§ 93. Интегрирование подстановкой. 430
§ 94. Формулы преобразования интегралов к полярным, цилиндрическим и сферическим координатам. Примеры. 442
§ 95. Площадь кривой поверхности. 452
§ 96. Основные свойства площади поверхности. 459
§ 97. Приложения кратных интегралов к механике. 462

Глава X

Криволинейные интегралы. Интегралы по поверхности

§ 98. Ориентированные линии. 466
§ 99. Криволинейные интегралы. 468
§ 100. Аппроксимация интегралами по ломаным. 475
§ 101. Формула Грина. 477
§ 102. Условия независимости криволинейного интеграла от формы пути интеграции. 484
§ 103. Условия интегрируемости. Отыскание функции по ее дифференциалу. 489
§ 104. Механическая интерпретация криволинейного интеграла. 496
§ 105. Двойные интегралы по ориентированным областям. 497
§ 106. Ориентированные поверхности. 500
§ 107. Интегралы по поверхности. 503
§ 108. Формула Остроградского. 507
§ 109. Формула Стокса. 509
§ 110. Понятие о приложениях интегралов по поверхности. 511

Глава XI

Стр.

Интегралы, содержащие параметр. Несобственные интегралы

§ 111. Определенный интеграл как функция параметра. 513
§ 112. Основные теоремы о несобственных интегралах. 522
§ 113. Несобственные интегралы, содержащие параметр. 533
§ 114. Примеры вычисления несобственных интегралов. 539
§ 115. Понятие о несобственных кратных интегралах. 544

Дополнение

§ 116. Понятие топологического пространства. 550
§ 117. Понятие метрического пространства. 555
Алфавитный указатель 559

ПРЕДИСЛОВИЕ

При составлении второго тома «Курс математического анализа» так же, как и первого, авторы исходили из потребностей будущего учителя математики.

Мы стремились дать по возможности ясное и отчетливое изложение основных принципиально важных вопросов курса, не обременяя его деталями, содержащимися в полных современных курсах анализа. Ряд теорем и доказательств даны в настоящей книге не в самой общей форме, однако авторы всегда старались точно оговорить те условия, при которых проведены соответствующие доказательства. Вместе с тем авторы старались выбирать такие способы доказательств, при которых становятся очевидными возможные обобщения, и в наиболее важных случаях указать пути этих обобщений.

В настоящей книге авторы стремились сохранить тот же характер изложения, который был принят во втором издании первого тома данного курса. Мы исходили из глубокого убеждения в целесообразности строго систематического, по возможности, немногословного изложения, стремились избегать, так называемой, повествовательной формы изложения, которая (по убеждению авторов) совершенно не оправдала себя в книгах, предназначенных для учебных целей.

С. Новоселов

Москва, 25 декабря 1960 г.

ГЛАВА I

ТОЧЕЧНЫЕ МНОЖЕСТВА В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

§ 1. Введение

В ряде вопросов как теоретического, так и практического характера приходится встречаться с величинами, численное значение которых определяется заданием значений нескольких (двух, трех или большего числа) величин. Так, например:

1) величина пути, пройденного равномерно движущимся телом,

$$s = vt$$

определяется заданием скорости v и времени t;

2) кинетическая энергия

$$w = \frac{mv^2}{2}$$

определяется массой и скоростью движущегося тела;

3) объем прямоугольного параллелепипеда

$$v = abc$$

определяется длинами его ребер a, b и c.

Подобного рода примеров из физики, техники, механики и математики можно привести сколько угодно. Общим для всех этих примеров является следующее положение: *системе чисел, характеризующих значения нескольких величин, ставится в соответствие число, характеризующее значение рассматриваемой величины.* Это указывает на необходимость обобщения понятия функции при условии, когда «аргументом», определяющим значение функции, является с и с т е м а чисел.

§ 2. Евклидовы плоскость и пространство

Рассмотрим пару действительных чисел (a,b), заданных в определенном порядке. Как известно, произвольной паре (a,b) можно поставить в соответствие точку координатной плоскости с абсциссой, равной a, и с ординатой, равной b; при этом обратно: всякой точке плоскости соответствует пара чисел — абсцисса и ордината этой точки. Это дает возможность пользоваться геометрической терминологией, именно:

для упорядоченной пары чисел и изображающей ее точки принят общий термин — «точка плоскости».

Всяким двум точкам (т. е. парам чисел) $A_1(a_1, b_1)$ и $A_2(a_2, b_2)$ может быть поставлено в соответствие число

$$\rho(A_1, A_2) = \sqrt{(a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2}, \qquad (\rho)$$

называемое расстоянием между данными точками. Этим числом измеряется длина отрезка с концами в точках плоскости, изображающих данные пары чисел. *Множество всех точек (т. е. числовых пар) (x, y), в котором расстояние между двумя точками определяется по формуле* (ρ), *называется двухмерным евклидовым пространством* (арифметическим). В геометрической интерпретации двухмерному арифметическому пространству соответствует множество всех точек координатной плоскости.

Всякое множество, элементами которого являются пары действительных чисел, можно геометрически изобразить при помощи множества соответственных точек координатной плоскости, и обратно: всякому множеству точек координатной плоскости соответствует множество пар действительных чисел. Принято для соответственных множеств пользоваться одними и теми же, обычно геометрическими терминами. Так, например, для множества пар чисел $X(x, y)$, удовлетворяющих уравнению

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2,$$

и для соответственного геометрического образа употребляется общий термин «окружность». Аналогично, множество пар (x, y), удовлетворяющих неравенству

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 \leqslant r^2,$$

называется кругом. Множество пар, удовлетворяющих неравенствам

$$a \leqslant x \leqslant b, \quad c \leqslant y \leqslant d,$$

называется прямоугольником.

Под r-окрестностью точки $A(a, b)$ подразумевается множество всех точек $X(x, y)$, удовлетворяющих неравенству

$$\rho(X, A) < r \quad \text{или} \quad (x - a)^2 + (y - b)^2 < r^2.$$

Геометрически r-окрестность изображается множеством точек плоскости, лежащих внутри круга радиуса r с центром в точке A. Из геометрических свойств круга следует, что *окрестности на плоскости обладают тремя основными свойствами окрестностей* (том I, § 15). Справедливость основных свойств окрестностей может быть установлена и чисто арифметически, независимо от геометрической интерпретации (см. § 3).

Как известно, тройки действительных чисел (a, b, c) и точки координатного пространства могут быть поставлены во взаимно одно-

значное соответствие, в силу которого системе (a, b, c) действительных чисел, заданных в определенном порядке, ставится во взаимно однозначное соответствие точка пространства с абсциссой, равной a, с ординатой, равной b, и аппликатой, равной c. *Множество всех троек действительных чисел (a, b, c), в котором расстояние между двумя точками $A_1(a_1, b_1, c_1)$ и $A_2(a_2, b_2, c_2)$ определяется по формуле*

$$\rho(A_1, A_2) = \sqrt{(a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2 + (c_2 - c_1)^2},$$

называется трехмерным (арифметическим) евклидовым пространством.

Множества точек евклидова арифметического пространства и соответственные точки геометрического пространства обычно обозначаются одними и теми же терминами. Так, например, множества троек чисел $X(x, y, z)$, удовлетворяющих уравнениям

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2; \quad Ax + By + Cz + D = 0;$$

$$\frac{x - a}{m} = \frac{y - b}{n} = \frac{z - c}{p},$$

называются соответственно сферой, плоскостью, прямой линией.

В арифметическом пространстве *r-окрестность точки $A(a, b, c)$ определяется как множество всех точек $X(x, y, z)$, удовлетворяющих неравенству*

$$\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2} < r.$$

В геометрической интерпретации это есть внутренность шара радиуса r с центром в данной точке.

§ 3. Евклидово пространство n измерений

Определения. 1°. *Система n действительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, заданных в определенном порядке, называется точкой $A(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ n-мерного пространства. Числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ называются координатами точки A.*

2°. *Две точки $A(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $B(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ n-мерного пространства называются равными, $A = B$, тогда и только тогда, когда их соответствующие координаты равны:*

$$a_1 = b_1; \quad a_2 = b_2; \ \ldots; \ a_n = b_n;$$

в противном случае точки считаются различными: $A \neq B$.

3°. Множество всех точек n-мерного пространства называется *евклидовым n-мерным пространством, если в нем определено расстояние между двумя точками следующим образом: расстоянием между точками $A(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $B(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ называется число, равное*

$$\sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + \ldots + (a_n - b_n)^2}.$$

Это число обозначается так:

$$\rho(A, B) = \sqrt{\sum_{n=1}^{n} (a_i - b_i)^2}. \qquad (1)$$

Евклидово n-мерное пространство обозначается символом E_n.

Выше были рассмотрены частные виды евклидова пространства; так, при $n=1$ пространство E_1 есть множество всех действительных чисел, расстояние между двумя точками a и b есть

$$\sqrt{(b-a)^2}=|b-a|.$$

Геометрически пространство E_1 интерпретируется как множество всех точек числовой прямой. Пространство E_1 было рассмотрено в связи с изучением функций одного аргумента (том I, § 2, 3, 15, 16, 17). Пространства E_2 и E_3 и соответствующие геометрические интерпретации были рассмотрены в предыдущем параграфе. При $n>3$ с пространством E_n не связываются непосредственные наглядные представления.

Если все координаты некоторой точки A равны нулю, кроме, быть может, i-й координаты:

$$a_1=a_2=\ldots=a_{i-1}=a_{i+1}=\ldots=a_n=0,$$

то говорят, что точка A лежит на координатной оси OX_i. Множество всех точек, лежащих на оси OX_i, называется осью OX_i. Точка $O(0, 0, \ldots, 0)$, все координаты которой равны нулю, называется *началом координат*. Начало координат принадлежит каждой координатной оси.

Общие положения, относящиеся к пространству E_n любого числа измерений, устанавливаются арифметически. В частности, эти положения применимы к пространствам E_1, E_2 и E_3 и для этих частных случаев могут быть интерпретированы геометрически.

Расстояние $\rho(A, B)$ между двумя точками A и B в пространстве E_n обладает следующими свойствами:

I_ρ. $\rho(A, B)\geqslant 0$. В самом деле, по определению

$$\rho(A, B)=\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2+\ldots+(a_n-b_n)^2}\geqslant 0;$$

при этом $\rho(A, B)=0$ в том и только в том случае, когда точки A и B совпадают. Действительно, если $\rho(A, B)=0$, то

$$(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2+\ldots+(a_n-b_n)^2=0,$$

а это возможно лишь, когда $a_1=b_1$; $a_2=b_2$; $\ldots$; $a_n=b_n$. Обратно, если $A=B$, то $a_i=b_i$ и $\rho(A, B)=0$.

II_ρ. $\rho(A, B)=\rho(B, A)$ (свойство симметрии) следует из определения расстояния.

III_ρ. *Каковы бы ни были точки* A, B *и* C,

$\rho(A, C)\leqslant\rho(A, B)+\rho(B, C)$ (неравенство треугольника).

Доказательство. Пусть

$A(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $B(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ и $C(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ — данные точки:

имеем:

$$\sum (a_i - c_i)^2 = \sum [(a_i - b_i) + (b_i - c_i)]^2 = \sum (a_i - b_i)^2 + \\ + 2 \sum (a_i - b_i)(b_i - c_i) + \sum (b_i - c_i)^2.$$

В силу неравенства Буняковского *

$$\left[\sum (a_i - b_i)(b_i - c_i)\right]^2 \leqslant \sum (a_i - b_i)^2 \cdot \sum (b_i - c_i)^2;$$

значит,

$$\sum (a_i - c_i)^2 \leqslant \sum (a_i - b_i)^2 + 2 \sqrt{\sum (a_i - b_i)^2 \sum (b_i - c_i)^2} + \\ + \sum (b_i - c_i)^2,$$

т. е.

$$\rho^2(A, C) \leqslant \rho^2(A, B) + 2\rho(A, B)\rho(B, C) + \rho^2(B, C),$$

откуда

$$\rho(A, C) \leqslant \rho(A, B) + \rho(B, C).$$

Свойства расстояния имеют следующую геометрическую интерпретацию при $n = 1, 2, 3$.

$\mathbf{I}_\rho$. Расстояние между двумя точками A и B (прямой, плоскости или пространства) неотрицательно; при $A \neq B$ оно равно длине отрезка AB.

$\mathbf{II}_\rho$. Безразлично, вычисляется ли расстояние от точки A до точки B или от точки B до точки A.

---

* Неравенством Буняковского называется неравенство

$$(p_1q_1 + p_2q_2 + \ldots + p_nq_n)^2 \leqslant (p_1^2 + p_2^2 + \ldots + p_n^2)(q_1^2 + q_2^2 + \ldots + q_n^2).$$

Это неравенство справедливо при любых действительных числах

$$p_1, p_2, \ldots, p_n \quad \text{и} \quad q_1, q_2, \ldots, q_n.$$

Доказательство. Рассмотрим квадратный трехчлен

$$f(x) = (p_1 - xq_1)^2 + (p_2 - xq_2)^2 + \ldots + (p_n - xq_n)^2 = \\ = (q_1^2 + q_2^2 + \ldots + q_n^2)x^2 - 2(p_1q_1 + p_2q_2 + \ldots + p_nq_n)x + \\ + (p_1^2 + p_2^2 + \ldots + p_n^2).$$

Так как $f(x) \geqslant 0$, то дискриминант трехчлена есть не положительное число; значит,

$$(p_1q_1 + p_2q_2 + \ldots + p_nq_n)^2 - (p_1^2 + p_2^2 + \ldots + p_n^2)(q_1^2 + q_2^2 + \ldots + q_n^2) \leqslant 0,$$

т. е.

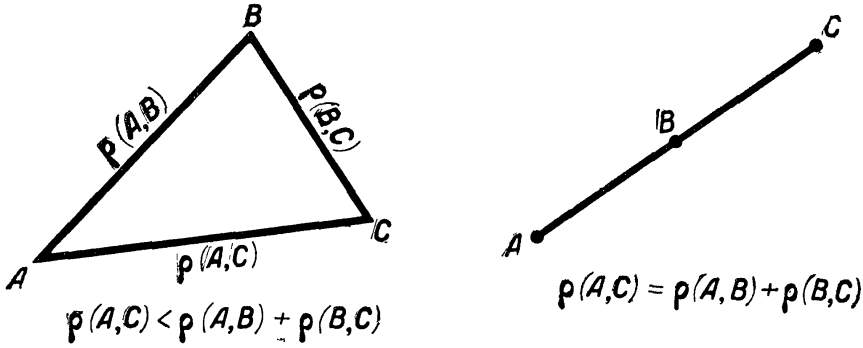
$$\left(\sum p_iq_i\right)^2 \leqslant \sum p_i^2 \cdot \sum q_i^2.$$

Неравенство Буняковского обращается в равенство тогда и только тогда, когда дискриминант равен нулю, т. е. когда трехчлен имеет двукратный корень. Но $f(x)$ обращается в нуль только тогда, когда в отдельности $p_i - xq_i = 0$; значит,

$$\frac{p_1}{q_1} = \frac{p_2}{q_2} = \ldots = \frac{p_n}{q_n}.$$

Итак, неравенство Буняковского переходит в равенство только при пропорциональности чисел p_i и q_i.

IIIρ. Условие $\rho(A, C) \leqslant \rho(A, B) + \rho(B, C)$ выражает свойство треугольника: длина стороны AC не больше суммы $AB + BC$ длин



Черт. 1.

двух других сторон. Равенство возможно лишь в том случае, когда треугольник вырождается в прямолинейный отрезок, причем точка B лежит между A и C (черт. 1).

§ 4. Простейшие точечные множества в пространстве E_n

Сфера, шар, сферическая поверхность.

Определение. *n-мерной сферой радиуса r с центром $A(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ называется множество всех точек $X(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, расстояние которых от точки A меньше r:*

$$\rho(X, A) < r \quad \text{или} \quad \sum (x_i - a_i)^2 < r^2.$$

Множество точек, расстояние которых от точки A равно r, называется поверхностью данной сферы:

$$\rho(X, A) = r \quad \text{или} \quad \sum (x_i - a_i)^2 = r^2.$$

Множество точек, принадлежащих сфере и ее поверхности, называется n-мерным шаром:

$$\rho(X, A) \leqslant r \quad \text{или} \quad \sum (x_i - a_i)^2 \leqslant r^2.$$

Прямоугольный параллелепипед.

Определения. 1°. *Множество точек $X(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, удовлетворяющих системе неравенств*

$$|x_1 - a_1| < h_1; \quad |x_2 - a_2| < h_2; \ldots; \quad |x_n - a_n| < h_n,$$

*называется **n-мерным открытым параллелепипедом** с центром в точке $A(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и с ребрами $2h_1, 2h_2, \ldots, 2h_n$.*

2°. *Множество точек пространства E_n, удовлетворяющих системе неравенств $|x_i - a_i| \leqslant h_i (i = 1, 2, \ldots, n)$, называется*

замкнутым параллелепипедом с центром $A(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *и с ребрами* $2h_1, 2h_2, \ldots, 2h_n$.

Если $h_1 = h_2 = \ldots = h_n$, то параллелепипед называется кубом (соответственно открытым либо замкнутым).

Прямая линия, отрезок. Пусть $A(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $B(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ — две различные точки пространства E_n.

Определение. *Множество точек* $X(x_1, x_2, \ldots, x_n)$:

$$x_1 = a_1 + (b_1 - a_1)t;\ x_2 = a_2 + (b_2 - a_2)t;\ \ldots;\ x_n = a_n + (b_n - a_n)t,$$

где t *— любое действительное число, называется прямой линией, проходящей через точки* A *и* B.

Точки A и B принадлежат этой прямой, так как при $t = 0$ $x_1 = a_1$, $x_2 = a_2, \ldots, x_n = a_n$ и при $t = 1$, $x_1 = b_1$, $x_2 = b_2, \ldots, x_n = b_n$.

В частности, при $n = 2$ ($n = 3$) получим параметрические уравнения прямой линии на плоскости (в пространстве)

$$x_1 = a_1 + (b_1 - a_1)t,$$
$$x_2 = a_2 + (b_2 - a_2)t, \quad (x_3 = a_3 + (b_3 - a_3)t \text{ при } n = 3).$$

Исключив параметр t, получим канонические уравнения прямой, проходящей через точки A и B:

$$\frac{x_1 - a_1}{b_1 - a_1} = \frac{x_2 - a_2}{b_2 - a_2} = \ldots = \frac{x_n - a_n}{b_n - a_n}.$$

Определение. *Множество точек* $X(x_1, x_2, \ldots, x_n)$:

$$x_1 = a_1 + (b_1 - a_1)t;\ x_2 = a_2 + (b_2 - a_2)t;\ \ldots;\ x_n = a_n + (b_n - a_n)t,$$

где $0 \leqslant t \leqslant 1$, *называется отрезком с концами в точках* A *и* B.

Часть прямой, соответствующая полусегменту $0 \leqslant t < +\infty$, *называется лучом* AB.

Если точки A и B задаются в определенном порядке, именно: одна из них считается началом, а другая концом отрезка, то отрезок называется вектором в n-мерном пространстве. Вектор с началом в точке A и с концом в точке B обозначается символом $\overline{AB}$. Число $\rho(A, B)$ называется длиной вектора. Числа $b_1 - a_1, b_2 - a_2, \ldots, b_n - a_n$ (по аналогии с геометрическими векторами) называются проекциями вектора на координатные оси. Так как

$$|b_i - a_i| \leqslant \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + \ldots + (a_n - b_n)^2},$$

т. е. $|b_i - a_i| \leqslant \rho(A, B)$, то абсолютная величина проекции n-мерного вектора на ось Ox_i не больше длины вектора.

Отношения

$$\alpha_1 = \frac{b_1 - a_1}{\rho(A, B)}, \quad \alpha_2 = \frac{b_2 - a_2}{\rho(A, B)}, \quad \ldots, \quad \alpha_n = \frac{b_n - a_n}{\rho(A, B)}$$

называются направляющими косинусами вектора $\overline{AB}$ (луча AB).

Как легко видеть, $b_1 = a_1 + \rho\alpha_1$, $b_2 = a_2 + \rho\alpha_2$, ..., $b_n = a_n + \rho\alpha_n$ и $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_n^2 = 1$.

Линия Жордана. Система функций, рассматриваемых совместно на данном числовом множестве $\mathfrak{M}_t$

$$x_1 = x_1(t), \quad x_2 = x_2(t), \ldots, \quad x_n = x_n(t), \tag{1}$$

определяет отображение, в котором всякому значению $t \in \mathfrak{M}_t$ соответствует точка (образ) $X(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ пространства E_n, а множеству $\mathfrak{M}_t$ соответствует множество точек (образ) $\mathfrak{M}_X$.

Определение. *Множество точек пространства E_n называется простой дугой Жордана, если оно может быть получено в результате отображения некоторого сегмента $a \leqslant t \leqslant b$ посредством системы функций* (1), *непрерывных на этом сегменте, причем двум различным значениям параметра t соответствуют две различные точки дуги.*

Если при соблюдении всех прочих условий *образы концов сегмента $[a, b]$ совпадают, то линия называется простой замкнутой линией.*

Простую дугу можно рассматривать как взаимно однозначный непрерывный образ сегмента, а простую замкнутую линию—как взаимно однозначный непрерывный образ окружности.

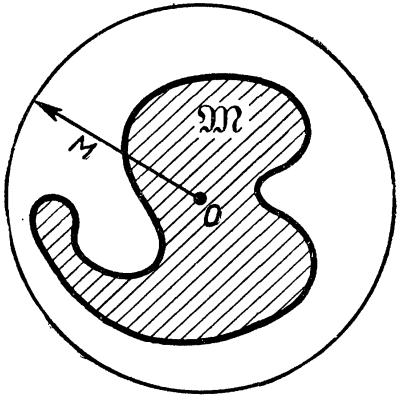
Примеры.

1. Отрезок, соединяющий точки A и B, есть простая дуга.
2. Множество точек (t, t^2, t^3, t^4), где $0 \leqslant t \leqslant 1$, есть простая дуга.

§ 5. Ограниченные и неограниченные множества

Определение. *Точечное множество $\mathfrak{M}$ называется ограниченным, если существует положительное число M такое, что расстояние любой точки $X \in \mathfrak{M}$ до начала координат O меньше M:*

$$\rho(X, O) < M \quad (X \in \mathfrak{M}).$$

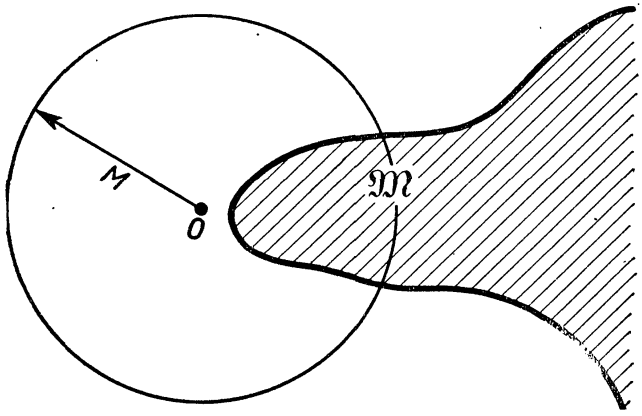


Черт. 2.

Если числа M, удовлетворяющего условию $\rho(X, O) < M$ (где $X \in \mathfrak{M}$), не существует, то множество $\mathfrak{M}$ называется неограниченным.

Иными словами, если множество $\mathfrak{M}$ ограничено, то существует сфера с центром в начале координат $O(0, 0, \ldots, 0)$ (достаточно большого радиуса), содержащая данное множество (черт. 2). Если множество $\mathfrak{M}$ не ограничено, то оно не

может содержаться ни в какой сфере, каким бы большим ни был радиус этой сферы (черт. 3).



Черт. 3.

Примеры.

1. Множество точек $X(x, y, z)$, удовлетворяющих уравнению (эллипсоид) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, ограничено. В самом деле, пусть M — любое число, большее, чем наибольшее из чисел a^2, b^2 и c^2.

Так как

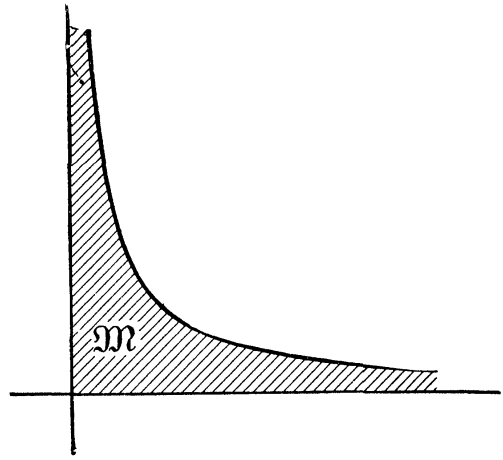
$$\frac{x^2+y^2+z^2}{M}<\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2},$$

то

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{M}<1, \text{ откуда}$$

$$\rho(X, O)<\sqrt{M}.$$

2. Множество $\mathfrak{M}$ точек $X(x, y)$, удовлетворяющих неравенствам $xy\leqslant 1$, $y\geqslant 0$, $x\geqslant 0$, неограничено. В самом деле, точка $B\left(M, \frac{1}{2M}\right)\in\mathfrak{M}$, но расстояние $\rho(O,B)=\sqrt{M^2+\frac{1}{4M^2}}>M$ (черт. 4).



Черт. 4.

3. Множество $\mathfrak{M}$ точек $M\left(\frac{1}{m_1}, \frac{1}{m_2}, \ldots, \frac{1}{m_n}\right)$, где m_1, m_2, ..., m_n — любые натуральные числа, ограничено. В самом деле,

$$\rho(O, M)=\sqrt{\frac{1}{m_1^2}+\frac{1}{m_2^2}+\ldots+\frac{1}{m_n^2}}\leqslant\sqrt{n}, \text{ ибо } 0<\frac{1}{m_i}\leqslant 1.$$

4. Сфера, шар, отрезок, куб суть ограниченные множества, все пространство, прямая, лучь суть неограниченные множества.

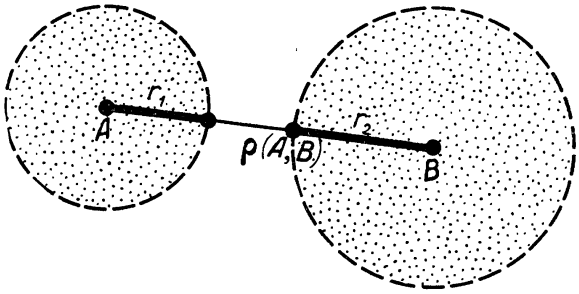
§ 6. Окрестности, предельные точки

Определение. *Сферической r-окрестностью точки $A(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ называется сфера с центром A радиуса r.*

Теорема. *Сферические окрестности удовлетворяют аксиомам окрестностей* (том I, § 15).

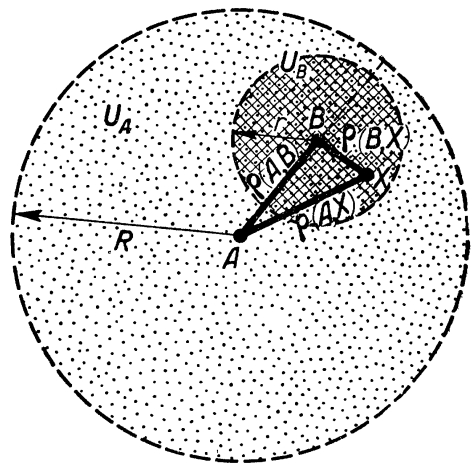
Доказательство. Свойство I_U. Пусть r_1 и r_2 — радиусы двух данных окрестностей U_1 и U_2 точки A и $r \leqslant \min(r_1, r_2)$, где $\min(r_1, r_2)$ есть наименьшее из чисел r_1 и r_2. Для произвольной точки X, содержащейся в окрестности U (точки A) радиуса r, имеем $\rho(X, A) < r$, а потому $\rho(X, A) < r_1$ и $\rho(X, A) < r_2$. Следовательно, $X \in U_1$ и $X \in U_2$, а, значит,

$$U \subset U_1 \quad \text{и} \quad U \subset U_2.$$



Черт. 5.

Свойство II_U. Пусть A и B — две различные точки. Рассмотрим окрестности U_A и U_B точек A и B радиусов r_1 и r_2 соответственно, причем $r_1 + r_2 < \rho(A, B)$ (например, $r_1 = r_2 = \frac{1}{3}\rho(A, B)$, черт. 5). Эти окрестности не имеют общих точек. В самом деле, предположим противное; пусть точка C принадлежит окрестностям U_A и U_B. Значит, $\rho(A, C) \leqslant r_1$, $\rho(B, C) \leqslant r_2$ и $\rho(A, C) + \rho(B, C) \leqslant r_1 + r_2$, но (неравенство треугольника) $\rho(A, B) \leqslant \rho(A, C) + \rho(B, C)$; следовательно, $\rho(A, B) \leqslant r_1 + r_2$, что невозможно.



Черт. 6.

Свойство III_U. Пусть U_A есть окрестность точки A радиуса R. Если $B \in U_A$, то $\rho(A, B) < R$; обозначим через r любое число, меньшее $R - \rho(A, B)$. Докажем, что r-окрестность U_B точки B содержится в U_A. Возьмем произвольную точку $X \in U_B$; имеем:

$$\rho(X, B) < r < R - \rho(A, B), \text{ откуда } \rho(A, B) + \rho(X, B) < R;$$

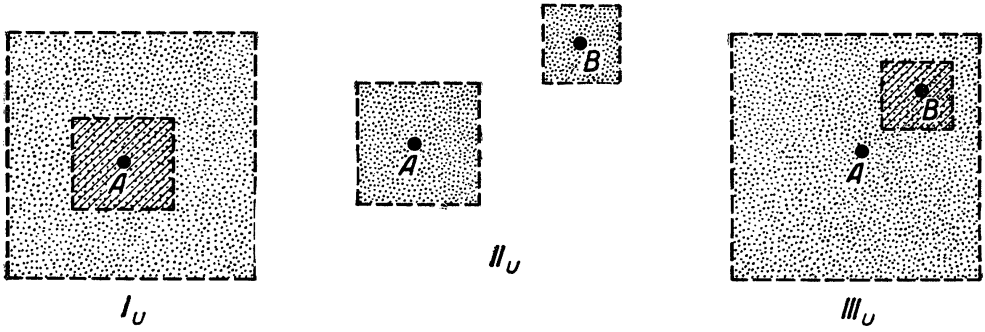
но, в силу неравенства треугольника:

$$\rho(A, X) \leqslant \rho(A, B) + \rho(X, B) \text{ (черт. 6).}$$

Значит, $\rho(A, X) < R$, т. е. $X \in U_A$, ч. т. д.

Определение. *Кубической h-окрестностью точки A пространства E_n называется открытый куб с центром A и с длиной ребер $2h$.*

Предлагаем читателю доказать, что и для кубических окрестностей имеют место свойства I_U, II_U, III_U.



Черт. 7.

Эти свойства геометрически легко иллюстрируются при $n = 1, 2, 3$ (черт. 7).

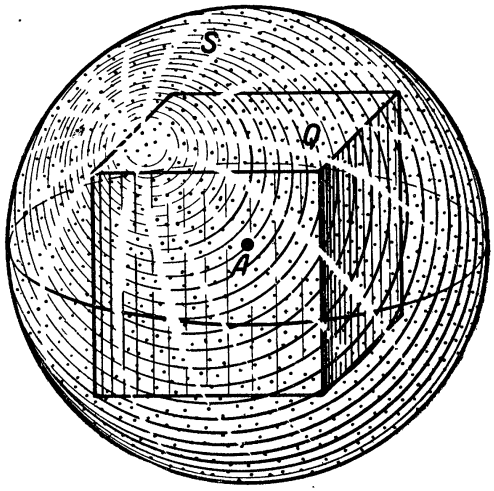
Кубические и сферические окрестности точки обладают следующим свойством (эквивалентности).

Теорема. 1°. *В любой сферической окрестности точки содержится некоторая кубическая окрестность той же точки.*

2°. *В любой кубической окрестности точки содержится некоторая сферическая окрестность этой точки.*

Доказательство. 1°. Дана сферическая окрестность S_A точки A радиуса r; рассмотрим кубическую h-окрестность Q_A точки A, где $h = \frac{r}{\sqrt{n}}$. Произвольная точка $X(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ этой окрестности $X \in Q_A$ имеет координаты, удовлетворяющие неравенствам $|x_i - a_i| < \frac{r}{\sqrt{n}}$. Поэтому

$$\rho^2(X, A) = \sum (x_i - a_i)^2 < n \cdot \frac{r^2}{n};$$



Черт. 8.

значит, $\rho(X, A) < r$, т. е. $X \in S_A$, а потому $Q_A \subset S_A$ (черт. 8, $n = 3$).

2°. Дана кубическая h-окрестность Q_A точки A.

Рассмотрим сферическую r-окрестность S_A точки A, где $r < h$. Точки $X(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ окрестности S_A имеют координаты, удовле-

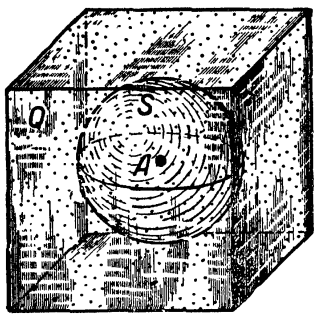
творяющие условию $\rho(X, A) < r < h$. Так как

$$|x_i - a_i| \leqslant \rho(X, A), \quad \text{то} \quad |x_i - a_i| < h.$$

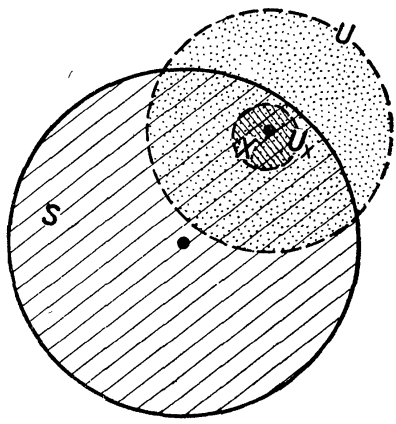
Значит, точка $X(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ принадлежит Q_A, а потому $S_A \subset Q_A$ (черт. 9, $n = 3$), ч. т. д.

В частности, на плоскости (при $n = 2$) внутри любого круга содержится квадрат с тем же центром и внутри любого квадрата содержится круг с тем же центром.

Определение предельной точки, опирающееся на понятие окрестности (том I, § 17), применимо к точечным множествам в пространстве любого числа измерений:



Черт. 9.



Черт. 10.

точка A есть предельная точка множества $\mathfrak{M} \subset E_n$, если любая окрестность точки A содержит хотя бы одну точку $X \in \mathfrak{M}$, отличную от A.

Из свойства эквивалентности системы сферических и системы кубических окрестностей можно заключить следующее: если A есть предельная точка множества $\mathfrak{M}$ в одной из этих систем, то она является предельной точкой и в другой системе. В самом деле, пусть, например, A есть предельная точка в системе сферических окрестностей. Любая кубическая окрестность точки A содержит сферическую окрестность, а в этой последней окрестности содержатся точки множества, отличные от A; значит, A есть предельная точка и в кубической системе окрестностей.

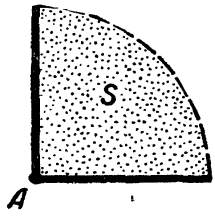
Примеры.

1. Для множества $\mathfrak{M}$ точек $X\left(\frac{1}{m}, \frac{1}{n}, \frac{1}{p}\right)$, где m, n, p — любые натуральные числа, точка $O(0, 0, 0)$ является предельной. В самом деле, точка X содержится в данной кубической h-окрестности точки O, если $\frac{1}{m} < h$, $\frac{1}{n} < h$, $\frac{1}{p} < h$, т. е. если $m > \frac{1}{h}$, $n > \frac{1}{h}$, $p > \frac{1}{h}$.

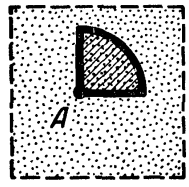
Таких точек существует бесконечное множество, так как существует бесконечное множество натуральных чисел, больших $\frac{1}{h}$.

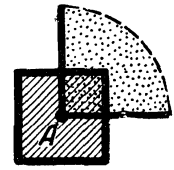
В данном примере точка O не принадлежит $\mathfrak{M}$.

2. Всякая точка X сферы S (n-мерной) является предельной точкой для S. В самом деле, пусть $X \in S$ и U — любая заданная окрестность точки X. В силу



Черт. 11.





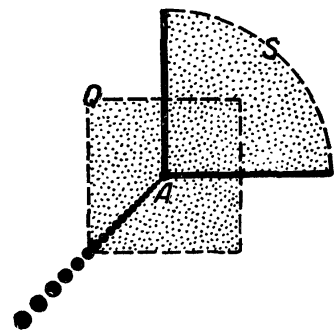
Черт. 12.

свойства III_U (S есть окрестность своего центра) окрестность достаточно малого радиуса U_X точки X содержится в S, а также в U (черт. 10). Следовательно, U содержит бесконечное множество точек сферы.

3. Точка $R(r_1, r_2, \ldots, r_n) \in E_n$ называется рациональной, если все ее координаты рациональны. Произвольная точка $A(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ есть предельная точка для множества $\mathfrak{M}_R$ всех рациональных точек пространства E_n. В самом деле, пусть Q_A — данная кубическая h-окрестность точки A. Каждый из интервалов $\alpha_i - h < x_i < \alpha_i + h$ содержит рациональные числа; если

$$\alpha_i - h < r_i < \alpha_i + h \quad (\text{где } i = 1, 2, \ldots, n),$$

то точка $R(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ содержится в Q_A.



Черт. 13.

4. Установим на плоскости следующие две системы окрестностей. Система (Q) есть система обычных квадратных окрестностей. Окрестностями системы (S) являются прямоугольные круговые секторы с центром в данной точке (при этом дуга окружности исключается), расположенные, как показано на чертеже 11. Системы (Q) и (S) неэквивалентны. В самом деле, всякий квадрат с центром в точке A содержит окрестность системы (S), но не существует квадрата с центром в точке A, содержащегося в данной окрестности системы (S) (черт. 12). Для последовательности точек, изображенных на чертеже 13, точка A является предельной в системе окрестностей (Q), но не является предельной в системе окрестностей (S).

§ 7. Открытые и замкнутые множества, области

Определения внутренней, внешней и граничной точек множества (том I, § 15) без изменения применимы к точечным множествам в пространстве E_n любого числа измерений.

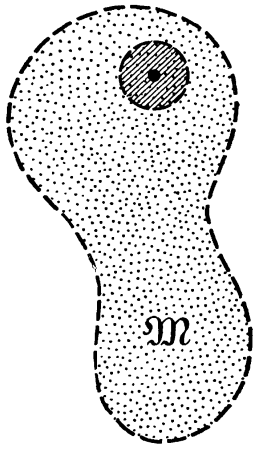
Определения. 1°. *Множество всех граничных точек данного множества* $\mathfrak{M}$ *называется границей* $\mathfrak{M}$.

2°. *Множество* $\mathfrak{M}$ *называется открытым, если каждая его точка является внутренней* (*относительно* $\mathfrak{M}$) (черт. 14).

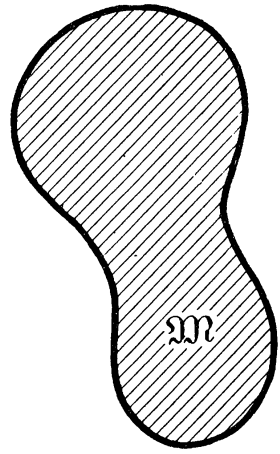
3°. *Множество* $\mathfrak{M}$ *называется замкнутым, если оно содержит все свои предельные точки или если оно не имеет предельных точек* (черт. 15).

В силу этих определений:

1°. *В любой окрестности точки, принадлежащей границе* $\mathfrak{M}$, *содержатся точки как принадлежащие, так и не принадлежащие* $\mathfrak{M}$.



Черт. 14.



Черт. 15.

2°. *Каждая точка открытого множества содержится в этом множестве вместе с некоторой своей окрестностью, следовательно, граница открытого множества не принадлежит самому множеству.*

3°. *Всякая предельная точка для множества* $\mathfrak{M}$ *является либо внутренней, либо граничной точкой.*

Теорема. *Граница всякого точечного множества есть замкнутое множество.*

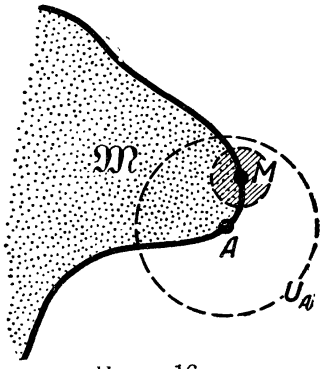
Доказательство. Пусть A есть предельная точка для границы данного множества $\mathfrak{M}$; следовательно, произвольная окрестность U_A содержит точку $M \neq A$ (хотя бы одну) границы множества $\mathfrak{M}$. В силу свойства III_U существует окрестность $U_M \subset U_A$ (черт. 16). Так как M — граничная точка, то в U_M, а следовательно, и в U_A содержатся точки как принадлежащие, так и не принадлежащие $\mathfrak{M}$, значит, A есть граничная точка, ч. т. д.

Следствие. *Если к точечному множеству* $\mathfrak{M}$ *присоединить его границу, то получится замкнутое множество.* Это множество обозначается символом $\overline{\mathfrak{M}}$.

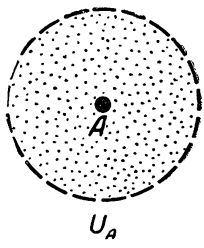
В самом деле, всякая точка M, не принадлежащая $\overline{\mathfrak{M}}$, есть внешняя для $\mathfrak{M}$ и не может быть предельной точкой ни для множества $\mathfrak{M}$,

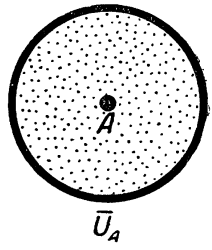
ни для его границы. Следовательно, все предельные точки множества $\overline{\mathfrak{M}}$ содержатся в этом множестве.

Определение. *Множество точек $\overline{U}_A$, полученное присоединением к окрестности U_A точки A ее границы, называется замкнутой окрестностью точки A, соответствующей U_A* (черт. 17).



Черт. 16.

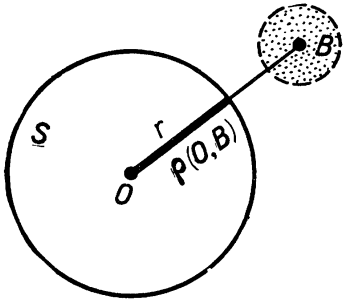




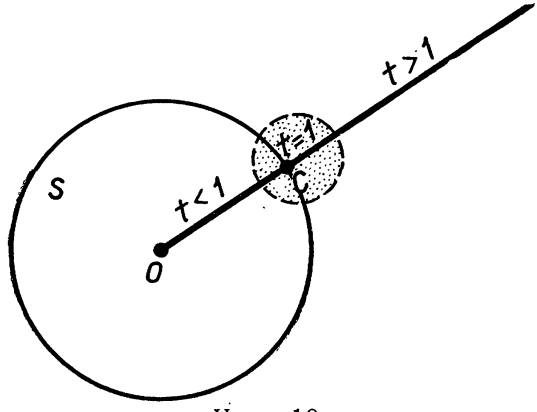
Черт. 17.

Примеры.

1. Множество всех точек пространства является и открытым, и замкнутым. Оно открытое, потому что всякая его точка есть внутренняя, и замкнутое, потому что не существует предельных точек этого множества, ему не принадлежащих.



Черт. 18.



Черт. 19.

2. Сфера есть открытое множество. Рассмотрим (для простоты) сферу S:

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 < r^2 \qquad (S)$$

с центром в начале координат. Если точка $A \in S$, то (свойство окрестностей III_U) существует окрестность U_A, содержащаяся в S.

Всякая точка B, отстоящая от центра O сферы на расстояние, большее радиуса r, есть внешняя точка для S. В самом деле, окрестность U_B радиуса меньшего, чем $\rho(O, B) - r$, не содержит ни одной точки сферы S (см. доказательство свойства II_U, черт. 18).

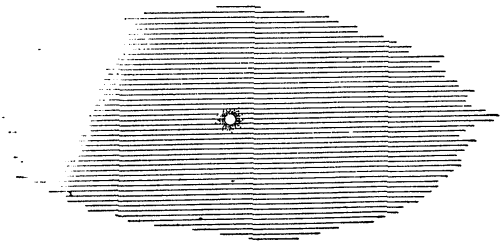
Всякая точка $C(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ поверхности сферы есть граничная точка. В самом деле, пусть $\rho(O, C) = r$; проведем прямолинейный луч

$$x_1 = tc_1,\ x_2 = tc_2,\ \ldots,\ x_n = tc_n$$

через точки O и C (черт. 19), где $t \geqslant 0$. Вычислим расстояние $\rho(O, X)$:

$$\rho(O, X) = \sqrt{t^2c_1^2 + t^2c_2^2 + \ldots + t^2c_n^2} = t\rho(O, C) = tr.$$

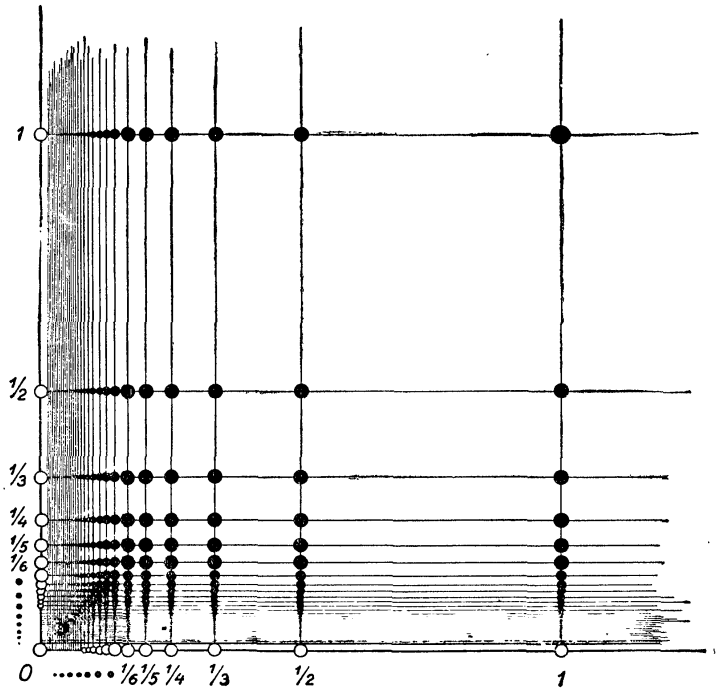
При $t > 1$ имеем $\rho(O, X) > r$, т. е. точка X лежит вне сферы; при $t < 1$ получим $\rho(O, X) < r$, т. е. точка X лежит внутри сферы. Значит, любая окрестность точки C содержит как внутренние, так и внешние точки сферы. Итак, граница сферы есть ее поверхность.



Черт. 20.

Шар $\overline{S}$ есть замкнутое множество, так как он состоит из сферы и ее границы.

3. Конечное множество точек (как не имеющее предельных точек) замкнуто. Границей является само данное множество. Исключим из плоскости (или из пространства) конечное множество точек, например одну точку. Оставшееся множество является открытым, его границей является исключенная точка (черт. 20).



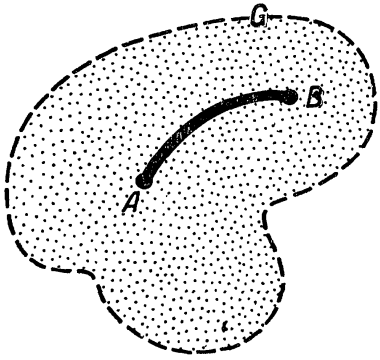
Черт. 21.

4. Рассмотрим множество $\mathfrak{M}$ точек плоскости $M\left(\frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right)$, где (черт. 21) m и n — произвольные натуральные числа. Множество $\mathfrak{M}$ не является откры-

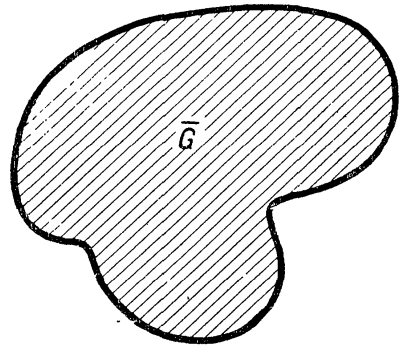
тым, так как оно не имеет внутренних точек, все его точки граничные. Это множество не является замкнутым, так как оно не содержит своих предельных точек. В самом деле, предельными точками для $\mathfrak{M}$ являются точки $\left(\frac{1}{m}, 0\right)$ оси OX, точки $\left(0, \frac{1}{n}\right)$ оси OY и точка $O(0, 0)$.

5. Множество $\mathfrak{M}_R$ рациональных точек не является ни открытым, ни замкнутым. Всякая точка пространства является граничной для $\mathfrak{M}_R$, следовательно, граница $\mathfrak{M}_R$ есть все пространство.

Определение. *Открытое точечное множество называется областью, если оно обладает следующим свойством: каковы бы ни были две его различные точки, существует простая дуга с концами в этих точках, содержащаяся в данном множестве.*



Черт. 22.



Черт. 23.

Это свойство называется свойством связности области; кратко его формулируют так: *любые две точки области можно соединить простой дугой, содержащейся в области* (черт. 22).

Определение. *Множество точек области G и всех ее граничных точек называется замкнутой областью* (черт. 23).

Итак, замкнутая область $\bar{G}$ есть точечное множество, образованное присоединением к области G ее границы, а потому *всякая замкнутая область является замкнутым множеством.*

Примечание. Две точки замкнутой области $\bar{G}$, из которых хотя бы одна лежит на границе, не всегда могут быть соединены простой дугой, лежащей (за исключением, быть может, концов) внутри G (пример 8, см. ниже).

В геометрии доказывается нижеследующая теорема Жордана*.

Теорема. *Всякая простая замкнутая плоская линия*

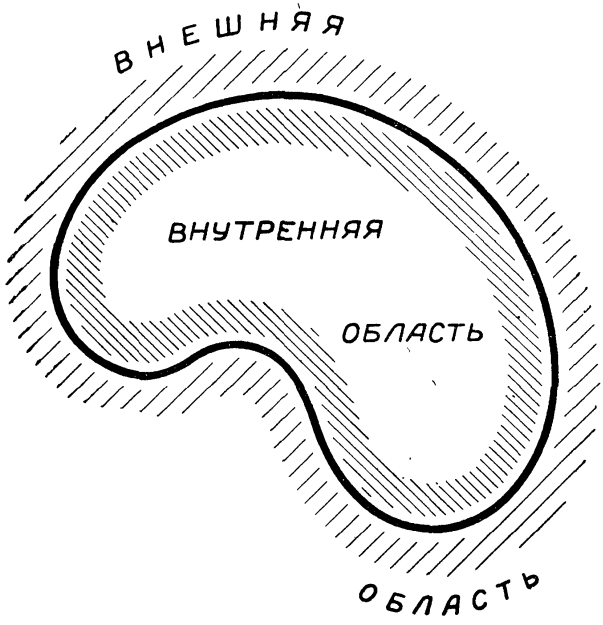
$$x = x(t), \quad y = y(t)$$

есть общая граница двух областей, одна из которых ограничена, а другая неограничена.

---

* Доказательство теоремы Жордана можно найти в курсах топологии; см., например, проф. П. С. Александров, Комбинаторная топология, Гостехиздат, М. — Л., 1947.

Первая из этих областей называется внутренней, а вторая внешней относительно данной замкнутой линии (черт. 24). Область внутреннюю относительно простой замкнутой линии будем называть простой областью.



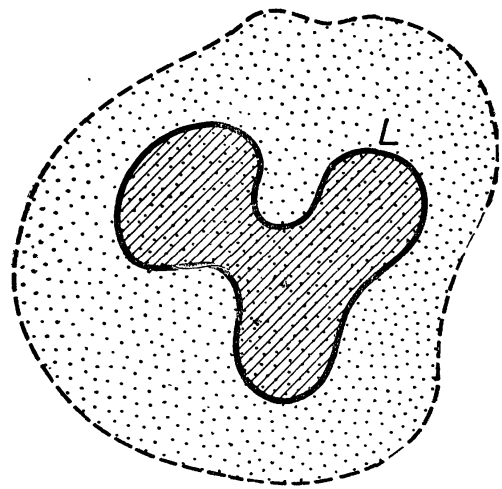
Черт. 24.

Определение. *Область G на плоскости называется односвязной, если область внутренняя относительно произвольной простой замкнутой линии, содержащейся в G, также содержится в области G.*

Иными словами, если простая замкнутая линия L содержится в односвязной области G, то область внутренняя относительно L также содержится в G (черт. 25). Изображенные на чертеже 26 области являются односвязными, а на чертеже 27 не являются односвязными.

Во многих практически важных случаях задание области осуществляется при помощи неравенств. Рассмотрим, например, замкнутую область $\overline{D}$, ограниченную снизу линией $y = y_1(x)$, сверху линией $y = y_2(x)$, а с боков параллелями оси ординат $x = a$ и $x = b$, где $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — функции, непрерывные на сегменте $[a, b]$, и $y_1(x) < y_2(x)$ в интервале (a, b) (черт. 28).

Линия, состоящая из дуг $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$ и двух прямолинейных отрезков, есть простая замкнутая линия, ограничивающая некоторую область. Входящие в состав границы боковые отрезки могут (один или оба) выродиться в точку; так будет, если верхняя и нижняя дуги имеют общие концы (один или оба). Аналитически



Черт. 25.

замкнутая область $\overline{D}$ может быть задана неравенствами

$$y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x); \quad a \leqslant x \leqslant b. \qquad (\overline{D})$$

Соответствующую открытую область D можно задать неравенствами:

$$y_1(x) < y < y_2(x); \quad a < x < b. \qquad (D)$$

Примеры.

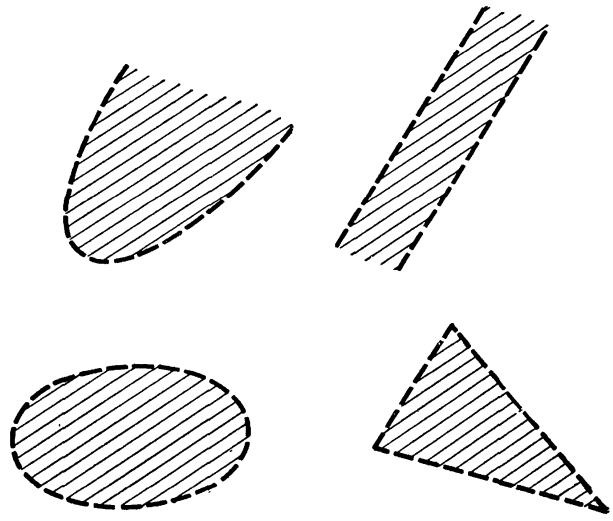
1. Пространство есть область.

2. Сфера есть область. В самом деле, рассмотрим сферу

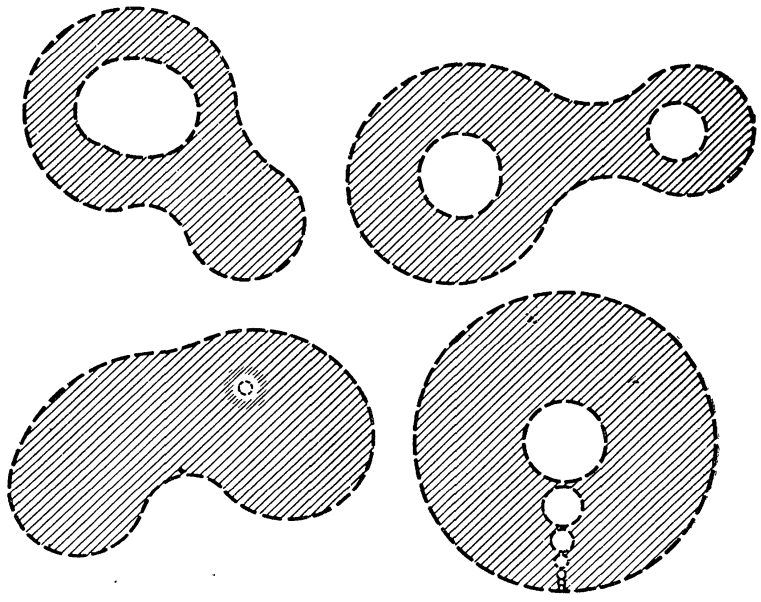
$$\rho(X, O) < r;$$

пусть $A(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in S$ и $B(b_1, b_2, \ldots, b_n) \in S$ — две данные точки; нетрудно видеть, что прямолинейный отрезок AB:

$$x_1 = a_1 + t(b_1 - a_1), \ldots, x_n = a_n + t(b_n - a_n); \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$$



Черт. 26.



Черт. 27.

содержится в S. В самом деле, предположим для определенности, что $\rho(O, A) \leqslant \rho(O, B)$, тогда имеем:

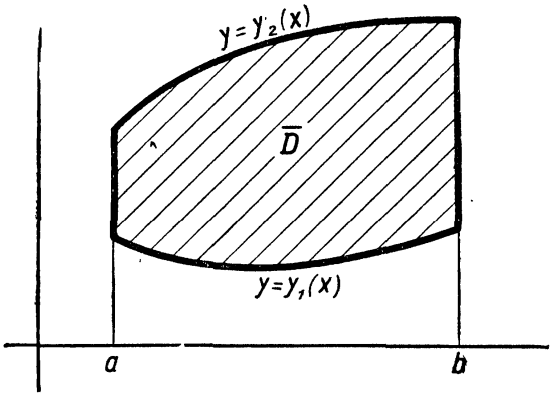
$$\rho(O, X) = \sqrt{\Sigma[a_i + t(b_i - a_i)]^2} = \sqrt{\Sigma[(1-t)a_i + tb_i]^2} \leqslant (1-t)\sqrt{\Sigma a_i^2} +$$

$$+t\sqrt{\sum b_i^2} = (1-t)\,\rho(O, A) + t\rho(O, B) \leqslant (1-t)\,\rho(O, B) + t\rho(O, B) =$$
$$= \rho(O, B) < r,$$

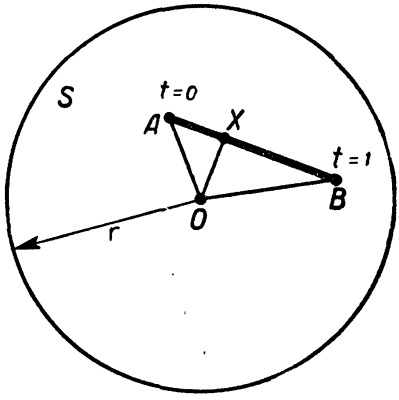
где X - любая точка отрезка AB (черт. 29).

Шар есть замкнутая область.

Предлагаем читателю доказать, что открытый куб есть область.



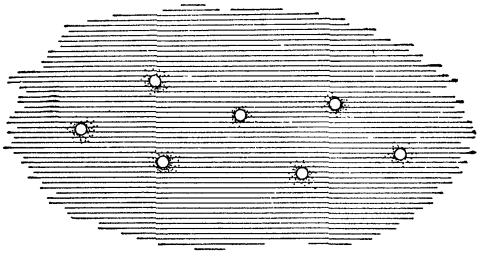
Черт. 28.



Черт. 29.

3. Исключив из плоскости точку (или конечное множество точек), получим область; эта область неодносвязная (черт. 30).

4. В пространстве E_1 (на прямой) интервал (a, b) есть область, сегмент $[a, b]$ есть соответствующая замкнутая область. В пространстве E_2 (на плоскости) прямолинейный отрезок не содержит ни одной внутренней точки (черт. 31), а потому не является областью (ни открытой, ни замкнутой).



Черт. 30.

Черт. 31.

Исключив из плоскости отрезок, получим область (неодносвязную), границей которой служит исключенный отрезок (чертеж 32 поясняет выполнение характеристических свойств области).

5. Множество, состоящее из внутренних точек двух внешне расположенных кругов, есть открытое, но не связное множество, а потому не является областью (черт. 33).

6. Множество, состоящее из внутренних точек двух внешне касающихся кругов и из точки прикосновения, не есть область, так как точка прикосновения не является внутренней. Это множество не является замкнутым (черт. 34).

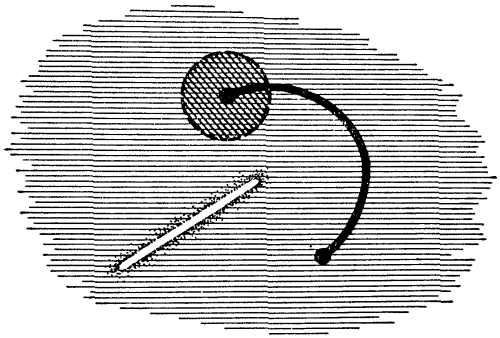
7. Множество точек, ограниченное двумя концентрическими окружностями (кольцо), есть неодносвязная область (черт. 35).

8. На чертеже 36 представлена область, ограниченная линией $y = \cos\frac{1}{x}$, дугой окружности и отрезком оси ординат $-1 \leqslant y \leqslant 1$. Ни одна точка A отрезка $-1 \leqslant y \leqslant 1$ оси OY, кроме точки $(0, -1)$, не может быть соединена ни с какой внутренней точкой области простой дугой, лежащей (кроме самой точки A) внутри области.

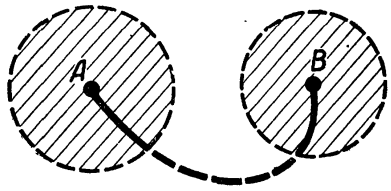
9. Область, ограниченная эллипсом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, может быть задана неравенствами

$$-\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} < y < \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2},$$

$$-a < x < a$$



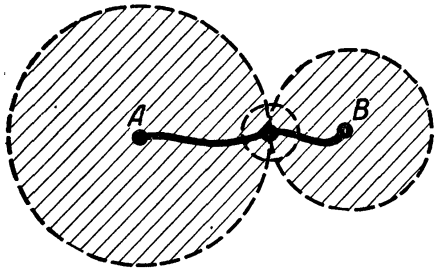
Черт. 32.



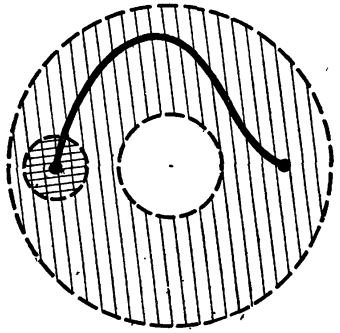
Черт. 33.

или неравенствами

$$-\frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2} < x < \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2}, \quad -b < y < b.$$



Черт. 34.



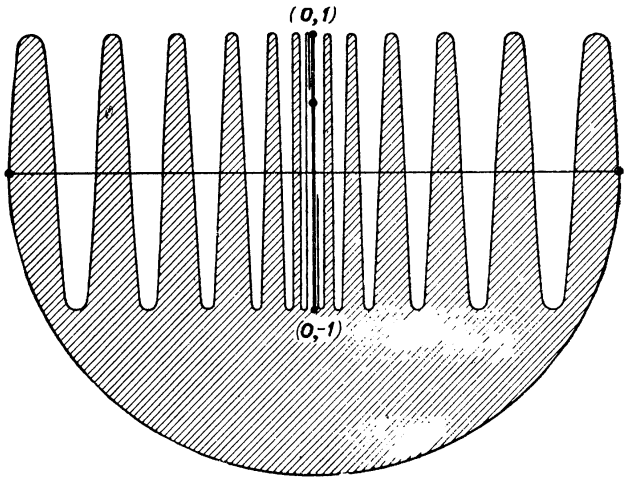
Черт. 35.

Показанная на чертеже 37 область (неограниченная), границей которой служит правая ветвь гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, может быть задана неравенствами

$$-\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} < y < \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}, \quad a < x < +\infty$$

или неравенствами

$$\frac{a}{b}\sqrt{b^2 + y^2} < x < +\infty, \quad -\infty < y < +\infty.$$

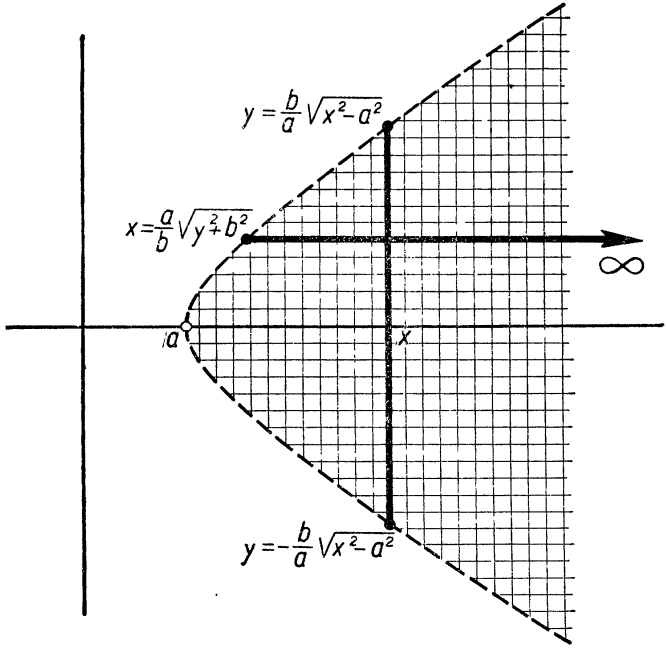


Черт. 36.

Замкнутая область, ограниченная эллипсоидом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, может быть задана неравенствами:

$$-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}} \leqslant z \leqslant c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}};$$

$$-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2} \leqslant y \leqslant \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}; \quad -a \leqslant x \leqslant a.$$

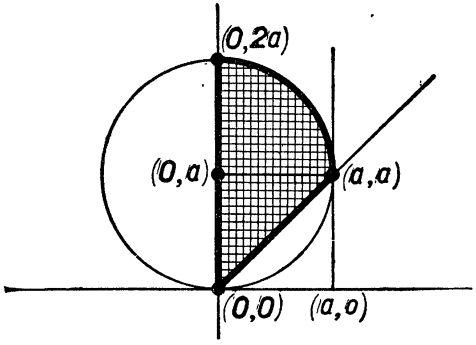


Черт. 37.

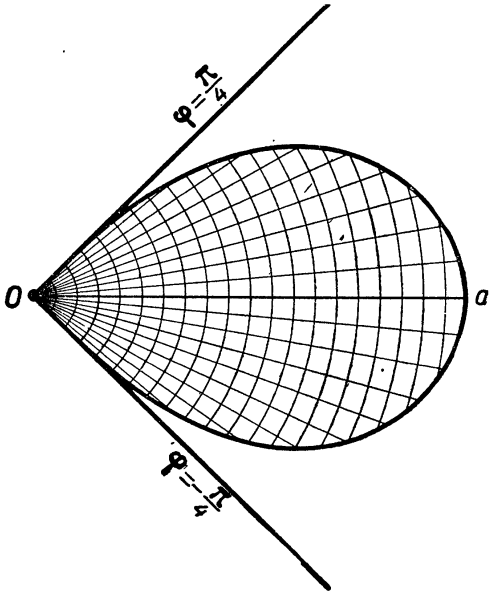
10. Неравенства $x \leqslant y \leqslant a + \sqrt{a^2 - x^2}$, $0 \leqslant x \leqslant a$ определяют замкнутую область $\bar{D}$, ограниченную снизу прямой $y = x$, сверху линией $y = a + \sqrt{a^2 - x^2}$, т. е. дугой окружности $x^2 + (y - a)^2 = a^2$, и с боков прямыми $x = 0$ и $x = a$ (черт. 38). Другим способом замкнутая область $\bar{D}$ может быть задана так: прямая $y = a$ разбивает $\bar{D}$ на две части: нижнюю и верхнюю, каждая из этих частей определяется (соответственно) неравенствами

$$0 \leqslant x \leqslant y,\ 0 \leqslant y \leqslant a \text{ и}$$

$$0 \leqslant x \leqslant \sqrt{2ay - y^2},\ a \leqslant y \leqslant 2a.$$



Черт. 38.



Черт. 39.

11. Область, ограниченную правой петлей лемнискаты (черт. 39) $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$, можно в полярных координатах задать неравенствами

$$0 < \rho < a\sqrt{\cos 2\varphi}, \quad -\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{\pi}{4}$$

или неравенствами

$$-\frac{1}{2} \arccos \frac{\rho^2}{a^2} < \varphi < \frac{1}{2} \arccos \frac{\rho^2}{a^2}, \quad 0 < \rho < a.$$

§ 8. Принцип стягивающихся кубов

Теорема. *Если последовательность замкнутых кубов*

$$\bar{Q}_1,\ \bar{Q}_2,\ \bar{Q}_3,\ \ldots,\ \bar{Q}_k,\ \ldots \qquad \{\bar{Q}_k\}$$

в пространстве E_n, обладающая следующими свойствами:

1° *каждый последующий куб (начиная со второго) вложен в предыдущий:*

$$\bar{Q}_1 \supset \bar{Q}_2 \supset \bar{Q}_3 \supset \ldots \supset \bar{Q}_k \supset \ldots,$$

2° *последовательность длин ребер кубов*

$$2h_1,\ 2h_2,\ 2h_3,\ \ldots,\ 2h_k,\ \ldots$$

сходится к нулю ($\lim 2h_k = 0$),

то существует единственная точка, принадлежащая каждому кубу данной последовательности.

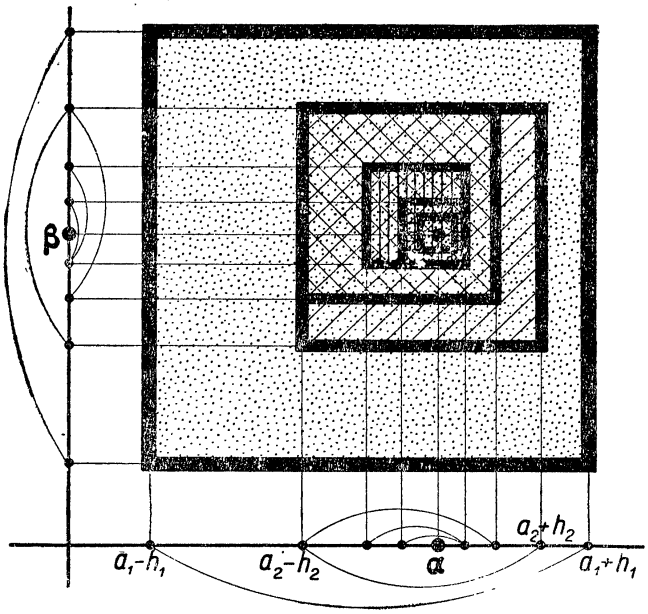
Доказательство приводится ниже для трехмерного пространства, в общем случае потребуется лишь усложнение в символике, тогда как метод доказательства останется тем же. Пусть $A(a_k, b_k, c_k)$ есть центр куба $\overline{Q}_k$, а $X(x_k, y_k, z_k)$ — произвольная точка этого куба. Значит,

$$a_k - h_k \leqslant x_k \leqslant a_k + h_k;\ b_k - h_k \leqslant y_k \leqslant b_k + h_k;$$
$$c_k - h_k \leqslant z_k \leqslant c_k + h_k.$$

Рассмотрим последовательность сегментов:

$$[a_1 - h_1,\ a_1 + h_1],\ [a_2 - h_2,\ a_2 + h_2],\ [a_3 - h_3,\ a_3 + h_3],\ \ldots \quad (1)$$

(эти сегменты суть проекции на ось OX ребер кубов $\overline{Q}_k$, параллельных оси OX). В силу условий 1° и 2° теоремы (1) есть последовательность стягивающихся сегментов.



Черт. 40.

В силу принципа стягивающихся сегментов (том I, § 29) существует единственная точка α, принадлежащая каждому сегменту последовательности (1). Аналогично существует единственная точка β, принадлежащая каждому сегменту последовательности

$$[b_1 - h_1,\ b_1 + h_1],\ [b_2 - h_2,\ b_2 + h_2],\ [b_3 - h_3,\ b_3 + h_3],\ \ldots, \quad (2)$$

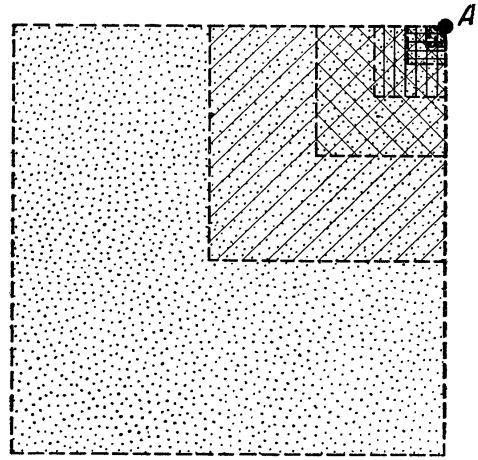
и точка γ, принадлежащая каждому сегменту последовательности

$$[c_1 - h_1,\ c_1 + h_1],\ [c_2 - h_2,\ c_2 + h_2],\ [c_3 - h_3,\ c_3 + h_3],\ \ldots \quad (3)$$

Следовательно, точка $P(\alpha, \beta, \gamma)$ принадлежит всем кубам последовательности $\{\bar{Q}_k\}$ (черт. 40). Эта точка есть единственная точка, принадлежащая каждому кубу последовательности $\{\bar{Q}_k\}$.

В самом деле, предположим, что точка $P'(\alpha', \beta', \gamma') \neq P(\alpha, \beta, \gamma)$ также принадлежит каждому из кубов последовательности $\{\bar{Q}_k\}$.

Пусть, например, $\alpha \neq \alpha'$; тогда α и α' суть две различные точки, принадлежащие всем сегментам последовательности (1), что невозможно; значит, $P=P'$, ч. т. д.



Черт. 41.

Примечание. Применительно к открытым кубам принцип стягивающихся кубов в общем случае не имеет места. На чертеже 41 представлена последовательность стягивающихся квадратов с общей вершиной A. Точка A есть общая точка для всех замкнутых квадратов, но соответствующие открытые квадраты не имеют ни одной общей точки.

§ 9. Принцип предельных точек

Теорема. *Для всякого бесконечного ограниченного множества в евклидовом пространстве существует хотя бы одна предельная точка.*

Доказательство. Чтобы не усложнять рассуждения громоздкими обозначениями, ограничимся случаем $n = 2$. Так как данное множество $\mathfrak{M}$ ограничено, то существует замкнутый квадрат

$$a_0 \leqslant x \leqslant b_0, \quad c_0 \leqslant y \leqslant d_0, \qquad (\bar{Q}_0)$$

содержащий $\mathfrak{M}$. Пусть h — длина стороны этого квадрата. Разобьем квадрат $\bar{Q}_0$ на четыре равные квадрата:

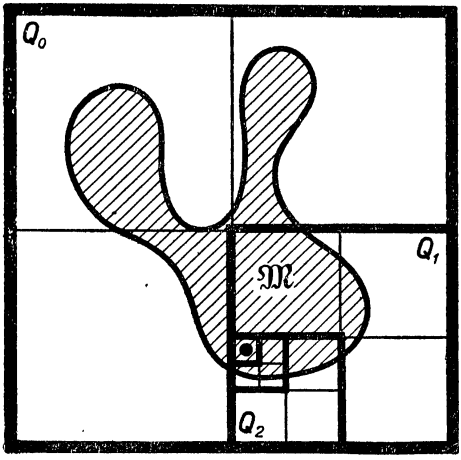
$$a_0 \leqslant x \leqslant \frac{a_0+b_0}{2}; \quad c_0 \leqslant y \leqslant \frac{c_0+d_0}{2}; \qquad \text{(I)}$$

$$a_0 \leqslant x \leqslant \frac{a_0+b_0}{2}; \quad \frac{c_0+d_0}{2} \leqslant y \leqslant d_0; \qquad \text{(II)}$$

$$\frac{a_0+b_0}{2} \leqslant x \leqslant b_0; \quad c_0 \leqslant y \leqslant \frac{c_0+d_0}{2}; \qquad \text{(III)}$$

$$\frac{a_0+b_0}{2} \leqslant x \leqslant b_0; \quad \frac{c_0+d_0}{2} \leqslant y \leqslant d_0. \qquad \text{(IV)}$$

Хотя бы один из этих четырех квадратов содержит бесконечное множество точек, принадлежащих $\mathfrak{M}$ (в противном случае множество $\mathfrak{M}$ оказалось бы конечным); обозначим такой квадрат через $\overline{Q}_1$. Длина стороны $\overline{Q}_1$ равна $\frac{h}{2}$. Далее с квадратом $\overline{Q}_1$ поступаем так же, как и с $\overline{Q}_0$: квадрат $\overline{Q}_1$ разобьется на четыре квадрата с длиной стороны $\frac{h}{4}$, из которых хотя бы один $\overline{Q}_2$ содержит бесконечное множество точек, принадлежащих $\mathfrak{M}$. Неограниченное продолжение этого процесса приведет к последовательности $\{\overline{Q}_n\}$ стягивающихся квадратов $\overline{Q}_1 \supset \overline{Q}_2 \supset \ldots$ $\ldots \supset \overline{Q}_n \supset \ldots$ (сторона $\overline{Q}_n$ равна $\frac{h}{2^n}$), каждый из которых содержит бесконечную часть данного множества (черт. 42). Точка A, определяемая квадратами полученной последовательности, является предельной для данного множества. В самом деле, всякая данная квадратная h-окрестность точки A при достаточно большом n содержит квадрат $\overline{Q}_n$, а вместе с $\overline{Q}_n$ — бесконечное множество точек $\mathfrak{M}$; следовательно, A есть предельная точка для $\mathfrak{M}$, ч. т. д.



Черт. 42.

Примечание I. В общем случае для пространства E_n в доказательстве принципа предельных точек под $\overline{Q}_k$ следует подразумевать замкнутый n-мерный куб. Каждый из этих кубов делится на 2^n кубов, хотя бы один из последних кубов $\overline{Q}_{k+1}$ содержит бесконечную часть данного множества.

Примечание II. Для последовательности $\{M_n\}$ точек формулировка и доказательство принципа предельных точек (том I, § 32) остаются в силе, если условиться всякую бесконечно кратную точку рассматривать как бесконечное множество точек (совпавших) последовательности $\{M_n\}$.

ГЛАВА II

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ АРГУМЕНТОВ

§ 10. Функции точки

Определение. Если дано *множество* $\mathfrak{M}$ *точек пространства* E_n *и каждой точке* $X(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathfrak{M}$ *поставлено в соответствие некоторое число* y, *то говорят, что задана функция точки* n*-мерного пространства или функция* n *аргументов.*

Для обозначения функции n аргументов употребляется запись:

$$y = f(X) \quad \text{или} \quad y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n);$$

координаты $x_1, x_2, \ldots, x_n$ точки X называются аргументами, множество $\mathfrak{M}$ называется областью определения функций*.

При $n = 1$ сформулированное определение совпадает с определением функции одного аргумента. Обычно функции двух и трех аргументов обозначаются так: $z = f(x, y)$ и $u = f(x, y, z)$.

Численное значение функции в данной точке $A(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathfrak{M}$ обозначается символом $f(A)$ или $f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Ряд понятий, определений и теорем, относящихся к функциям одного аргумента, распространяются без изменения (или с незначительными изменениями) на функции многих аргументов.

1°. *Функцию можно рассматривать на множестве* $\mathfrak{M}_1$, *являющемся частью области ее определения*: $\mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{M}$ (том I, § 5).

2°. Так как множество значений функции есть числовое множество, *то сохраняют смысл определения функции, ограниченной сверху (или снизу), неограниченной сверху (или снизу), ограниченной и неограниченной на данном множестве* (том I, § 12).

3°. *При совместном задании нескольких функций каждая из этих функций рассматривается на одном и том же множестве, являющемся общей частью областей определения данных функций.*

4°. *Понятия «больше», «меньше», «равно», а также арифметические действия над функциями сохраняют тот же смысл, что для функций одного аргумента.*

---

* Не следует смешивать два различные понятия: область как множество точек (открытое и связное) и область определения функции; последнее может быть любым точечным множеством.

5°. Понятие сложной функции вводится следующим образом: пусть

$$u_1 = u_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad u_2 = u_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots,$$
$$u_m = u_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

система m функций, заданных совместно на некотором множестве $\mathfrak{M}_X$, и $y = f(u_1, u_2, \ldots, u_m)$ — данная функция от m аргументов. Точке $X(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathfrak{M}_X$ соответствует точка $U(u_1, u_2, \ldots, u_m)$, где координаты u_i суть значения функций данной системы в точке X. Если точка U принадлежит области определения $\mathfrak{M}_U$ функции $f(U) = f(u_1, u_2, \ldots, u_m)$, то этой точке соответствует вполне определенное значение $f(U)$. В этом случае точке $X(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ соответствует значение

$$f(U) = f\big(u_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad u_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots$$
$$\ldots, u_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)\big).$$

Функция с законом соответствия

$$F(X) = f\big(u_1(X), u_2(X), \ldots, u_m(X)\big)$$

называется сложной функцией с промежуточными аргументами $u_1, u_2, \ldots, u_m$. *Областью определения сложной функции является множество всех точек* $\mathfrak{M}'_X \subset \mathfrak{M}_X$, *для которых точка* $U[u_1(X), u_2(X), \ldots, u_m(X)]$ *принадлежит множеству* $\mathfrak{M}_U$ (том I, § 7).

6°. *Элементарными функциями называются функции, которые могут быть получены из основных элементарных функций одного аргумента посредством арифметических действий и образования сложных функций.* Принцип классификации элементарных функций остается прежний.

Рассмотрение функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ на множестве точек линии

$$x_1 = x_1(t), \quad x_2 = x_2(t), \ldots, x_n = x_n(t), \qquad (L)$$

содержащихся в области определения $f(X)$, приводится к рассмотрению сложной функции $f\big(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)\big)$ от одного аргумента (параметра) t. Кратко говорят, что данная функция рассматривается на линии (L).

Если функция $f(X)$ постоянна на линии (L), то эта линия называется линией уровня данной функции.

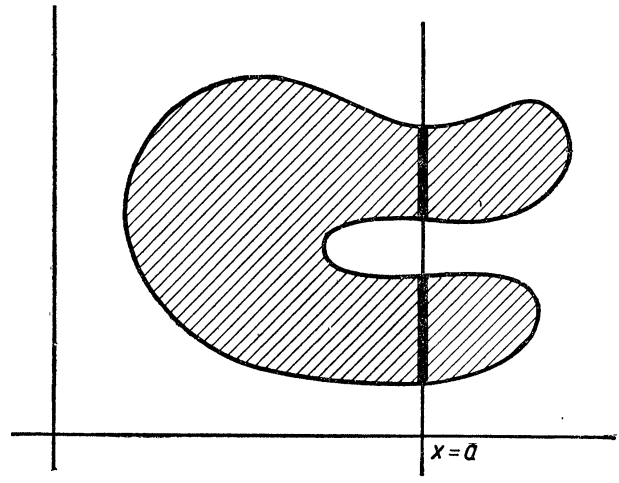
Функцию $f(x, y, z)$ точки $X(x, y, z)$ пространства можно рассматривать на данной поверхности. Поверхность, на которой функция $f(x, y, z)$ постоянна, называется поверхностью уровня этой функции.

Если функцию $f(x, y)$ рассматривать на множестве точек (содержащихся в области определения), имеющих одну и ту же абсциссу $x = a$, т. е. на прямой, параллельной оси ординат, то получим функцию $f(a, y)$ от аргумента y. Областью определения этой последней функции является множество таких значений y, при которых точка

$X(a, y)$ принадлежит области определения $f(x, y)$. Геометрически область определения функции $f(a, y)$ интерпретируется как пересечение прямой $x = a$ с областью определения функции $f(x, y)$ (черт. 43).

Примечание. Если параллель $x = a$ не пересекает область определения функции $f(x, y)$, то рассмотрение функции $f(a, y)$ не имеет смысла. В дальнейшем мы будем всегда считать этот случай исключенным, не делая каждый раз оговорок.

Если при каждом данном значении аргумента x функция $f(x, y)$ (как функция аргумента y) постоянна, то говорят, что $f(x, y)$ постоянна по аргументу y. Значение функции, постоянной по аргументу y, определяется заданием значения x; такая функция постоянна на любой параллели оси OY.



Черт. 43.

Аналогично, функцию $f(x, y)$ можно рассматривать на параллелях $y = b$ оси OX.

Функцию трех аргументов $f(x, y, z)$ можно рассматривать при данном значении одного из аргументов, т. е. на плоскости, параллельной соответствующей координатной плоскости. Так, полагая $x = a$, мы рассматриваем функцию $f(x, y, z)$ на плоскости, параллельной плоскости YZ, и получаем функцию двух аргументов $f(a, y, z)$.

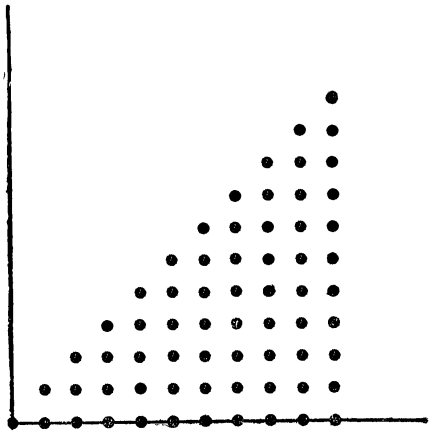
Полагая $x = a$, $y = b$, мы рассматриваем функцию $f(x, y, z)$ на прямой, параллельной оси OZ, и получаем функцию одного аргумента $f(a, b, z)$.

В общем случае функцию $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ можно рассматривать при данных значениях некоторой совокупности аргументов. Положив, например, $x_{m+1} = a_{m+1}, \ldots, x_n = a_n$, мы получим функцию от остальных аргументов:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots, a_n),$$

определенную на множестве значений $x_1, x_2, \ldots, x_m$, для которых точка $(x_1, x_2, \ldots, x_m, a_{m+1}, \ldots, a_n)$ принадлежит области определения $f(X)$.

Если функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ постоянна по некоторой совокупности аргументов, например $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n$, то ее значение определяется заданием системы значений других аргументов $x_1, x_2, \ldots, x_m$.



Черт. 44.

В этом случае имеем

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_m, x'_{m+1}, \ldots, x'_n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_m, x''_{m+1}, \ldots, x''_n)$$

для любых двух точек

$$X'(x_1, x_2, \ldots, x_m, x'_{m+1}, \ldots, x'_n)$$

и $X''(x_1, x_2, \ldots, x_m, x''_{m+1}, \ldots, x''_n)$,

содержащихся в области определения $f(X)$.

Если функция от n аргументов задается формулой, содержащей m аргументов (где $m < n$), то подразумевается, что эта функция постоянна по совокупности прочих $n - m$ аргументов (не входящих в формулу).

Примеры.

1. Число сочетаний $C_m^n = \dfrac{m!}{n!\,(m-n)!}$ есть функция, определенная на множестве точек $M(m, n)$ (черт. 44), где m и n — произвольные целые неотрицательные числа, удовлетворяющие условию $n \leqslant m$ (как обычно, считаем $0! = 1$). Множество значений C_m^n есть множество всех натуральных чисел.

2. Пусть R — множество рациональных точек плоскости $X\left(\dfrac{m}{p}, \dfrac{n}{q}\right)$, где $\dfrac{m}{p}$ и $\dfrac{n}{q}$ — несократимые дроби с положительными знаменателями. Общее наименьшее кратное чисел p и q есть функция $F(X)$, определенная на множестве R. Имеем:

$$F\left(2, \frac{1}{5}\right) = 5;$$

$$F\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{7}\right) = 21;$$

$$F\left(-1, \frac{1}{2}\right) = 2.$$

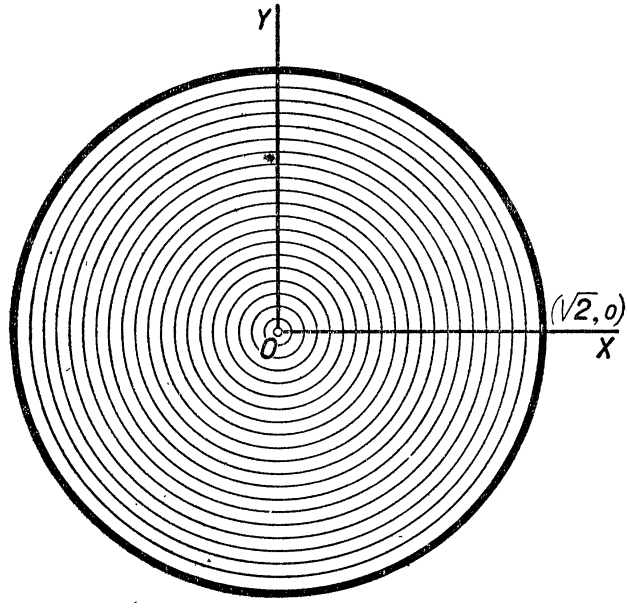
3. Положим $z = f(x, y) = \arcsin(1 - x^2 - y^2)$. Область определения находится из условия

$$-1 \leqslant 1 - (x^2 + y^2) \leqslant 1,$$

откуда получаем круг

$x^2 + y^2 \leqslant 2$ (черт. 45).

Всякая окружность $x^2 + y^2 = r^2$ (где $r \leqslant \sqrt{2}$) есть линия уровня, так



Черт. 45.

как на этой окружности

$$f(x, y) = \arcsin(1 - r^2) = \text{const}.$$

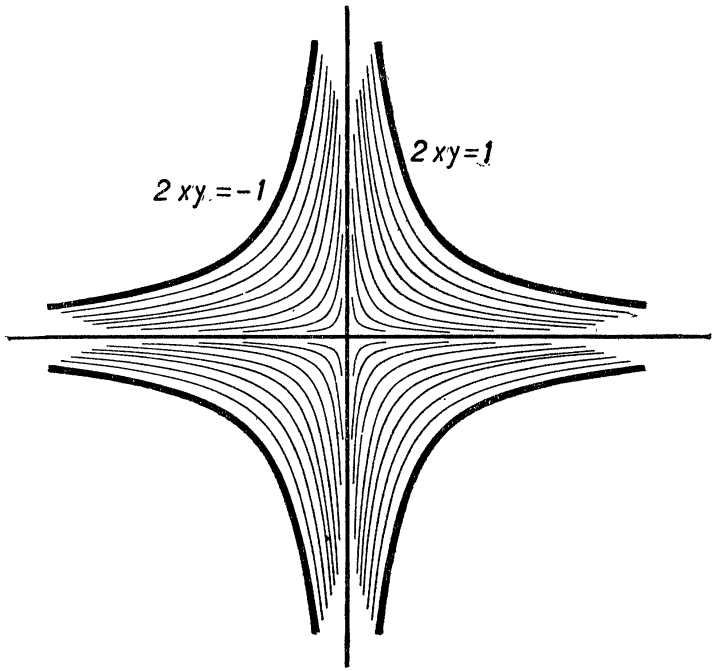
Функция ограничена, ибо

$$|f(x, y)| \leqslant \frac{\pi}{2};$$

множество ее значений есть сегмент $-\frac{\pi}{2} \leqslant z \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Положим $\varphi(x, y) = \arcsin 2xy$, область определения находится из условия $-1 \leqslant 2xy \leqslant 1$. Это есть замкнутая область, ограниченная двумя сопряженными гиперболами $y = \frac{1}{2x}$ и $y = -\frac{1}{2x}$ (черт. 46). Всякая гипербола $xy = c$ (где $|c| \leqslant \frac{1}{2}$) является линией уровня, так как на ней

$$\varphi(x, y) = \arcsin 2c = \text{const};$$



Черт. 46.

Каждая из осей координат также является линией уровня, ибо $\varphi(x, 0) = \varphi(0, y) = 0$. Для суммы

$$F(x, y) = f(x, y) + \varphi(x, y) = \arcsin(1 - x^2 - y^2) + \arcsin 2xy$$

областью определения является обозначенная на чертеже 47 общая часть областей определения слагаемых. Функцию $F(x, y)$ можно представить в виде

сложной функции несколькими способами, например:

a) $F(x, y) = u + v$, где $u = \arcsin(1 - x^2 - y^2)$, $v = \arcsin 2xy$;
b) $F(x, y) = \arcsin(1 - u) + v$, где $u = x^2 + y^2$, $v = \arcsin 2xy$;
c) $F(x, y) = \arcsin(1 - x^2 - u) + \arcsin 2xy$, где $x = x$, $y = y$, $u = y^2$.

4. Дробная функция

$$f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$$

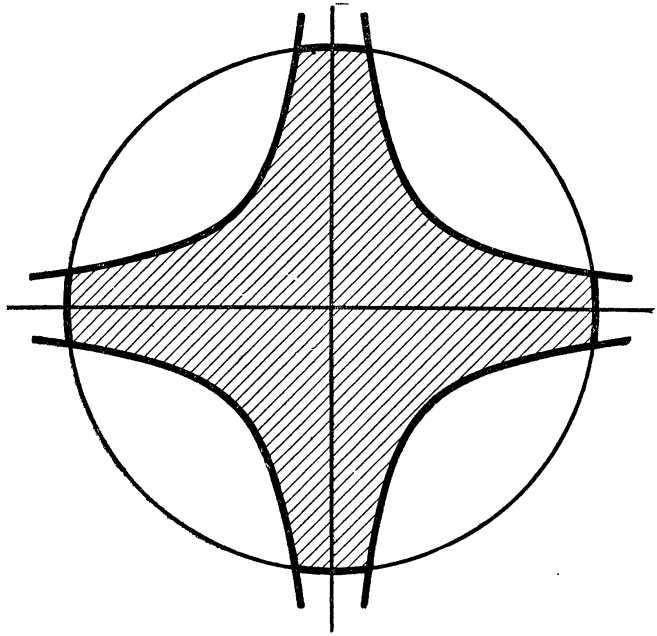
имеет областью определения плоскость с исключенной точкой $O(0, 0)$. Всякий луч $x = t\cos\alpha$, $y = t\sin\alpha$ (где $0 < t$), образующий произвольный угол α с осью абсцисс, является линией уровня, так как на этом луче

$$f(t\cos\alpha, t\sin\alpha) = 2\cos\alpha\sin\alpha = \sin 2\alpha = \text{const};$$

функция $f(x, y)$ ограничена, ибо $|f(x, y)| \leqslant 1$.

5. Дробная рациональная функция

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$$



Черт. 47.

имеет областью определения плоскость с исключенной парой биссектрис $y = \pm x$ координатного угла. Всякий луч

$$x = t\cos\alpha, \quad y = t\sin\alpha \quad \left(\text{где } \alpha \neq \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ и } \pm\frac{3}{4}\pi + 2k\pi\right)$$

есть линия уровня, ибо $f(t\cos\alpha, t\sin\alpha) = \sec 2\alpha$.

Рассмотрим сложную функцию $F(x, y) = \ln u$, где $u = f(x, y)$; имеем:

$$F(x, y) = \ln\frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}.$$

Область определения функции $F(x, y)$ находится из условия $u > 0$, откуда $x^2 - y^2 > 0$ или $|x| > |y|$. Это есть множество точек, лежащих внутри пары вертикальных углов

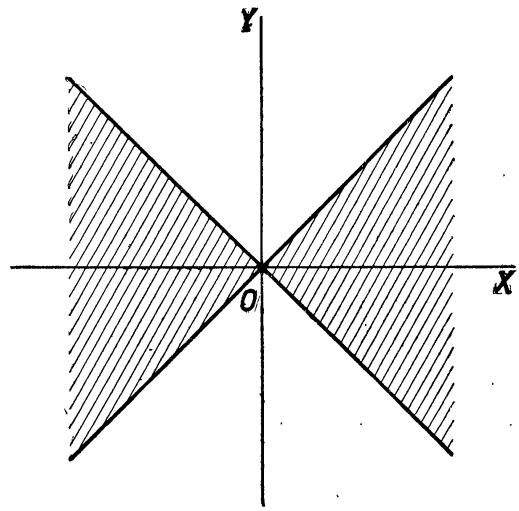
$$\left.\begin{array}{c} -x < y < x \\ x > 0 \end{array}\right\} \quad \text{и} \quad \left.\begin{array}{c} x < y < -x \\ x < 0 \end{array}\right\} \quad \text{(черт. 48).}$$

6. Функция

$$f(x, y) = \ln x + \ln y$$

есть сумма двух слагаемых $u(x, y) = \ln x$ и $v(x, y) = \ln y$. Функция $u(x, y) = \ln x$ постоянна относительно y; область ее определения находится из условия $x > 0$, это есть правая полуплоскость. Аналогично, функция $v(x, y)$ постоянна относительно x; область ее определения есть верхняя полуплоскость $y > 0$. Для суммы $u + v$ областью определения служит общая часть правой и верхней полуплоскостей, т. е. первый квадрант $x > 0$, $y > 0$ (оси координат исключаются). Линии уровня находятся из условия

$$\ln x + \ln y = c.$$



Черт. 48.

Потенцируя, получим ветви гипербол $xy = e^c$.

Рассмотрим функцию $\varphi(x, y) = \ln xy$. Область определения есть первый и третий квадранты (координатные оси исключаются):

$$\left.\begin{array}{c} x > 0 \\ y > 0 \end{array}\right\} \quad \text{и} \quad \left.\begin{array}{c} x < 0 \\ y < 0 \end{array}\right\}.$$

В общей части областей определения функций $f(x, y)$ и $\varphi(x, y)$, т. е. в первом квадранте, имеет место равенство:

$$f(x, y) = \varphi(x, y).$$

Рассмотрим функцию

$$\sqrt{f(x, y)} = \sqrt{\ln x + \ln y}.$$

Область определения находится из условия $f(x, y) = \ln x + \ln y \geqslant 0$, откуда $xy \geqslant 1$, $x > 0$, $y > 0$. Это есть замкнутая область $\frac{1}{x} \leqslant y < +\infty$, $0 < x < +\infty$, состоящая из точек первого квадранта, лежащих выше гиперболы $xy = 1$ и на самой гиперболе. Ветвь гиперболы $xy = 1$ разделяет множество линий уровня на две части: на гиперболах, лежащих выше $xy = 1$, имеем $f(x, y) > 0$, а на гиперболах, лежащих ниже $xy = 1$, имеем $f(x, y) < 0$.

7. Для функции

$$U(x, y, z) = \frac{z}{x^2 + y^2 + 1}$$

областью определения является все пространство $-\infty < x < +\infty$, $-\infty < y < +\infty$, $-\infty < z < +\infty$. Множество точек, на котором функция U постоянна и равна C, определяется из условия $\frac{z}{x^2 + y^2 + 1} = C$, откуда $z = C(x^2 + y^2 + 1)$; мы получили поверхность уровня—эллиптический параболоид.

8. Функция $V(x, y, z) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$ постоянна относительно z. Область определения находится из условия $x^2+y^2 \neq 0$, это есть пространство с исключенной осью OZ. Поверхности уровня суть круговые цилиндры $x^2+y^2 = \dfrac{1}{c}$ (где $c > 0$).

9. Функция, заданная формулой:

$$f(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2+1}\, e^{\ln(x^2+y^2+1)},$$

постоянна во всей плоскости: $f(x, y) = \text{const} = 1$.

10. Система

$$z = \ln u + v^2, \quad u = \sin x + \sin y - 3, \quad v = xy$$

не определяет z как функцию x и y, так как при любых x и y точка (u, v) не принадлежит области определения z как функции u и v.

11. Ниже приводятся примеры применения функционального обозначения для описания свойств функций:

a) $f(x, y) = \dfrac{x+y}{x^2+y^2}$, имеем:

$$f(x, y) = f(y, x)$$

(при перемене местами значений аргументов значение функции не меняется).

b) $\varphi(x, y) = \sin(x-y)$, имеем:

$$\varphi(x, y) = -\varphi(y, x).$$

c) $\Phi(x, y) = \dfrac{x-y}{x+y}$, имеем:

$$\Phi\left(\frac{1}{y}, \frac{1}{x}\right) = \Phi(x, y).$$

d) $F(x, y, \xi, \eta) = (\xi-x)^2 + (\eta-y)^2$, имеем:

$$F(x, y, \xi, \eta) = F(\xi, \eta, x, y) = F(\xi, y, x, \eta);$$
$$F(y, x, \xi, \eta) \neq F(x, y, \xi, \eta);$$
$$F(x, y, x, y) = 0, \quad F(x, x, y, y) = 2(x-y)^2.$$

e) $\psi(x, y, z) = \dfrac{x+y+z}{x+y-z}$, имеем:

$$\psi(x, y, -z) = \frac{1}{\psi(x, y, z)}.$$

§ 11. График функции двух аргументов

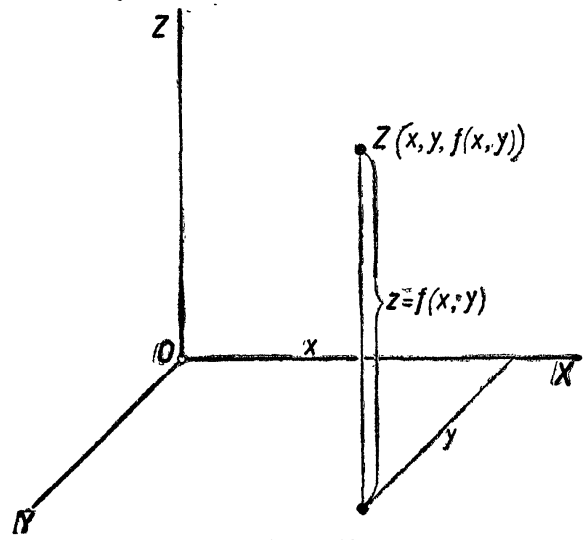
Если точка $X(x, y)$ принадлежит области определения функции $f(x, y)$, то значения аргументов x, y и соответствующее значение функции $f(x, y)$ образуют тройку чисел $(x, y, f(x, y))$. Поставим в соответствие этой тройке чисел точку Z пространства с координатами $(x, y, f(x, y))$. Эту точку будем рассматривать как образ точки $X(x, y)$ (черт. 49).

Определение. *Графиком функции $z = f(x, y)$ называется множество точек пространства, обладающих следующими свойствами:*

1°. *Всякая точка $Z(x, y, z)$ этого множества имеет абсциссу и ординату, являющиеся соответствующими координатами некоторой точки $X(x, y)$ из области определения функции, и аппликату, равную значению функции в точке X.*

2°. *Всякая точка $Z(x, y, z)$ пространства, для которой точка $X(x, y)$ принадлежит области определения функции, а аппликата равна значению функции в точке X, принадлежит графику функции.*

Итак, *график функции есть образ всей области ее определения* (черт. 50).

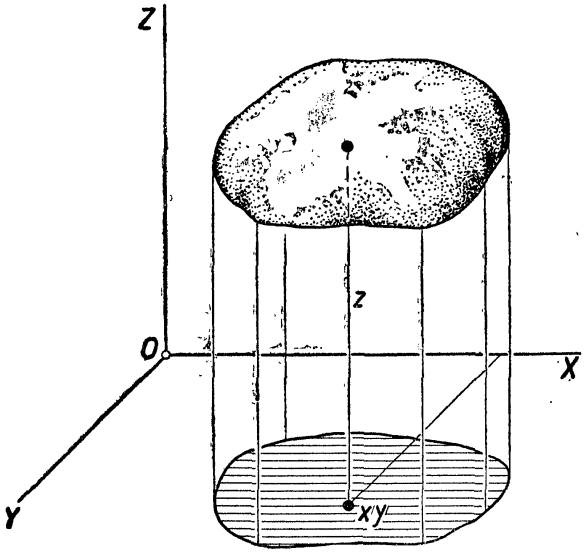


Черт. 49.

Из определения следует, что

1° проекция графика функции $z = f(x, y)$ на плоскость XOY есть область определения $f(x, y)$;

2° всякая прямая, параллельная оси OZ, пересекает график функции не более чем в одной точке.



Черт. 50.

Уяснению вида графика способствует рассмотрение данной функции на прямых, параллельных осям координат. Так, полагая $x = a$, мы получим функцию $z = f(a, y)$ аргумента y. Графиком этой последней функции является пересечение графика данной функции $z = f(x, y)$ плоскостью $x = a$, параллельной координатной плоскости YOZ (черт. 51). Зная сечения графика плоскостями, параллельными плоскостям ZOY и ZOX, можно составить представление (хотя, быть может, и не полное) о графике рассматриваемой функции.

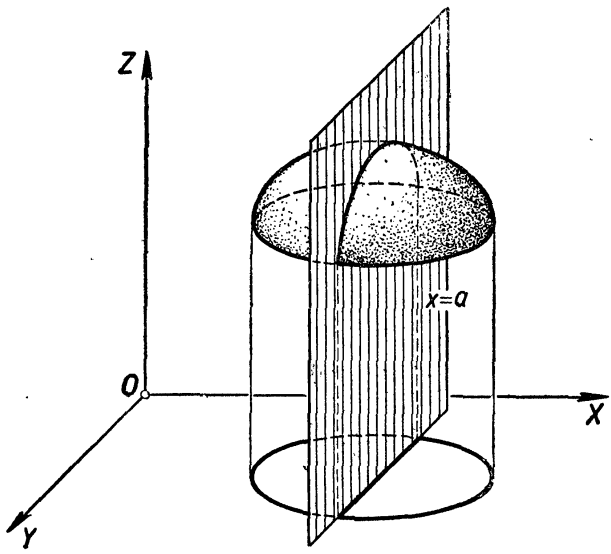
Нередко для получения более полного представления о графике рассматривают данную функцию на прямых $y = kx$ (при различных значениях k); геометрически это означает, что исследуются сечения графика пучком плоскостей, проходящих через ось OZ.

Для установления вида графика обычно пользуются также плоскостями, параллельными плоскости XOY. Полагая $z = C$, мы получим уравнение

$$f(x, y) = C, \tag{1}$$

определяющее множество точек, по которому горизонтальная плоскость $z = C$ пересекает график. В плоскости XOY это есть уравнение проекции рассматриваемого сечения. Во многих практически важных случаях уравнение (1) является уравнением линии (быть может, вырождающейся в одну или несколько точек или распадающейся на несколько линий). Линия, определяемая в плоскости XOY уравнением (1), есть линия уровня, на которой

$$f(x, y) = \text{const} = C.$$



Черт. 51.

Если при всяком значении C (принадлежащем множеству значений функции) уравнение (1) определяет линию*, то всякая горизонтальная плоскость, пересекающая график, пересечет его по некоторой линии, а проекции этих линий образуют на плоскости XOY множество (семейство) линий уровня. Представление о семействе линий уровня, а следовательно, и о горизонтальных сечениях графика, можно получить, придавая C различные (допустимые) численные значения (черт. 52).

Геометрическая интерпретация функции при помощи семейства линий уровня используется при составлении топографических карт; на этих картах линиями соединяются пункты земной поверхности, имеющие одинаковую высоту над уровнем моря, высоты указываются в виде числовых пометок около соответствующих линий.

Для функции $u = f(x, y, z)$ «графиком» является множество точек четырехмерного пространства; с этим графиком мы не будем связывать никаких наглядных представлений.

---

* В общем случае множество точек, определяемое уравнением (1), может и не быть линией. Условия, при которых уравнение (1) действительно определяет линию, будут установлены в главе IV.

Примеры.

1. Как известно из аналитической геометрии,

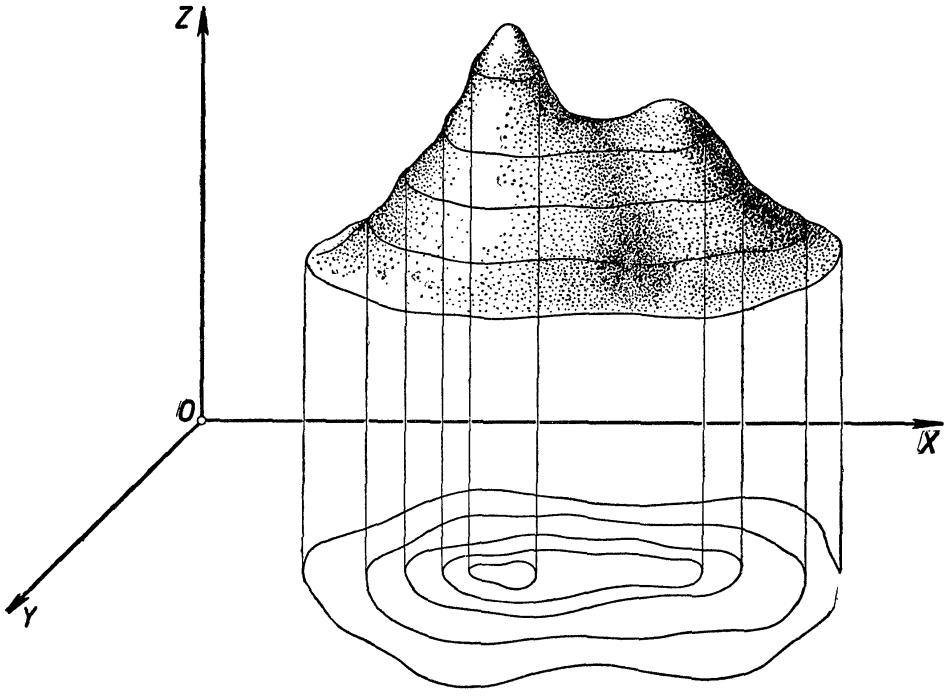
a) графиком линейной функции $z = kx + ly + b$ является плоскость;

b) графиком функции $z = a^2x^2 + b^2y^2$ является эллиптический параболоид;

c) графиком функции $z = a^2x^2 - b^2y^2$ является гиперболический параболоид;

d) графиком функции $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ является верхняя половина ($z \geqslant 0$) сферы радиуса R с центром в начале координат.

2. Положим $z = e^{-(x^2+y^2)}$.



Черт. 52.

Рассматривая z на оси OX, получим (полагая $y = 0$) линию

$$z = e^{-x^2}. \tag{1}$$

Это есть линия пересечения графика с плоскостью XOZ. На прямой $y = b$ имеем:

$$z = \frac{1}{e^{b^2}} e^{-x^2}.$$

Эту линию получим, подвергая линию (1) сжатию к оси OX с коэффициентом $\frac{1}{e^{b^2}}$. Линии уровня суть окружности

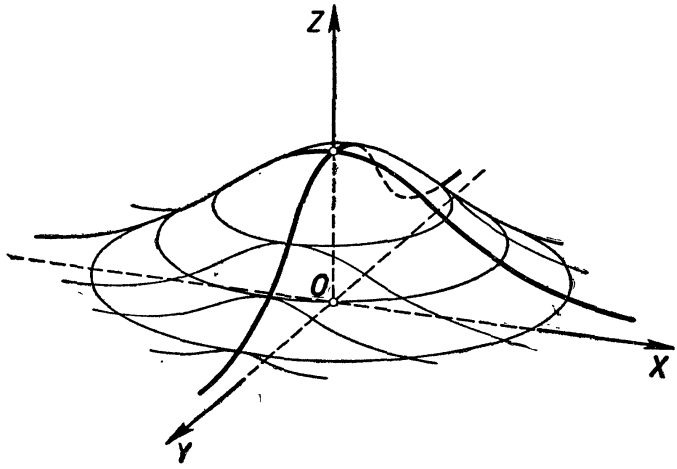
$$e^{-(x^2+y^2)} = C \quad \text{или} \quad x^2 + y^2 = -\ln C$$

(где $0 < C \leqslant 1$, при $C = 1$ — точка). Следовательно, график может быть получен вращением линии (1) вокруг оси OZ (черт. 53).

3. Положим

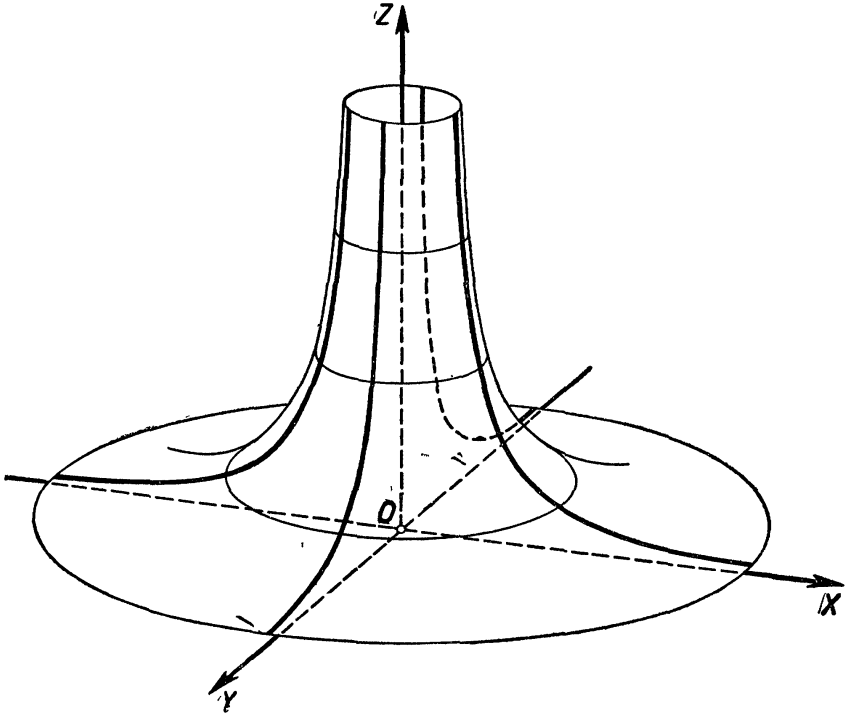
$$z = x^2 - y.$$

На всякой прямой $x = C$ аппликата $z = C^2 - y$ есть линейная функция аргумента y, график которой есть прямая. На прямой $y = C$ аппликата $z = x^2 - C$ есть функция x, график которой есть парабола. Таким образом, сечения гра-



Черт. 53.

фика плоскостями $x = C$ суть параллельные прямые, а плоскостями $y = C$ — равные параболы. График функции есть цилиндрическая поверхность, направляющая которой есть парабола $z = x^2$ в плоскости XOZ, а образующие параллельны прямой $z = -y$, лежащей в плоскости YOZ.



Черт. 54.

4. Положим

$$z = \frac{1}{2x^2 + 3y^2}.$$

Линии уровня $z = C$ суть эллипсы

$$2x^2 + 3y^2 = \frac{1}{C}, \quad \text{где } C > 0.$$

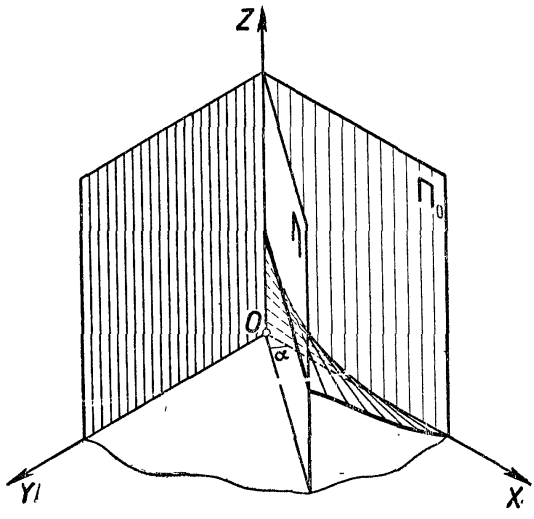
По этим эллипсам горизонтальные плоскости пересекают график (черт. 54).

5. Так как луч

$x = t\cos\alpha, \quad y = t\sin\alpha$

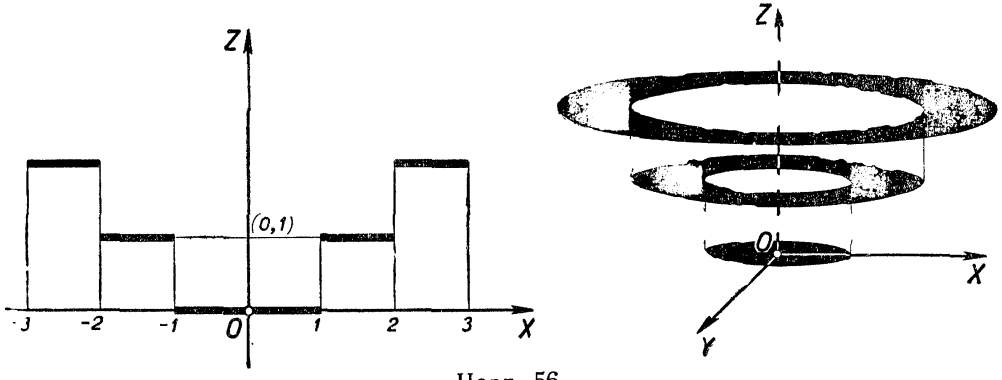
является линией уровня функции $z = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$ и на этом луче $z = \sin 2\alpha$, то всякая полуплоскость П, проходящая через ось OZ и образующая с полуплоскостью Π_0 ($y = 0, x > 0$) двугранный угол α, пересекает график по лучу

$y = x\operatorname{tg}\alpha, \ z = \sin 2\alpha$ (черт. 55).



Черт. 55.

График можно представить в виде поверхности, образованной лучом L, движущимся во вращающейся полуплоскости П, следующим образом: при повороте П на угол α от начального положения Π_0 луч L поднимается на расстояние $\sin 2\alpha$ над (или опускается при $\sin 2\alpha < 0$ под) плоскостью XOY.



Черт. 56.

6. График функции $z = [\sqrt{x^2 + y^2}]$* можно представить себе в виде «амфитеатра» с бесконечным числом «ступенек». На чертеже 56 изображены график и его сечение плоскостью XOZ.

* $[x]$ — целая часть.

§ 12. Предел функции в точке

Понятие предела функции от одного аргумента в данной точке может быть перенесено на функции с любым числом аргументов. В самом деле, общее определение предела основывается на понятии окрестности, а потому применимо к функциям точки пространства E_n, поскольку в этом пространстве определено понятие окрестности точки.

Определение. *Функция точки n-мерного пространства $y = f(X)$ имеет в точке $A(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ предел, равный b, если:*

1° *A есть предельная точка области определения $\mathfrak{M}_X$ функции $f(X)$;*

2° *какова бы ни была окрестность U_b точки b, существует окрестность U_A точки A такая, что значение функции $f(X)$ содержится в U_b, если точка $X \neq A$ содержится в U_A:*

$$f(X) \in U_b, \quad \text{если} \quad X \in U_A \quad \text{и} \quad X \neq A.$$

Для обозначения предела функции в точке A пишут:

$$b = \lim_{X \to A} f(X) \quad \text{или} \quad b = \lim_{\substack{x_1 \to a_1 \\ x_2 \to a_2 \\ \cdots \\ x_n \to a_n}} f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Как и в случае функции одного аргумента, сама точка A исключается из множества, на котором рассматривается данная функция.

Пункт 2° настоящего определения может быть посредством неравенств сформулирован следующим образом:

2′ (в системе сферических окрестностей). *При любом заданном $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что*

$$|f(X) - b| < \varepsilon, \quad \text{если} \quad 0 < \rho(X, A) < \delta,$$

или

$$|f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - b| < \varepsilon, \text{ если}$$
$$0 < \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \ldots + (x_n - a_n)^2} < \delta.$$

2″ (в системе кубических окрестностей). При любом заданном $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что

$$|f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - b| < \varepsilon, \text{ если}$$
$$0 < |x_1 - a_1| < \delta, \ 0 < |x_2 - a_2| < \delta, \ \ldots, \ 0 < |x_n - a_n| < \delta.$$

Определение бесконечного предела, равного $+\infty$ или $-\infty$, также переносится на функции многих аргументов (формулировку определения предоставляем читателю).

Теоремы теории пределов, доказанные на основании свойств I_U, II_U и III_U окрестностей, остаются в силе для функций многих аргументов. *Эти теоремы не нуждаются в специальных доказательствах, поскольку аксиомы окрестностей остаются в силе для окрестностей в пространстве E_n с любым числом измерений.*

Ниже дается перечисление основных теорем, доказанных для функций одного аргумента и распространяющихся на функции многих аргументов.

a) *Теорема о пределе функций на данном множестве, являющемся частью области ее определения*:

если

$$\lim_{X\to A} f(X)=b, \quad \text{то и} \quad \lim_{X\to A} f(X)=b \quad (X\in \mathfrak{M}_1),$$

где $\mathfrak{M}_1$ *есть часть области определения функции, имеющая* A *предельной точкой.*

b) *Теорема о единственности предела.*

c) *Теорема о пределе сложной функции*:

если

$$\lim_{X\to A} u_1(X)=b_1, \quad \lim_{X\to A} u_2(X)=b_2, \ \ldots, \ \lim_{X\to A} u_m(X)=b_m$$

$$\text{и} \quad \lim_{U\to B\ (b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_m)} f(U)=\lim f(u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_m)=L,$$

причем $U\neq B$ *при* $X\neq A$ (в окрестности точки A), *то*

$$\lim_{X\to A} f\big(u_1(X),\ u_2(X),\ \ldots,\ u_m(X)\big)=L.$$

d) *Теоремы о неравенствах.*

e) *Теоремы о конечных и о бесконечных пределах.*

f) *Критерий Коши, дающий необходимое и достаточное условие существования конечного предела,*

g) *Теоремы о действиях над пределами.*

Понятие предела последовательности точек n-мерного пространства вводится посредством следующего определения.

Определение. *Последовательность точек*

$$A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_k,\ \ldots \qquad \{A_k\}$$

называется сходящейся к точке A, *если последовательность расстояний* $\rho(A_k,\ A)$ *сходится к нулю*:

$$\lim \rho(A_k,\ A)=0. \tag{1}$$

Значит, $\rho(A_k,\ A)<\varepsilon$, если $k>N$ (где N определяется заданием ε).

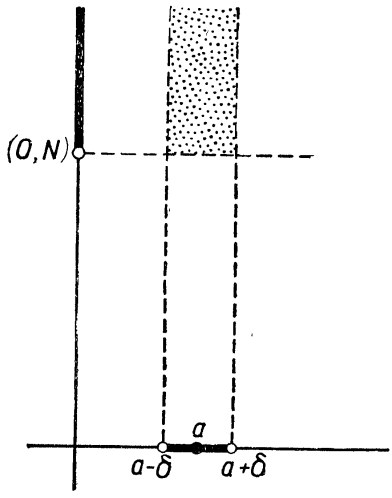
В системе кубических окрестностей условие (1) перепишется так: $|a_k-a|<\varepsilon$, $|b_k-b|<\varepsilon$, $\ldots$, $|l_k-l|<\varepsilon$, если $k>N$, (1′) где $A_k=A_k(a_k,\ b_k,\ \ldots,\ l_k)$ и $A=\lim A_n=A(a,\ b,\ \ldots,\ l)$. Условия (1) и (1′) эквивалентны в силу эквивалентности систем сферических и кубических окрестностей, и, следовательно, $\lim A_n=A$ в том и только в том случае, когда

$$\lim a_k=a, \ \lim b_k=b, \ \ldots, \ \lim l_k=l,$$

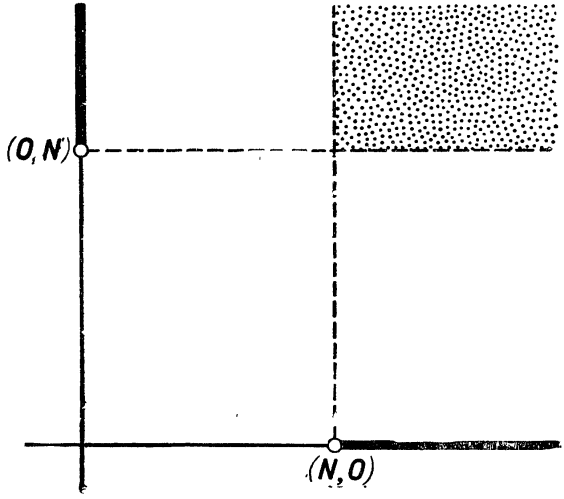
т. е. *для каждой из координат точки* A_k *в отдельности существует предел, равный соответствующей координате точки* A.

Определение предела функции по Гейне, сформулированное для функций одного аргумента, переносится на функции нескольких аргументов, именно: *функция n аргументов $y = f(X)$ имеет в точке A предел, равный b, если при любой последовательности точек $A_1, A_2, \ldots$, сходящейся к A, последовательность соответствующих значений функции $f(A_1), f(A_2), \ldots, f(A_n), \ldots$ сходится к b.*

Эквивалентность определений предела по Коши и Гейне доказывается так же, как и для функции одного аргумента.



Черт. 57.



Черт. 58.

Кроме пределов в «конечных точках», рассматриваются пределы вида

$$\lim_{\substack{x \to a \\ y \to +\infty}} f(x, y), \quad \lim_{\substack{x \to +\infty \\ y \to +\infty}} f(x, y), \quad \lim_{\substack{x \to +\infty \\ y \to -\infty}} f(x, y) \text{ и т. п.}$$

Чтобы применить к этим пределам общее определение, надо установить понятие окрестности для «бесконечных точек» $(a, +\infty)$, $(+\infty, +\infty)$, $(+\infty, -\infty)$ и т. п. В основу определения этих окрестностей положим следующий принцип. Пусть $A(a, b)$ (где a и b — числа, либо символы $\pm\infty$) — данная точка; если окрестность точки a определяется неравенствами $a_1 < x < a_2$, а окрестность точки b — неравенствами $b_1 < y < b_2$, то окрестность точки $A(a, b)$ есть область, определяемая системой неравенств

$$a_1 < x < a_2, \quad b_1 < x < b_2.$$

Так, например, под окрестностью точки $A(a, +\infty)$ подразумевается любая бесконечная «прямоугольная» область

$$a - \delta < x < a + \delta, \quad N < y < +\infty \quad \text{(черт. 57).}$$

Под окрестностью точки $A(+\infty, +\infty)$ подразумевается любая область

$$N < x < +\infty, \quad N < y < +\infty \quad \text{(черт. 58) и т. д.}$$

В соответствии с этим наличие предела (например, конечного) в точке A характеризуется выполнением неравенства

$$|f(x, y) - b| < \varepsilon,$$

если $|x - a| < \delta$, $N < y$ при $A = A(a, +\infty)$,

или

если $N < x$, $N < y$ при $A = A(+\infty, +\infty)$ и т. д.,

где числа δ и N определяются заданием ε.

Иногда рассматривается предел

$$\lim_{\rho(X, O) \to +\infty} f(X) = \lim_{\substack{|x| \to +\infty \\ |y| \to +\infty}} f(x, y);$$

в данном случае под окрестностью «точки», в которой берется предел, следует подразумевать любую область $\rho(X, O) > N$, т. е. внешнюю область относительно окружности с центром в $O(0, 0)$ и с радиусом N.

Примеры.

1. $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$.

Покажем непосредственно, что $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ y \to 1}} f(x, y) = 7$;

имеем:

$$f(x, y) - 7 = (x^2 - 4) + (xy - 2) + (y^2 - 1) =$$
$$= (x - 2)(x + 2) + [(x - 2)y + 2(y - 1)] + (y - 1)(y + 1) =$$
$$= (x - 2)[x + y + 2] + (y - 1)[y + 3].$$

Будем рассматривать функцию $f(x, y)$ в квадратной δ-окрестности точки $A(2, 1)$, тогда $|x - 2| < 1$, $|y - 1| < 1$, откуда $|x| < 3$, $|y| < 2$ и, следовательно, $|x + y + 2| < 7$, $|y + 3| < 5$, а потому

$$|f(x, y) - 7| < 7[|x - 2| + |y - 1|].$$

Пусть δ — наименьшее из чисел $\frac{\varepsilon}{14}$ и 1, тогда в δ-окрестности (квадратной) точки A имеем:

$$|x - 2| + |y - 1| < 2\delta, \quad \text{откуда} \quad |f(x, y) - 7| < \varepsilon.$$

К тому же результату можно прийти, применив непосредственно теоремы о действиях над пределами:

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ y \to 1}} (x^2 + xy + y^2) = \lim x^2 + \lim xy + \lim y^2 = 4 + 2 + 1 = 7.$$

2. На основании теорем о действиях над пределами имеем:

$$\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b \\ z \to c}} \frac{x^2 + y^2 + z^2}{x + y + z - 1} = \frac{\lim x^2 + \lim y^2 + \lim z^2}{\lim x + \lim y + \lim z - 1} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{a + b + c - 1},$$

при условии, что $a + b + c \neq 1$.

3. Докажем, что $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ y \to a}} \left| \frac{1}{x - y} \right| = +\infty$.

В самом деле, положив

$$x-a=\rho\cos\varphi,\quad y-a=\rho\sin\varphi,$$

получим:

$$|x-y|\leqslant|x-a|+|y-a|=\rho(|\cos\varphi|+|\sin\varphi|)<2\rho.$$

В круговой $\frac{1}{2N}$-окрестности точки $A(a, a)$ имеем:

$$\rho<\frac{1}{2N}\quad\text{и}\quad\left|\frac{1}{x-y}\right|>\frac{1}{2\rho}>N.$$

Предел $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to a}}\frac{1}{x-y}$ не существует.

В самом деле,

$$\frac{1}{x-y}\begin{cases}>0 & \text{(в полуплоскости } x>y),\\ <0 & \text{(в полуплоскости } x<y),\end{cases}$$

а потому

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to a}}\frac{1}{x-y}\begin{cases}+\infty & \text{(в полуплоскости } x>y),\\ -\infty & \text{(в полуплоскости } x<y).\end{cases}$$

4. Докажем, что $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ y\to+\infty}}\frac{xy-1}{y+1}=3$. В самом деле, при $y>0$ получим:

$$\left|\frac{xy-1}{y+1}-3\right|=\frac{|(x-3)y-4|}{y+1}<|x-3|+\frac{4}{y}.$$

Если δ меньше, чем 1 и чем $\frac{\varepsilon}{5}$, то при $|x-3|<\delta$ и $y>\frac{1}{\delta}$ получим:

$$\left|\frac{xy-1}{y+1}-3\right|<\delta+4\delta<\varepsilon.$$

5. $f(x, y)=\frac{2xy}{x^2+y^2}$.

Если $A(a, b)\neq O(0, 0)$, то, на основании теорем о действиях над пределами, получим:

$$\lim_{X\to A}f(x, y)=\frac{2ab}{a^2+b^2}.$$

В точке $O(0, 0)$ данная функция не имеет предела. В самом деле, на луче $x=t\cos\alpha$, $y=t\sin\alpha$ функция постоянна, ее значение равно $\sin 2\alpha$, поэтому на данном луче

$$\lim_{X\to O}f(x, y)=\sin 2\alpha.$$

На различных лучах получаются различные значения предела, следовательно, $\lim\limits_{X\to O}f(x, y)$ не существует.

6. $f(x, y)=1$, если $0<y<x^2$, $-\infty<x<+\infty$ и $f(x, y)=0$ во всех остальных точках плоскости (черт. 59). Любой данный луч с концом в точке O вблизи начала координат проходит в части плоскости, в которой $f(x, y)=0$. Поэтому на любом луче OT имеем $\lim\limits_{X\to O}f(x, y)=0$ $(X\in OT)$.

Данная функция, рассматриваемая во всей области определения, не имеет предела в точке O. В самом деле, на любой линии, лежащей между осью OX и параболой $y = x^2$, имеем:

$$\lim_{X \to O} f(x, y) = 1 \neq 0.$$

Аналогичным свойством обладает функция, заданная формулой

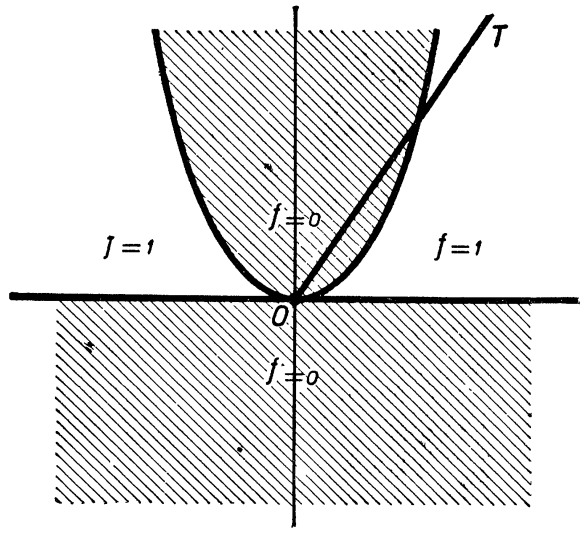
$$f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4}.$$

На любом луче

$$x = t\cos\alpha, \quad y = t\sin\alpha$$

$$\lim_{X \to O} f(x, y) = \lim_{t \to 0} \frac{t\cos\alpha \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha + t^2 \sin^4\alpha} = 0.$$

Но на параболе $x = y^2$ имеем: $f(y^2, y) = \text{const} = \frac{1}{2}$, а потому на этой параболе $\lim_{X \to O} f(x, y) = \frac{1}{2} \neq 0$. Следовательно, данная функция в точке O не имеет предела.



Черт. 59.

§ 13. Непрерывные функции

Определение непрерывности функции одного аргумента в данной точке может быть перенесено на функции нескольких аргументов, именно:

Функция $y = f(X)$ *называется непрерывной в точке* A, *если*

$$\lim_{X \to A} f(X) = f(A).$$

Следовательно, если функция $f(X)$ непрерывна в точке A, то при любом заданном $\varepsilon > 0$ в достаточно малой окрестности U_A точки A выполняется неравенство $|f(X) - f(A)| < \varepsilon$.

Нижеследующие теоремы о непрерывных функциях от одного аргумента переносятся на функции нескольких аргументов:

a) *теоремы о действиях над непрерывными функциями*;

b) *теорема о непрерывности сложной функции*;

c) *теоремы, выражающие локальные свойства непрерывных функций.*

Перечисленные теоремы не нуждаются в специальных доказательствах, так как эти доказательства основываются на теоремах о пределах, справедливых для функций с любым числом аргументов.

Для функций многих аргументов точки разрыва могут обладать разнообразными особенностями, поэтому вопроса о классификации

точек разрыва мы не будем касаться. Множество точек разрыва также может иметь весьма разнообразную структуру. В частности, точки разрыва могут содержать линии (или поверхности), такие линии (поверхности) называются линиями (поверхностями) разрыва.

Понятие точки устранимого разрыва и принцип продолжения по непрерывности применимы к функциям любого числа аргументов.

Понятие функции, непрерывной на данном множестве, применимо к функциям нескольких аргументов. Именно, функция $f(X)$ непрерывна на множестве $\mathfrak{M}_1$, если она непрерывна в каждой точке множества $\mathfrak{M}_1$. При этом данная функция рассматривается на множестве $\mathfrak{M}_1$, и, следовательно, ее значения в точках, не принадлежащих $\mathfrak{M}_1$, не принимаются во внимание.

Если функция непрерывна на множестве $\mathfrak{M}$, то она непрерывна на любой его части, $\mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{M}$ *.

Если функция $f(X)$ непрерывна на линии, заданной уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, то сложная функция $F(t) = f\big(x(t), y(t)\big)$ есть непрерывная функция параметра t.

Если функция $f(x, y)$ непрерывна на множестве точек, имеющих одну и ту же абсциссу $x = a$, то функция $f(a, y)$ аргумента y непрерывна на множестве всех значений y, при которых точка $X(a, y)$ принадлежит области определения $f(x, y)$. В этом случае говорят, что функция $f(x, y)$ непрерывна по аргументу y при значении $x = a$.

Если при всяком данном значении аргумента x (или y) функция $f(x, y)$ непрерывна по аргументу y (или x), то говорят, что функция $f(x, y)$ непрерывна по аргументу y (или x).

Функция, непрерывная по аргументу y (или x), непрерывна на прямых, параллельных оси OY (или OX).

Если функция $f(x, y)$ непрерывна в области D, то она непрерывна на произвольной линии, содержащейся в D. В частности, функция, непрерывная в области, непрерывна по каждому аргументу в отдельности. В самом деле, если точка A содержится в D, то в D содержится и достаточно малый отрезок прямой, проходящей через эту точку и параллельной оси OX (или OY). На этом отрезке функция $f(X)$ непрерывна, следовательно, $f(x, y)$ непрерывна по аргументу x (или y).

Обратное утверждение несправедливо, функция $f(x, y)$ может быть непрерывной по каждому аргументу в отдельности, но не быть непрерывной во всей области определения (см. ниже пример 5).

В общем случае функция любого числа аргументов

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n)$$

* Это утверждение справедливо без всяких оговорок, если считать функцию непрерывной во всякой изолированной (т. е. не являющейся предельной) точке множества, на котором она рассматривается (см. том I, примечание в конце параграфа 39).

называется непрерывной по совокупности аргументов (например, по аргументам $x_1, x_2, \ldots, x_m$), если она непрерывна как функция этих аргументов при всякой данной (допустимой) системе значений других аргументов $(x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n)$.

Примеры.

1. Если функция $f(x, y)$ постоянна относительно аргумента x и задана законом соответствия $f(x, y) = \varphi(y)$ и если функция $\varphi(y)$ непрерывна в точке $y = b$, то функция $f(x, y)$ непрерывна в любой точке $M(a, b)$. В самом деле, в силу непрерывности функции $\varphi(y)$ имеем:

$$|\varphi(y) - \varphi(b)| < \varepsilon, \quad \text{если} \quad |y - b| < \delta,$$

но тогда

$$|f(x, y) - f(x, b)| = |\varphi(y) - \varphi(b)| < \varepsilon, \quad \text{если} \quad |y - b| < \delta,$$

при любом значении x и, в частности, если $|x - a| < \delta$.

Из доказанного вытекает, в частности, непрерывность следующих функций: $f(x, y) = x^n$; $\varphi(x, y) = \sin y$; $F(x, y, z) = e^x$; $\Phi(x, y) = \ln y$ (где $y > 0$).

2. В силу теорем о действиях над непрерывными функциями каждая из нижеследующих функций является непрерывной:

a) $f(x, y) = xy$ (произведение функций, непрерывных во всей плоскости);

b) $\dfrac{1}{x^2 + y^2 + 1}$ (во всей плоскости);

c) $\dfrac{1}{x - y}$ (где $x \neq y$);

d) $\dfrac{x^2 + y^2 + z^2}{x + y + z}$ (где $x + y + z \neq 0$);

e) $\sin x \cos y - \dfrac{\arcsin x}{e^y}$ (в полосе $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $-\infty < y < +\infty$).

3. Функция $z = e^{x+y} \cdot \sqrt{x^2 + y^2} + \cos(x - y)$ непрерывна во всей плоскости, так как она может быть представлена в виде сложной функции

$$z = e^u \sqrt{v} + \cos w,$$

непрерывной от промежуточных аргументов, а промежуточные аргументы $u = x + y$, $v = x^2 + y^2$, $w = x - y$ суть непрерывные функции от аргументов x и y.

Аналогично устанавливается непрерывность каждой из следующих функций в соответствующей области определения:

$$x^y = e^{y \ln x}; \quad \ln(x^2 - y^2) + \operatorname{arc\,tg} \frac{x^2 - 1}{y^2 + 1}; \quad e^{xy(1 - \operatorname{tg} z)} + \frac{x^2 + xy + y^2}{y^2 + yz - z^2}.$$

4. Функция $f(x, y, z) = \dfrac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2}$ непрерывна во всем пространстве, кроме, быть может, точки $O(0, 0, 0)$. Положив $x = \rho \cos \alpha$, $y = \rho \cos \beta$, $\rho \cos \gamma$, где $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ — направляющие косинусы вектора OX, получим:

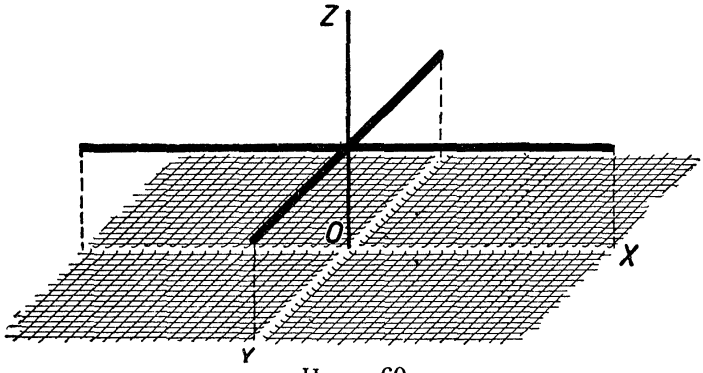
$$\left| \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2} \right| = \rho |\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma| \leqslant \rho.$$

Следовательно, $|f(X)| < \varepsilon$, если $\rho(X, O) < \varepsilon$, а потому

$$\lim_{X \to O} f(X) = 0.$$

В силу принципа продолжения по непрерывности следует положить $f(0, 0, 0) = 0$. Значит, рассматриваемая функция непрерывна во всем пространстве.

5. $f(x, y) = \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}$. Так как $\lim\limits_{X \to O} f(x, y)$ не существует (пример 5, стр 48), то O (0, 0) является точкой неустранимого разрыва. На каждой из осей координат $f(x, y) = \text{const} = 0$; продолжим рассматриваемую функцию, положив $f(0, 0) = 0$, мы получим функцию, непрерывную по каждому аргументу в отдельности. Так, например, при всяком значении $x = a$ функция $f(a, y) = \dfrac{ay}{a^2 + y^2}$ непрерывна, следовательно, $f(x, y)$ непрерывна по аргументу y.



Черт. 60.

Начало координат есть точка неустранимого разрыва, поэтому продолженная функция (если ее рассматривать во всей плоскости) не может быть непрерывной в точке O. Так, например, на луче $y = x$ имеем:

$$\lim_{X \to O} f(x, x) = 1 \neq f(0, 0).$$

6. $f(x, y) = \dfrac{xy^2}{x^2 + y^4}$. На любом луче, проходящем через начало координат, эта функция имеет предел, равный нулю (пример 6, стр. 53). Если продолжить данную функцию, положив $f(0, 0) = 0$, то получим функцию, непрерывную в точке O (0, 0) на любой прямой, проходящей через O (0, 0). Эта функция разрывна в точке O (0, 0), ибо $\lim\limits_{X \to O} f(X)$ не существует.

7.

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & (\text{если } xy \neq 0), \\ 1 & (\text{если } xy = 0). \end{cases}$$

Эта функция постоянна (равна 1) на каждой из осей координат и равна нулю во всех прочих точках плоскости (черт. 60).

Оси координат суть линии разрыва. На каждой из осей данная функция (будучи константой) непрерывна.

8. Для функции $\dfrac{1}{\sin x \sin y}$ прямые $x = k\pi$, $y = l\pi$ (k и l — целые числа) служат линиями разрыва.

9. Докажем, что функция $f(x, y) = \dfrac{\sin xy}{y}$ непрерывна во всей плоскости. В самом деле, точками разрыва могут быть лишь точки $(x, 0)$ оси OX. Но

во всякой точке $(x, 0)$ имеем:

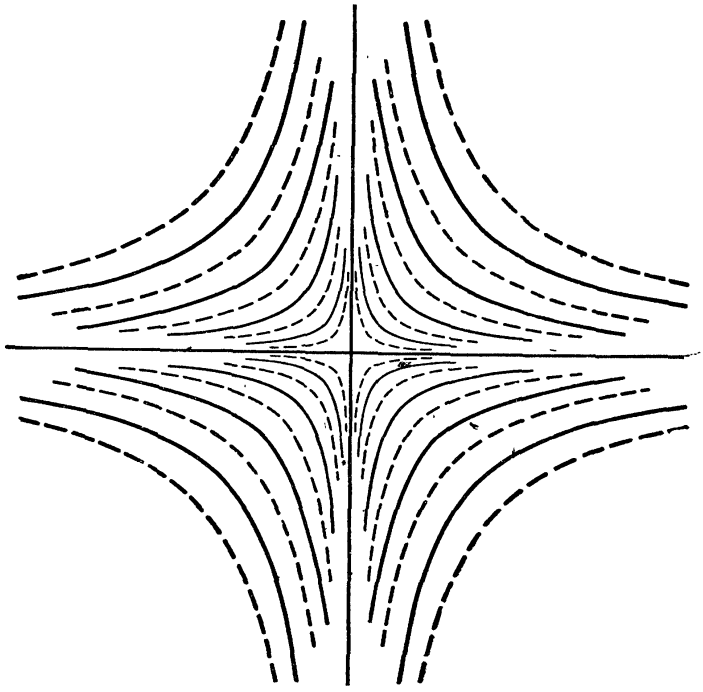
$$\lim_{\substack{X\to x\\ y\to 0}} f(X, y) = \lim \frac{\sin Xy}{y} = \lim X \frac{\sin Xy}{Xy} =$$

$$= \lim_{X\to x} X \lim_{\substack{X\to x\\ y\to 0}} \frac{\sin Xy}{Xy} = x \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = x, \quad \text{если} \quad x \neq 0.$$

В точке $O(0, 0)$ имеем также:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sin xy}{y} = 0 = x, \quad \text{так как} \quad \left|\frac{\sin xy}{y}\right| \leqslant |x|.$$

В силу принципа продолжения по непрерывности следует положить $f(x, 0) = x$; тогда получим функцию, непрерывную во всей плоскости.



Черт. 61.

10. Для функции $u = \dfrac{1}{x^2 + y^2 + z^2 - 1}$ поверхность единичной сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ есть поверхность разрыва.

11. Положим $\chi(X) = 1$, если $X(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ есть рациональная точка, и $\chi(X) = 0$ во всех прочих точках пространства, функция $\chi(X)$ разрывна в любой точке.

На множестве рациональных точек функция $\chi(X)$ непрерывна.

12. Для функции $z = \cos \dfrac{1}{xy}$ оси координат являются линиями неустранимого разрыва. Гиперболы $xy = C$ являются линиями уровня. На гиперболах $xy = \dfrac{1}{2k\pi}$ имеем $f(x, y) = 1$ (на чертеже 61 эти гиперболы показаны сплош-

ными линиями), на гиперболах $xy = \frac{1}{(2k+1)\pi}$ имеем $f(x, y) = -1$ (на чертеже эти гиперболы показаны пунктиром).

13. Функция $z = [\sqrt{x^2+y^2}]$ имеет линиями разрыва окружности $x^2 + y^2 = k^2$, где k — любое натуральное число.

14.

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & (\text{если } x \text{ — иррациональное число}), \\ y & (\text{если } x \text{ — рациональное число}). \end{cases}$$

Функция $f(x, y)$ непрерывна по аргументу y, так как при всяком данном x либо $f(x, y) = \text{const} = 0$, либо $f(x, y) = y$. Функция разрывна во всех точках плоскости, не лежащих на оси абсцисс. В любой точке $(x, 0)$ данная функция непрерывна. В самом деле, $f(x, 0) = 0$; но и $\lim\limits_{\substack{X \to x \\ y \to 0}} f(X, y) = 0$, так как

$$|f(X, y)| \leqslant |y| < \varepsilon$$

при $|y| < \varepsilon$. На оси абсцисс функция непрерывна.

§ 14. Функции, непрерывные в замкнутой области

Основные свойства функций, непрерывных в замкнутой ограниченной области, выражаются следующими теоремами:

I. ***Теорема об ограниченности.*** *Функция, непрерывная в замкнутой ограниченной области, ограничена в этой области.*

II. ***Теорема о наибольшем и наименьшем значениях.*** *Если функция $f(X)$ непрерывна в ограниченной замкнутой области $\overline{D}$, то существует по крайней мере одна точка $\xi \in \overline{D}$, в которой $f(X)$ имеет наибольшее значение, и по крайней мере одна точка $\eta \in \overline{D}$, в которой $f(X)$ имеет наименьшее значение.*

III. ***Теорема о равномерной непрерывности.*** *Если функция $f(X)$ непрерывна в замкнутой ограниченной области $\overline{D}$, то любому заданному числу $\varepsilon > 0$ может быть поставлено в соответствие такое число $\delta > 0$, что неравенство*

$$|f(X') - f(X'')| < \varepsilon$$

имеет место для любой пары точек X' и X'', принадлежащих $\overline{D}$ и удовлетворяющих неравенству

$$\rho(X', X'') < \delta\ *.$$

Сформулированные теоремы не нуждаются в особых доказательствах. В самом деле, доказательства этих теорем для функции, непрерывной на сегменте, были основаны на следующих положениях:

---

* В кубических окрестностях последнее неравенство заменится неравенствами

$$0 < |x_1' - x_1''| < \delta, \quad 0 < |x_2' - x_2''| < \delta, \ldots, \quad 0 < |x_n' - x_n''| < \delta,$$

выполняющимися для соответственных координат точек X' и X''.

1°. *Принцип предельных точек.*

2°. *Всякая точка, предельная для множества точек, лежащих на сегменте, принадлежит данному сегменту* (замкнутость сегмента).

3°. *Локальные свойства непрерывной функции.*

Положения 1° и 2° имеют место для замкнутой ограниченной области в любом пространстве E_n, локальные свойства непрерывных функций также остаются в силе, а потому доказательства теорем I, II и III применительно к функциям многих аргументов воспроизводятся без существенных изменений (том I, § 39).

IV. *Теорема о промежуточном значении.* *Если функция* $f(X)$ 1° *непрерывна в области* G (*открытой или замкнутой — безразлично*), 2° *значения функции* $f(X)$ *в точках* X_1 *и* X_2 *различны, то каково бы ни было число* C, *заключенное между значениями* $f(X_1)$ *и* $f(X_2)$, *существует хотя бы одна такая точка* A; *лежащая внутри* G, *что*

$$f(A)=C.$$

Доказательство. 1°. Пусть X_1 и X_2 — внутренние точки области G. В силу свойства связности области существует простая дуга L с концами в точках X_1 и X_2, содержащаяся внутри G. На этой дуге аргументы функции $f(X)$ суть функции параметра, непрерывные на соответствующем сегменте $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$. Функция $f(X)$, рассматриваемая на L, есть непрерывная функция параметра на сегменте $[\alpha, \beta]$. Следовательно, существует хотя бы одно значение параметра t_C, при котором значение этой функции равно числу C, заключенному между ее значениями в концах сегмента. Соответствующая точка A дуги лежит внутри G, в этой точке $f(A)=C$.

2°. Пусть хотя бы одна из точек X_1 и X_2 является для G граничной точкой. В этом случае не всегда возможно соединить точки X_1 и X_2 простой дугой, лежащей (кроме самих точек X_1 и X_2) внутри G (черт. 62). Предположим для определенности, что X_1 есть граничная точка, а X_2 есть внутренняя точка и что $f(X_1) < f(X_2)$.

Пусть $\varepsilon > 0$ — любое число, взятое при условии

$$f(X_1)+\varepsilon < C.$$

В силу непрерывности функции $f(X)$ существует такая окрестность U_{X_1}, что

$$|f(X)-f(X_1)| < \varepsilon, \quad \text{если} \quad X \in U_{X_1}.$$

Так как X_1 есть граничная точка для G, то окрестность U_{X_1} содержит внутренние точки. Возьмем какую-либо внутреннюю для G точку $X_1' \in U_{X_1}$; тогда

$$f(X_1)-\varepsilon < f(X_1') < f(X_1)+\varepsilon < C.$$

Так как

$$f(X_1') < C < f(X_2),$$

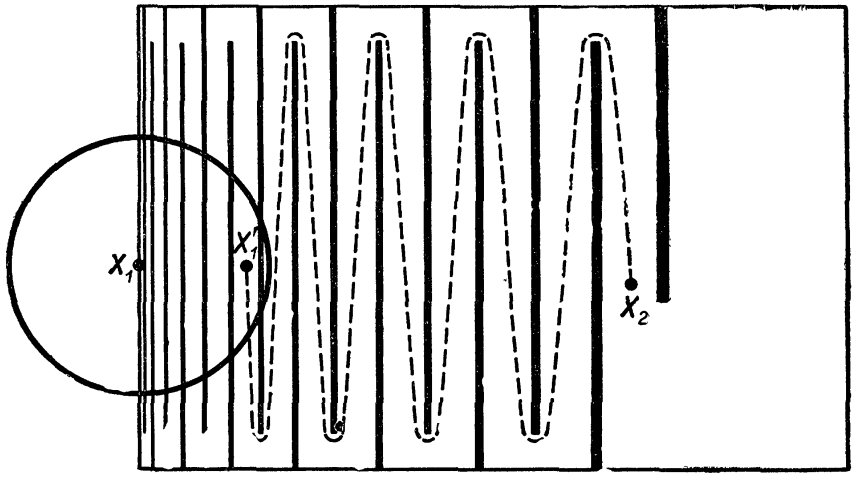
то мы приходим к предыдущему случаю 1°: существует хотя бы одна точка A, в которой

$$f(X_1') < f(A) = C < f(X_2),$$ ч. т. д.

Примечание. Так как две внутренние точки X_1 и X_2 области можно соединить бесконечным множеством простых дуг и на каждой дуге найдется точка A, в которой

$$f(A) = C, \tag{1}$$

то точек $A \in G$, удовлетворяющих условию (I), существует бесконечное множество.



Черт. 62.

Доказательства теорем I, II и III (как и для функций одного аргумента) основываются на свойстве замкнутости ограниченной области, но не опираются на свойство связности области. Следовательно, теоремы I, II и III верны для функций, непрерывных на любом ограниченном замкнутом множестве. Итак, *функция, непрерывная на замкнутом ограниченном множестве,*

1° *ограничена на этом множестве,*

2° *имеет наибольшее и наименьшее значения,*

3° *равномерно непрерывна.*

Теорема IV о промежуточном значении не может быть обобщена на случай функции, непрерывной на любом замкнутом множестве (см., например, том I, § 39), так как при доказательстве используется свойство связности области. Заметим, что в доказательстве не было использовано условие ограниченности области, а потому теорема

о промежуточном значении остается справедливой для функции, непрерывной в неограниченной области.

Пример.

Докажем, что множество точек плоскости, удовлетворяющих неравенству $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}<1$, есть область внутренняя относительно эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Будучи простой замкнутой линией, эллипс служит общей границей двух областей, внутренней и внешней. Неотрицательная функция $f(x, y)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ непрерывна во всей плоскости.

Если в двух точках $X_1(x_1, y_1)$ и $X_2(x_2, y_2)$ имеют место неравенства противоположного смысла, например $f(X_1)<1$ и $f(X_2)>1$, то точки X_1 и X_2 принадлежат разным областям. В самом деле, пусть обе эти точки принадлежат одной и той же, например внутренней, области, тогда существует точка X_0 внутри той же области, в которой (в силу непрерывности) $f(X_0)=1$; но равенство $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$ может иметь место лишь на эллипсе (а не во внутренней области). Следовательно, одна из областей характеризуется неравенством $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}<1$, а другая — неравенством $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}>1$.

Во внутренней (ограниченной) области функция $f(x, y)$ ограничена, а потому внутренняя область характеризуется первым неравенством.

Из теоремы II о наибольшем и наименьшем значениях вытекает следующее свойство замкнутого множества.

Теорема. *Если $\overline{F}$ — замкнутое ограниченное множество и A — точка, не принадлежащая $\overline{F}$, то расстояние от точки A до произвольной точки X множества $\overline{F}$ имеет положительный минимум.*

Итак, теорема утверждает что существует хотя бы одна точка $M\in\overline{F}$, для которой

$$0<\rho(A, M)\leqslant\rho(A, X),$$

где X — любая точка множества F.

Доказательство. Так как точка A не принадлежит $\overline{F}$, то $\rho(A, X)>0$ для любой точки $X\in\overline{F}$. Расстояние

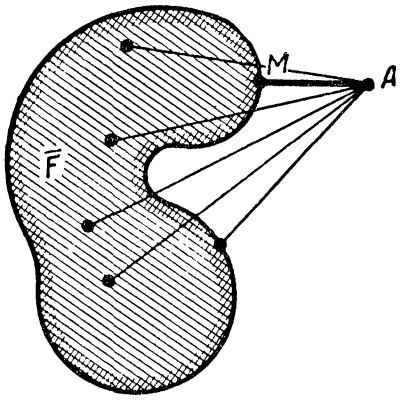
$$\rho(A, X)=\sqrt{(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2+\ \dots\ +(x_n-a_n)^2}$$

есть непрерывная положительная функция точки X, рассматриваемая на замкнутом множестве $\overline{F}$. По теореме II функция $\rho(A, X)$ имеет наименьшее значение хотя бы в одной точке $M\in\overline{F}$ (черт. 63), ч. т. д.

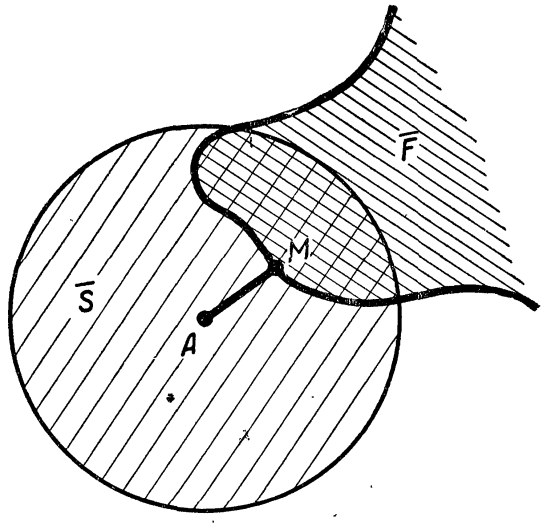
Точка $M\in\overline{F}$ называется ближайшей к A точкой данного множества. Расстояние $\rho(A, M)$ называется расстоянием от точки A до множества $\overline{F}$.

Примечание I. Теорема справедлива и для замкнутого неограниченного множества $\overline{F}$. В самом деле, для точек множества $\overline{F}$, находя-

щихся вне шара $\overline{S}$ с центром в точке A достаточно большого радиуса R, расстояние $\rho(M, X) > R$. Часть множества $\overline{F}$, принадлежащая шару $\overline{S}$, есть замкнутое ограниченное множество; оно содержит точку M (хотя бы одну), ближайшую к A. Так как $\rho(A, M) < R$, то M есть точка множества $\overline{F}$, ближайшая к A (черт. 64).

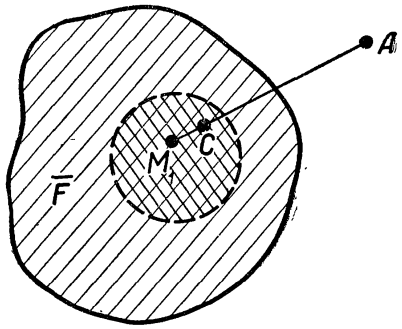


Черт. 63.

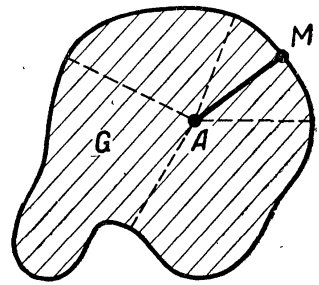


Черт. 64.

Примечание II. Точка множества $\overline{F}$, ближайшая к точке A, является граничной для $\overline{F}$. В самом деле, любая точка M_1, внутренняя для $\overline{F}$, содержится в $\overline{F}$ вместе с некоторой своей окрестностью, но тогда точки отрезка AM_1,



Черт. 65.



Черт. 66.

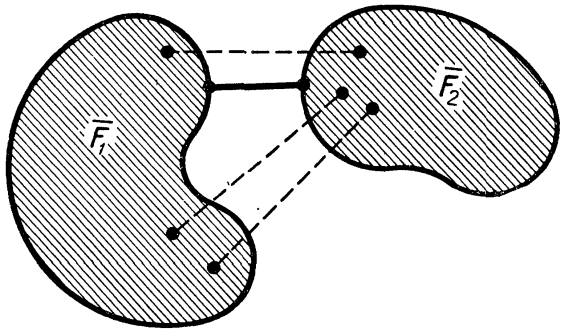
содержащиеся в этой окрестности, находятся от точки A на меньшем расстоянии, чем M_1 (черт. 65):

$$\rho(A, C) = \rho(A, M_1) - \rho(C, M_1) < \rho(A, M_1).$$

Следствие. *Для всякой точки A, лежащей внутри области G, существует ближайшая граничная точка области.* В самом деле, граница области G есть замкнутое множество, точка A (по условию)

не принадлежит этому множеству, а потому существует хотя бы одна точка M границы, ближайшая к точке A (черт. 66).

Теорема. *Если два замкнутые множества $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$ не имеют общих точек, то расстояние $\rho(X, Y)$ от произвольной точки X множества $\overline{F}_1$ до произвольной точки Y множества $\overline{F}_2$ имеет положительный минимум.*



Черт. 67.

Доказательство. Достаточно применить теорему о наименьшем значении к непрерывной функции

$$\rho(X, Y) = \sqrt{\sum (x_i - y_i)^2}$$

от координат точек X и Y. Следовательно, существует хотя бы одна пара точек $X = M \in \overline{F}_1$ и $Y = N \in \overline{F}_2$, для которой расстояние $\rho(M, N)$ имеет наименьшее значение, ч. т. д.

Расстояние $\rho(M, N)$ называется расстоянием между множествами $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$ (черт. 67).

§ 15. Понятие поверхности

Рассмотрим простую замкнутую плоскую область $\overline{D}$, т. е. область, ограниченную некоторой простой замкнутой линией C на плоскости. Предположим, что каждой точке $X \in \overline{D}$ поставлена в соответствие некоторая точка Z пространства, причем выполнены следующие условия:

1°. *Отображение взаимно однозначно.* Если точки — прообразы $X_1 \in \overline{D}$ и $X_2 \in \overline{D}$ — различны: $X_1 \neq X_2$, то и их образы различны: $Z_1 \neq Z_2$, и обратно, если образы различны: $Z_1 \neq Z_2$, то и прообразы различны: $X_1 \neq X_2$ (последнее вытекает из определения отображения).

2°. *Отображение непрерывно.* В любой точке $X_0 \in \overline{D}$

$$\lim_{X \to X_0} \rho(Z, Z_0) = 0,$$

где $X \in \overline{D}$ и $X_0 \in \overline{D}$, а Z и Z_0 — образы точек X и X_0.

В силу свойства 2° расстояние между точками-образами Z и Z_0 будет меньшим любого заданного числа $\varepsilon > 0$ при достаточно малом расстоянии точки X от данной точки X_0.

Определение. *Простым куском поверхности будем называть взаимно однозначный и непрерывный (свойства 1° и 2°) образ в пространстве простой замкнутой плоской области.*

С этим определением хорошо согласуется следующее наглядное представление. Вообразим плоскую пластинку, вырезанную из гибкого растяжимого материала. Будем подвергать эту пластинку всевозможным деформациям (изгибы, сжатие и растяжение, различное в разных частях), не допуская, однако, ни разрывов (условие 2°), ни налегания одной части на другую или «склеивания» (условие 1°). При всякой такой деформации пластинка перейдет в простой кусок поверхности.

Точки простого куска поверхности, являющиеся образами граничных точек области, будем называть краевыми точками куска.

Докажем, что график функции $z=f(x, y)$, непрерывной в простой замкнутой области $\overline{D}$, есть простой кусок поверхности.

В самом деле:

1°. Если $X_1(x_1, y_1) \neq X_2(x_2, y_2)$, то и образы различны:

$$Z_1(x_1, y_1, z_1) \neq Z_2(x_2, y_2, z_2) \quad (\text{где } z_1=f(X_1),\ z_2=f(X_2)).$$

2°. Имеем:

$$\lim_{X\to X_0} z=\lim f(X)=f(X_0)=z_0,$$

а потому

$$\lim_{X\to X_0} \rho(Z, Z_0)=\lim \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}=0.$$

Задание куска поверхности как графика непрерывной функции возможно лишь в том случае, когда всякая прямая, параллельная оси аппликат, пересекает кусок не более чем в одной точке.

Поэтому в общем случае простой кусок поверхности задается при помощи параметрического представления.

Система трех функций

$$x=x(u, v), \quad y=y(u, v), \quad z=z(u, v), \tag{I}$$

непрерывных в простой замкнутой области $\overline{D}$ (в плоскости (u, v)), ставит в соответствие всякой точке $T(u, v)\in\overline{D}$ точку $Z(x, y, z)$. Это отображение непрерывно, так как

$$\lim_{T\to T_0} \rho(Z, Z_0)=\lim \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}=0,$$

в силу непрерывности функций системы (I).

Если всяким двум различным точкам $T_1\in\overline{D}$ и $T_2\in\overline{D}$ соответствуют два различные образа, то отображение является взаимно однозначным. В этом случае образом простой замкнутой области $\overline{D}$ является простой кусок поверхности. Аргументы u и v называются параметрами. Задание куска поверхности в виде графика непрерывной функции можно рассматривать как частный случай параметрического представления, приняв за параметры координаты x и y:

$$x=u, \quad y=v, \quad z=f(u, v).$$

Если простой кусок поверхности является образом простой замкнутой области $\overline{D}$, то всякой простой дуге $L \subset \overline{D}$ в качестве ее образа соответствует простая дуга L', лежащая на куске $\overline{F}$. В самом деле, простая дуга L есть взаимно однозначный и непрерывный образ некоторого сегмента σ, а L' есть образ σ, получающийся последовательным выполнением двух взаимно однозначных и непрерывных отображений (черт. 68). Если кусок $\overline{F}$ задан параметрически

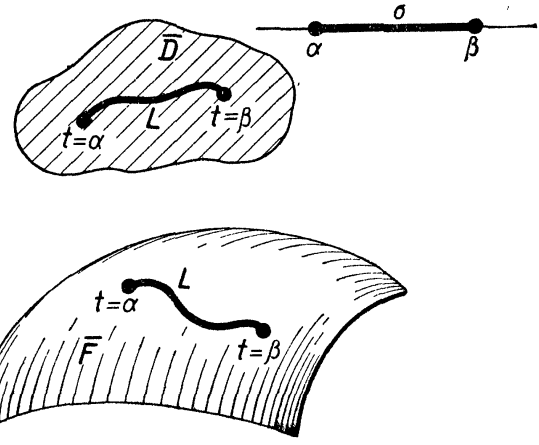
$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v),$$

а дуга $L \subset \overline{D}$ задана уравнениями $u = u(t)$, $v = v(t)$, то соответствующая дуга L' на поверхности $\overline{F}$ представится параметрически уравнениями:

$$x = x(u(t), v(t));$$
$$y = y(u(t), v(t));$$
$$z = z(u(t), v(t)).$$

В частности, линии, заданной уравнением $v = f(u)$, соответствует линия на куске поверхности:

$$x = x(u, f(u)); \quad y = y(u, f(u));$$
$$z = z(u, f(u)).$$



Черт. 68.

Предположим, что каждой точке T некоторой плоской области G (открытой или замкнутой) ставится в соответствие точка Z пространства, причем это отображение удовлетворяет свойству непрерывности 2°. Предположим далее, что область G может быть разбита на конечное или бесконечное число замкнутых областей $\overline{D}_1$, $\overline{D}_2$, ..., $\overline{D}_i$, ..., не имеющих попарно общих внутренних точек (общими могут быть граничные точки), и что каждая из замкнутых областей $\overline{D}_i$ отображается на простой кусок поверхности. Множество всех этих кусков образует поверхность. Заметим, что различные простые куски могут пересекаться, налегать друг на друга, могут примыкать друг к другу вдоль линий и составить замкнутую поверхность. Таким образом, поверхность может быть множеством точек достаточно сложной структуры.

Примеры.

1. Уравнению $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ удовлетворяют две функции, непрерывные в замкнутом круге $x^2 + y^2 \leqslant R^2$:

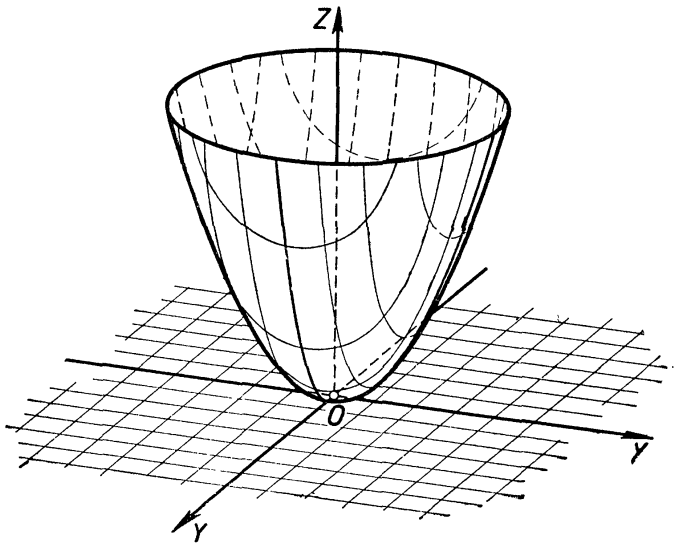
$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \quad \text{и} \quad z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

Первая из этих функций взаимно однозначно и непрерывно отображает круг на простой кусок — верхнюю полусферу. Вторая функция отображает тот же полукруг на нижнюю полусферу. Таким образом, вся сферическая поверхность может быть составлена из двух простых кусков.

2. Поверхность параболоида $z = x^2 + y^2$ может быть составлена из бесконечного множества простых кусков, примыкающих друг к другу вдоль ограничивающих их линий. В самом деле, разобьем всю плоскость на бесконечное множество простых замкнутых областей. Рассмотрим, например, разбиение плоскости прямыми линиями:

$$x = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots; \quad y = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

на единичные квадраты; каждый квадрат отобразится функцией $z = x^2 + y^2$ на простой кусок поверхности, эти куски составят параболоид (черт. 69).



Черт. 69.

3. Рассмотрим поверхность сферы S радиуса R с центром в начале координат. Введем на сфере «географические координаты» долготу φ, отсчитываемую в пределах от $-\pi$ до π от начального меридиана, проходящего через точки

$$N(0, 0, R), \quad A(R, 0, 0) \quad \text{и} \quad S(0, 0, -R),$$

и широту θ, отсчитываемую в пределах от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$ от «экватора» (т. е. от плоскости XOY) (черт. 70). Пусть $M(x, y, z)$ — любая точка сферической поверхности. Спроектировав точку M на плоскость XOY и затем на оси OX и OY из треугольников OMM_{xy}, $OM_{xy}M_x$ и $OM_{xy}M_y$, получим (черт. 70):

$$x = R\cos\varphi\cos\theta, \quad y = R\sin\varphi\cos\theta, \quad z = R\sin\theta.$$

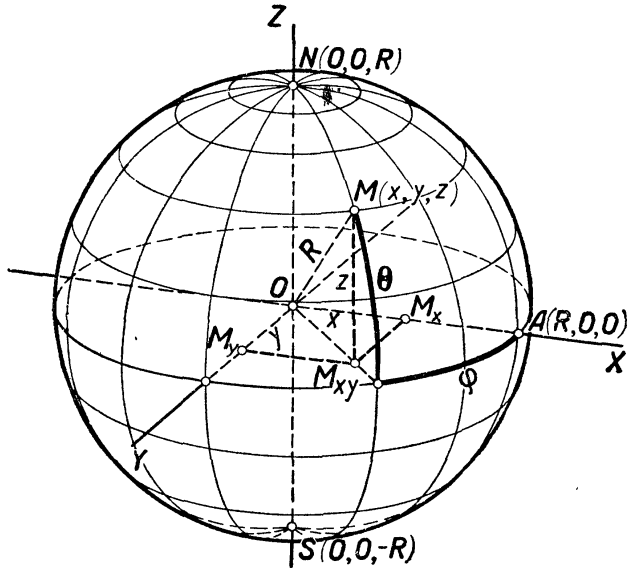
Это суть параметрические уравнения сферической поверхности, где за параметры приняты географические координаты точки на поверхности.

Условия

$$-\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi, \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2} \tag{1}$$

показывают, что сферическая поверхность служит образом прямоугольника (черт. 71). Отрезки вертикальных прямых $\varphi = \varphi_0$ отображаются на меридианы,

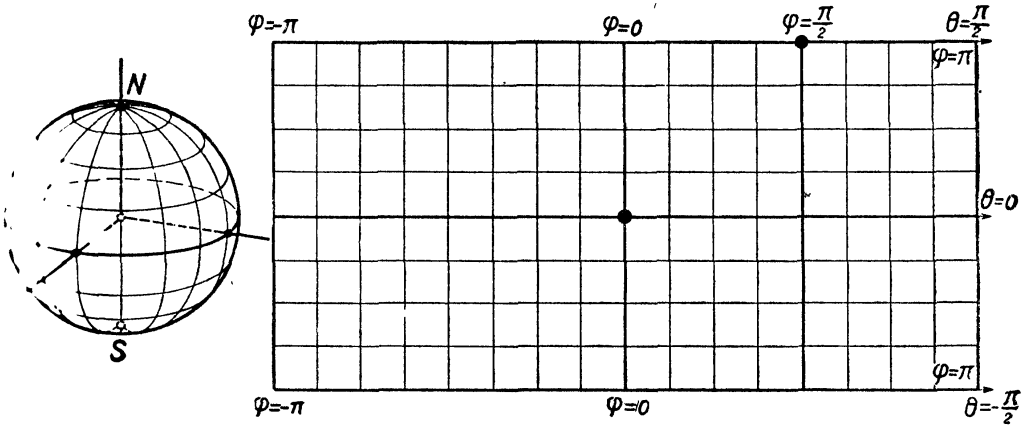
а отрезки горизонтальных прямых $\theta = \theta_0$ отображаются на параллели сферической поверхности. Отображение в целом не является взаимно однозначным, так как каждая из горизонтальных сторон прямоугольника отображается в точку (полюсы), а обе вертикальные стороны отображаются на один и тот же



Черт. 70.

меридиан. Разбиению прямоугольника на квадраты прямыми, параллельными осям $O\varphi$ и $O\theta$ соответствует разбиение сферической поверхности на простые куски при помощи сети параллелей и меридианов.

4. Рассмотрим прямой круговой цилиндр с образующими параллельными оси OZ и с направляющей окружностью $x^2 + y^2 = R^2$. Положение точки

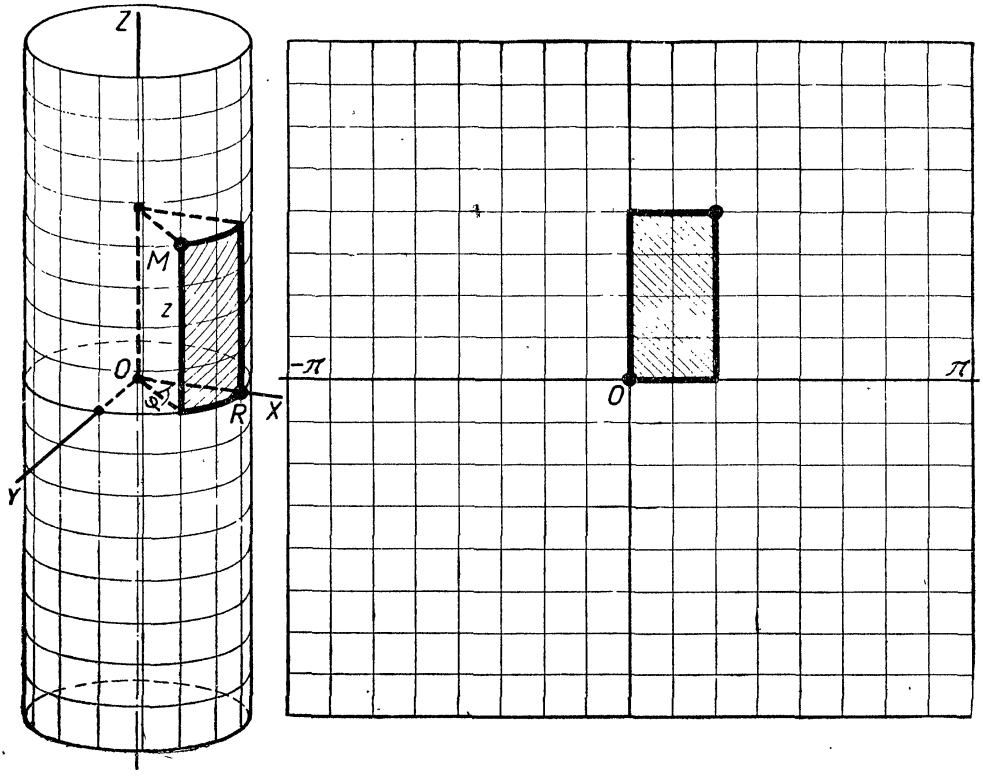


Черт. 71.

$M(x, y, z)$ на цилиндрической поверхности определяется заданием координат $R\cos\varphi$, $y = R\sin\varphi$ ее проекции на плоскость XOY и значением аппликаты z.

Принимая за параметры φ и z, получим уравнения цилиндра

$$x = R\cos\varphi, \quad y = R\sin\varphi, \quad z = z.$$

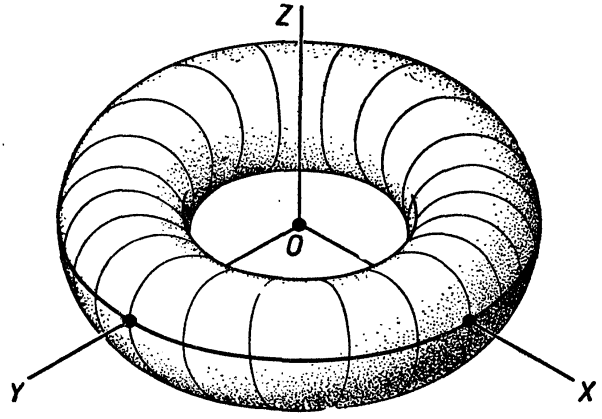


Черт. 72.

Образом полосы

$$-\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi, \quad -\infty < z < +\infty$$

служит весь цилиндр (черт. 72), при этом прямые $\varphi = \pm \pi$, ограничивающие полосу справа и слева, отображаются на одну и ту же образующую.



Черт. 73.

5. В плоскости XOZ дана окружность

$$(x-a)^2 + z^2 = r^2, \tag{1}$$

где $0 < r < a$; поверхность, образованная вращением этой окружности вокруг

оси OZ, есть тор. Окружность (1) может быть представлена уравнениями

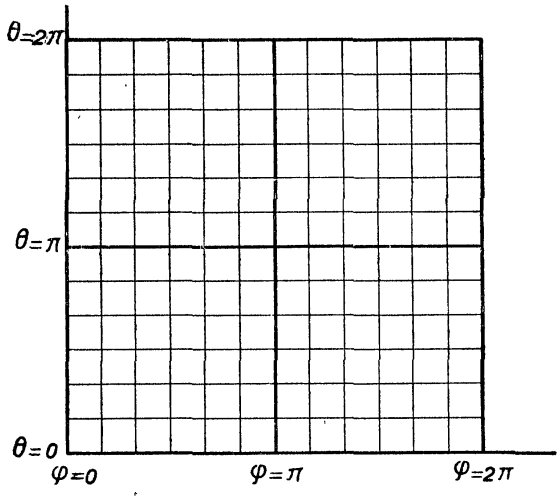
$$x = a + r\cos\varphi, \quad z = r\sin\varphi. \tag{2}$$

При повороте плоскости XOZ вокруг оси OZ на угол θ точка M_0 окружности займет в пространстве положение M. Подсчитав координаты точки M, получим параметрические уравнения тора (черт. 73):

$$x = (a + r\cos\varphi)\cos\theta;$$
$$y = (a + r\cos\varphi)\sin\theta;$$
$$z = r\sin\varphi.$$

При таком параметрическом представлении тор служит образом квадрата:

$$0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi.$$

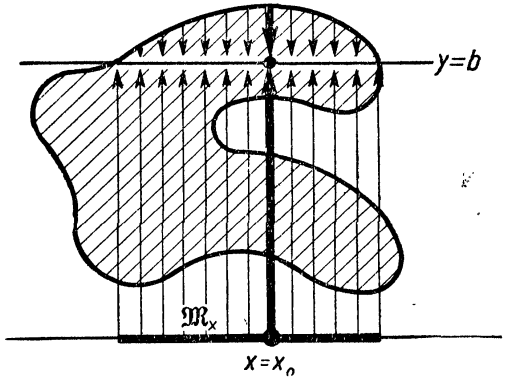


Черт. 74.

Горизонтальные и вертикальные отрезки отображаются в окружности, лежащие (соответственно) в горизонтальных и вертикальных плоскостях (черт. 74). Образы вертикальных и горизонтальных сторон квадрата попарно совпадают. Образование тора можно пояснить при помощи следующей модели: склеив верхнюю и нижнюю стороны квадрата, получим цилиндрическую трубку; согнув трубку и склеив окружности ее оснований, получим тор.

§ 16. Предельная функция

Рассмотрим функцию $f(x, y)$ на множестве точек (содержащихся в области определения), имеющих одну и ту же абсциссу $x = x_0$; мы получим функцию $f(x_0, y)$ одного аргумента y (черт. 75).



Черт. 75.

Определение. Предел $\lim\limits_{y\to b} f(x_0, y)$ *(если он существует) называется пределом функции* $f(x, y)$ *по аргументу* y *в точке* (x_0, b).

Пусть $\mathfrak{M}_x$ — множество всех тех значений x, для которых существует конечный предел $f(x, y)$ по аргументу y в точке (x, b). Каждому значению $x \in \mathfrak{M}_x$ соответствует определенное число $\lim\limits_{y\to b} f(x, y)$; следовательно, этот предел есть функция аргумента x, определенная на множестве $\mathfrak{M}_x$.

Определение. *Функция* $F(x)$, *определенная законом соответствия*

$$F(x) = \lim_{y \to b} f(x, y),$$

называется предельной функцией по аргументу y *в точке* b.

Аналогично определяется предельная функция по аргументу x в точке a:

$$\Phi(y) = \lim_{x \to a} (x, y).$$

Утверждение, что $F(x)$ является предельной функцией по аргументу y в точке b для функции $f(x, y)$, посредством неравенств можно сформулировать следующим образом: *при заданных* $\varepsilon > 0$ *и* $x \in \mathfrak{M}_x$ *существует такая окрестность* U_b *точки* b, *что неравенство*

$$|f(x, y) - F(x)| < \varepsilon$$

выполняется для всякого значения аргумента $y \in U_b$ и $y \neq b$. *Окрестность* U_b *определяется заданием значений* ε и x.

Точка b, которой определяется предельная функция $F(x) = \lim\limits_{y \to b} f(x, y)$, может быть либо действительным числом, либо точкой $+\infty$ (или $-\infty$).

1°. Если b есть действительное число, то окрестность U_b есть интервал $(b - \delta, b + \delta)$. Число $\delta > 0$ определяется заданием значений $\varepsilon > 0$ и $x \in \mathfrak{M}_x$.

2°. Если $b = +\infty$ (или $-\infty$), то окрестность U_b есть интервал $(N, +\infty)$ (или $(-\infty, N)$). Число N определяется заданием значений $\varepsilon > 0$ и $x \in \mathfrak{M}_x$.

Понятие предельной функции применимо, в частности, к последовательности функций

$$f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots . \qquad \{f_n(x)\}$$

Последовательность $\{f_n(x)\}$ *называется сходящейся в точке* x_0, *если существует конечный предел* $\lim f_n(x_0)$ *последовательности* $\{f_n(x_0)\}$ *значений функций* $f_n(x)$ *в точке* x_0. *Последовательность* $\{f_n(x)\}$ *называется сходящейся на множестве* $\mathfrak{M}_x$ *к предельной функции* $F(x)$, *если*

$$F(x) = \lim f_n(x) \text{ (где } x \in \mathfrak{M}_x).$$

Если не существует конечный предел $\lim f_n(x)$, то последовательность называется расходящейся (в данной точке x или на данном множестве $\mathfrak{M}_x$).

Если $\lim f_n(x) = +\infty$ (или $-\infty$), то последовательность называется расходящейся к $+\infty$ (или к $-\infty$).

Для сходящейся последовательности неравенство

$$|f_n(x) - F(x)| < \varepsilon$$

выполняется при всех значениях индекса n, больших числа N, $n > N$, где N определяется заданием ε и x.

Если функция $f(x, y)$ непрерывна в области D, а точка $A(a, b) \in D$, то имеют место равенства:

$$\lim_{y \to b} f(a, y) = f(a, b) \quad \text{и} \quad \lim_{x \to a} f(x, b) = f(a, b); \tag{1}$$

первое равенство (1) выражает непрерывность $f(x, y)$ в точке A по аргументу y, а второе — непрерывность по аргументу x. Отсюда вытекает следующее правило нахождения предельной функции: *если функция $f(x, y)$ непрерывна в области D, то предельная функция $\lim_{y \to b} f(x, y)$ может быть получена непосредственной подстановкой числа b вместо y.*

В самом деле, в любой точке $(x, b) \in D$ имеем:

$$\lim_{y \to b} f(x, y) = f(x, b).$$

Итак, для получения предельной функции $\lim_{y \to b} f(x, y)$ достаточно рассматривать данную непрерывную функцию $f(x, y)$ непосредственно на прямой $y = b$.

При непрерывности функции $f(x, y)$ предельная функция

$$F(x) = \lim_{y \to b} f(x, y)$$

непрерывна при любом допустимом значении x (при котором $(x, b) \in D$).

Геометрическая интерпретация. Уравнение $z = f(x, b)$ изображает линию пересечения поверхности $z = f(x, y)$ плоскостью $y = b$; эта же линия есть график предельной функции

$$F(x) = \lim_{y \to b} f(x, y) = f(x, b).$$

Аналогичное правило и геометрическая интерпретация применимы к предельной функции по аргументу x:

$$\lim_{x \to a} f(x, y) = f(a, y).$$

Примеры.

1. Функция $f(x, y) = xy$ непрерывна во всей плоскости. Имеем $\lim_{y \to b} xy = bx$ в интервале $-\infty < x < +\infty$.

В данном примере $F(x) = bx$.

Так как

$$|f(x, y) - F(x)| = |xy - bx| = |x|\,|y - b|,$$

неравенство $|f(x, y) - F(x)| < \varepsilon$ выполняется, если

$$|x|\,|y - b| < \varepsilon.$$

Откуда при всяком данном $x \neq 0$ находим $|y - b| < \dfrac{\varepsilon}{|x|}$.

Следовательно, радиус окрестности U_b может быть взят равным $\dfrac{\varepsilon}{|x|}$; данном ε он определяется заданием x. Если $x = 0$, то $f(0, y) = \text{const} = F(0)$, и неравенство выполняется при всех значениях y.

Аналогично найдем $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to y}} f(x, y) = ay$.

2. $f(x, y) = \sqrt{x^2+y^2}$; имеем

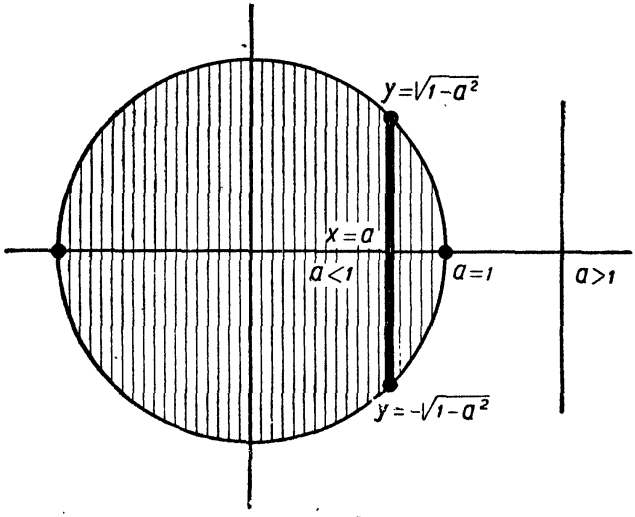
$$F(x) = \lim_{y\to 0} \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{x^2} = |x|$$

в интервале $-\infty < x < +\infty$. Так как

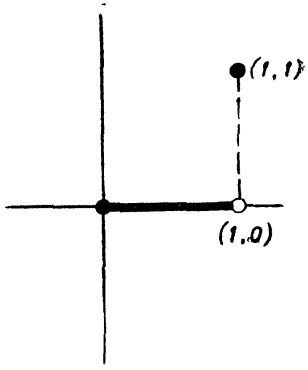
$$|f(x, y) - F(x)| = \left|\sqrt{x^2+y^2} - \sqrt{x^2}\right| = \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2}} =$$

$$= |y| \frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2}} \leqslant |y|,$$

то неравенство $|f(x, y) - F(x)| < \varepsilon$ выполняется, если $|y| < \varepsilon$. В этом примере радиус окрестности U_b может быть взят равным ε при произвольном значении x.



Черт. 76.



Черт. 77.

3. $\varphi(x, y) = \arcsin(x^2+y^2)$.

Область определения функции $\varphi(x, y)$ — единичный круг $x^2+y^2 \leqslant 1$. В силу непрерывности данной функции имеем:

$$\lim_{x\to a} \varphi(x, y) = \arcsin(a^2+y^2) = \Phi(y), \quad \text{где} \quad |a| \leqslant 1.$$

При $|a| > 1$ прямая $x = a$ не имеет общих точек с единичным кругом, а потому предельная функция не имеет смысла. Область определения предельной функции при $|a| < 1$ есть сегмент

$$-\sqrt{1-a^2} \leqslant y \leqslant \sqrt{1-a^2}.$$

При $a = 1$ (или -1) область определения предельной функции состоит из одной точки $y = 0$ (черт. 76).

4. $f(x, y) = x^y$, где $x \geqslant 0$, $y > 0$.

Предел $\lim\limits_{y\to+\infty} x^y$ конечен, если $0 \leqslant x \leqslant 1$. Если же $x > 1$, то этот предел равен $+\infty$. При $0 \leqslant x < 1$ имеем $\lim\limits_{y\to+\infty} x^y = 0$, при $x = 1$ получим $x^y = \text{const} = 1$.

а потому и $\lim\limits_{y\to+\infty} x^y = 1$. Предельная функция по аргументу y в точке $+\infty$ определена на сегменте $0 \leqslant x \leqslant 1$ законом соответствия:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ (если } 0 \leqslant x < 1), \\ 1 \text{ (если } x = 1) \end{cases} \qquad \text{(черт. 77).}$$

Предельная функция по аргументу y в точке $y = 0$ определена на полусегменте $0 \leqslant x < +\infty$ законом соответствия:

$$F_1(y) \triangleq \lim_{y\to 0} x^y = \begin{cases} 0 \text{ (если } x = 0), \\ 1 \text{ (если } 0 < x < +\infty). \end{cases}$$

5. Последовательность функции

$$\frac{\sin x}{1}, \frac{\sin 2x}{2}, \ldots, \frac{\sin nx}{n}, \ldots$$

сходится к нулю $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sin nx}{n} = 0$; неравенство $\left|\frac{\sin nx}{n}\right| < \varepsilon$ имеет место, если $n > \frac{1}{\varepsilon}$, так как

$$\left|\frac{\sin nx}{n}\right| \leqslant \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Здесь окрестность U_b есть интервал $(N, +\infty)$, где можно положить $N = \frac{1}{\varepsilon}$. Найдем для этой последовательности предельную функцию по аргументу x в точке $x = \frac{\pi}{2}$:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin nx}{n} = \frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n},$$

мы получили числовую последовательность

$$1, 0, -\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{5}, 0, -\frac{1}{7}, \ldots$$

6. Для последовательности

$$\cos^2 x, \cos^4 x, \ldots, \cos^{2n} x, \ldots$$

имеем:

$$\lim \cos^{2n} x = \begin{cases} 0 \text{ (если } |\cos x| < 1), \\ 1 \text{ (если } |\cos x| = 1), \end{cases}$$

откуда находим предельную функцию:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ (если } x \neq k\pi), \\ 1 \text{ (если } x = k\pi) \end{cases} \qquad \text{(черт. 78).}$$

7. Последовательность

$$x, x^2, \ldots, x^n, \ldots$$

полуинтервале $(-1, 1]$ сходится к предельной функции:

$$\lim_{n\to+\infty} x^n = \begin{cases} 0 \text{ (если } -1 < x < 1), \\ 1 \text{ (если } x = 1), \end{cases}$$

интервале $(1, +\infty)$ расходится к $+\infty$, так как $\lim\limits_{n\to+\infty} x^n = +\infty$.

В полуинтервале $(-\infty, -1]$ последовательность расходится, так как $\lim x^n$ не существует.

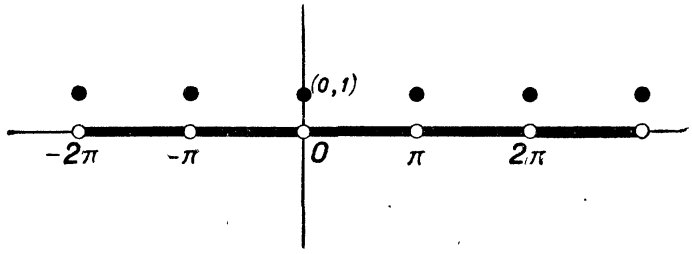
8. Для функции

$$f(x, y) = x \sin \frac{1}{y} + y \sin \frac{1}{x}$$

предельная функция по аргументу y в точке 0 не существует, так как при $x \neq 0$

$$\lim_{y \to 0} y \sin \frac{1}{x} = 0; \quad \text{но} \quad \lim_{y \to 0} x \sin \frac{1}{y} \text{ не существует,}$$

а значение $x = 0$ не является допустимым (ось OY не принадлежит области определения функции).



Черт. 78.

9. Для функции

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 \text{ (если } x \text{ — иррациональное число),} \\ y \text{ (если } x \text{ — рациональное число).} \end{cases}$$

Существует предельная функция по аргументу y:

$$F(x) = \lim_{y \to b} f(x, y) = \begin{cases} 0 \text{ (если } x \text{ — иррациональное число),} \\ b \text{ (если } x \text{ — рациональное число),} \end{cases}$$

в частности, при $b = 1$ получим функцию Дирихле.

Область определения предельной функции по аргументу x состоит из одной точки $y = 0$, ибо

$$\lim_{x \to a} f(x, y) \begin{cases} = 0 \text{ (если } y = 0), \\ \text{не существует, если } y \neq 0. \end{cases}$$

Общее определение предельной функции. Понятие предельной функции применимо к функциям с любым числом аргументов. Перенесение соответствующих определений не представляет принципиальных затруднений.

Пусть $f(Z)$ есть функция любого числа аргументов; будем рассматривать эту функцию при данных значениях некоторой совокупности аргументов. Для удобства примем следующие обозначения:

$$f(Z) = f(x_1, x_2, \ldots, x_k; y_1, y_2, \ldots, y_m) = f(X, Y).$$

Рассматривая $f(Z)$ при данных значениях аргументов $x_1 = a_1$, $x_2 = a_2, \ldots, x_k = a_k$, получим функцию точки $Y(y_1, y_2, \ldots, y_m)$:

$$f(A, Y) = f(a_1, a_2, \ldots, a_k; y_1, y_2, \ldots, y_m).$$

Предел

$$\lim_{Y \to B} f(A;\ Y) = \lim_{\substack{y_1 \to b_1 \\ y_2 \to b_2 \\ \cdots \\ y_m \to b_m}} f(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_k;\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_m)$$

называется пределом функции $f(Z)$ *по аргументам* $y_1, y_2, \ldots, y_m$ *в точке* (A, B).

Функция $F(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \lim\limits_{Y \to B} f(X, Y)$ *называется предельной функцией по аргументам* $y_1, y_2, \ldots, y_m$ *в точке* $B(b_1, b_2, \ldots, b_m)$. *Областью определения предельной функции* $F(X)$ *является множество всех точек* X, *для которых существует конечный предел*

$$\lim_{Y \to B} f(X,\ Y).$$

С помощью неравенств это определение формулируется так: *при заданных* ε *и точке* $X(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ *существует такая окрестность* U_b *точки* $B(b_1, b_2, \ldots, b_n)$, *что неравенство*

$$|f(X,\ Y) - F(X)| < \varepsilon$$

имеет место в любой точке $Y \in U_b$ *и* $Y \neq B$.

В частности, для функции трех аргументов можно рассматривать следующие предельные функции:

$$F_1(y,\ z) = \lim_{x \to a} f(x,\ y,\ z); \qquad F_2(x,\ z) = \lim_{y \to b} f(x,\ y,\ z);$$

$$F_3(x,\ y) = \lim_{z \to c} f(x,\ y,\ z); \qquad F_{12}(z) = \lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x,\ y,\ z);$$

$$F_{13}(y) = \lim_{\substack{x \to a \\ z \to c}} f(x,\ y,\ z); \qquad F_{23} = \lim_{\substack{y \to b \\ z \to c}} f(x,\ y,\ z).$$

Если функция $f(X, Y)$ непрерывна в некоторой области, то для нахождения предельной функции достаточно произвести подстановку значений соответствующих аргументов:

$$F(X) = \lim_{Y \to B} f(X,\ Y) = f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_k;\ b_1, b_2, \ldots,\ b_m).$$

Примеры.

1. Положим $f(x, y, z) = x + e^{yz} + \sin(x + y + z)$; функция непрерывна во всем пространстве, а потому имеем:

$$\lim_{x \to a} f(x,\ y,\ z) = a + e^{yz} + \sin(a + y + z) = F_1(y,\ z);$$

$$\lim_{\substack{y \to b \\ z \to c}} f(x,\ y,\ z) = x + e^{bc} + \sin(x + b + c) = F_{23}(x).$$

Предлагаем читателю найти прочие предельные функции.

2. Рассмотрим последовательность

$$f_n(x, y) = \ln^n(x^2 + y^2).$$

Имеем:

$$F(x, y) = \lim_{n \to +\infty} f_n(x, y) = \begin{cases} 0 \left(\text{если } \dfrac{1}{e} < x^2 + y^2 < e\right), \\ 1 \ (\text{если } x^2 + y^2 = e). \end{cases}$$

Предел (конечный) не существует во всех остальных точках. Следовательно, предельная функция равна нулю внутри кольца $\frac{1}{\sqrt{e}} < \rho(X, O) < \sqrt{e}$ и равна 1 на внешней граничной окружности.

§ 17. Повторные пределы

Определение. *Если существует предельная функция*

$$F(x) = \lim_{y \to b} f(x, y)$$

и если эта функция имеет предел в точке a, то

$$L_{12} = \lim_{x \to a} F(x) = \lim_{x \to a} \left(\lim_{y \to b} f(x, y) \right)$$

называется повторным пределом по аргументам y и x в точке (a, b).

Аналогично определяется другой повторный предел в точке (a, b) по аргументам x и y:

$$L_{21} = \lim_{y \to b} \lim_{x \to a} f(x, y).$$

Таким образом, вычисление повторных пределов (в силу определения) осуществляется последовательным переходом к пределу в определенном порядке по различным аргументам.

Определение повторного предела распространяется на функции с любым числом аргументов. Можно рассматривать предел, полученный последовательным двукратным предельным переходом по одной группе аргументов, а затем по другой. Рассмотрим, например, функцию $f(x_1, x_2, \ldots, x_k; y_1, y_2, \ldots, y_m)$; выполняя последовательно переход к пределу по аргументам $y_1, y_2, \ldots, y_m$ в точке $B(b_1, b_2, \ldots, b_m)$, а затем по аргументам $x_1, x_2, \ldots, x_k$ в точке $A(a_1, a_2, \ldots, a_k)$, получим повторный предел

$$\lim_{X \to A} \lim_{Y \to B} f(X, Y).$$

Можно рассматривать повторные пределы с многократным последовательным предельным переходом по различным аргументам. Разнообразие возможных последовательных переходов к пределу ясно видно даже для функции трех аргументов, для которой можно рас-

сматривать следующие повторные пределы:

$$\lim_{x\to a}\lim_{y\to b}\lim_{z\to c} f(x, y, z); \quad \lim_{x\to a}\lim_{z\to c}\lim_{y\to b} f(x, y, z) \text{ и т. д.}$$

(6 возможных комбинаций);

$$\lim_{x\to a}\lim_{\substack{y\to b\\ z\to c}} f(x, y, z); \quad \lim_{\substack{y\to b\\ z\to c}}\lim_{x\to a} f(x, y, z) \text{ и т. д.}$$

(6 возможных комбинаций).

Рассмотрение предела функции в данной точке и различных повторных пределов той же функции (в той же точке) показывает, что здесь могут представиться различные случаи. Некоторые из этих пределов могут существовать, но быть различными, некоторые пределы могут существовать, а другие не существовать, наконец, некоторые пределы могут существовать, а другие не иметь смысла. Ограничимся рассмотрением функции двух аргументов. Положим:

$$L=\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x, y); \quad L_{12}=\lim_{x\to a}\lim_{y\to b} f(x, y); \quad L_{21}=\lim_{y\to b}\lim_{x\to a} f(x, y).$$

Возможность различных указанных ниже случаев устанавливается построением конкретных примеров.

Случай 1°. Все три предела существуют и равны между собой:

$$L=L_{12}=L_{21}.$$

Пример.

Пусть $f(x, y)$ — любая функция, непрерывная в окрестности точки $A(a, b)$; имеем:

$$L=\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x, y)=f(a, b); \quad L_{12}=\lim_{x\to a}\lim_{y\to b} f(x, y)=$$

$$=\lim_{x\to a} f(x, b)=f(a, b)$$

и

$$L_{21}=\lim_{y\to b}\lim_{x\to a} f(x, y)=\lim_{y\to b} f(a, y)=f(a, b).$$

Случай 2°. L не существует, $L_{12}\neq L_{21}$.

Пример.

$$f(x, y)=\frac{xy-x+y}{xy+x+y};$$

имеем: $\lim\limits_{x\to 0} f(x, y)=1$, где $y\neq 0$, и $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x, y)=\lim\limits_{y\to 0} 1=1$; аналогично найдем $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x, y)=-1$. Предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y)$ не существует; в самом деле, $f(x, y)$ на осях OX и OY в точке O имеет различные пределы (-1 и 1).

Случай 3°. $L=L_{21}$, а L_{12} не существует.

Пример.

$$f(x, y) = x \cos y;$$

предел $\lim\limits_{x \to 0} \lim\limits_{y \to +\infty} f(x, y)$ не существует, ибо не существует $\lim\limits_{y \to +\infty} x \cos y$. Для другого повторного предела получим:

$$\lim_{y \to +\infty} \lim_{x \to 0} x \cos y = \lim_{y \to +\infty} 0 = 0;$$

имеем: $L = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to +\infty}} f(x, y) = 0$, ибо $\lim\limits_{x \to 0} x = 0$, а функция $\cos y$ ограничена.

Случай 4°. L существует, а L_{12} и L_{21} не существуют.

Пример.

$f(x, y) = x \sin \frac{1}{y} + y \sin \frac{1}{x}$; имеем: $|f(x, y)| \leqslant 2\rho$, где $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$; следовательно, $L = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x, y) = 0$.

Так как $\lim\limits_{y \to 0} f(x, y)$ не существует, то не существует L_{12}; аналогичное заключение справедливо относительно L_{21}.

Случай 5°. L не существует, $L_{12} = L_{21}$.

Пример.

$$f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}.$$

В этом случае $\lim f(x, y)$ в точке O (0, 0) не существует. Повторные пределы равны:

$$\lim_{y \to 0} \lim_{x \to 0} f(x, y) = \lim_{y \to 0} \left(\lim_{x \to 0} \frac{2xy}{x^2 + y^2} \right) = \lim_{y \to 0} 0 = 0.$$

И аналогично:

$$\lim_{x \to 0} \lim_{y \to 0} f(x, y) = 0.$$

Случай 6°. L существует, а L_{12} и L_{21} не имеют смысла.

Пример.

Положим $f(x, y) = \text{const} = 1$ в области D, изображенной на чертеже 79. В этом случае

$$\lim_{X \to O} f(X) = 1,$$

но ни один из повторных пределов не имеет смысла.

Случай 7°. $L = L_{21}$, а L_{12} не имеет смысла.

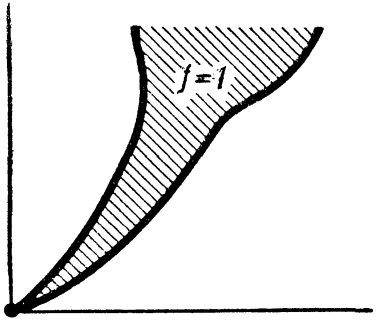
Пример.

Положим $f(x, y)=0$ в области, изображенной на чертеже 80; имеем:

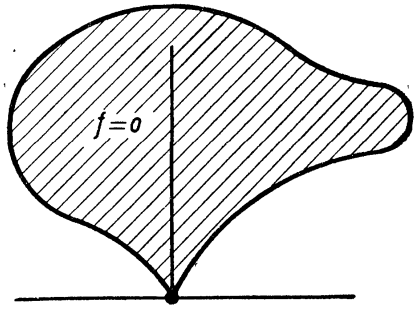
$$\lim_{X\to O} f(X) = \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x, y) = 0.$$

Другой повторный предел L_{12} не имеет смысла.

Нижеследующая теорема устанавливает соотношение между пределом и повторным пределом в предположении, что эти пределы существуют.



Черт. 79.



Черт. 80.

Теорема. *Если существуют предел функции в данной точке и какой-либо из повторных пределов, то эти пределы равны.*

Доказательство проведем для функции двух аргументов. Предположим, например, что существуют

$$L = \lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x, y) \quad \text{и} \quad L_{12} = \lim_{x\to a}\lim_{y\to b} f(x, y),$$

докажем, что $L = L_{12}$.

По условию, в некоторой окрестности точки $A(a, b)$ имеет место неравенство

$$|f(x, y) - L| < \varepsilon,$$

а также существует предельная функция $F(x) = \lim\limits_{y\to b} f(x, y)$, определенная на некотором множестве $\mathfrak{M}_x$, содержащемся в достаточно малой окрестности точки a.

Следовательно (в силу теоремы о неравенстве),

$$\lim_{y\to b} |f(x, y) - L| = |F(x) - L| \leqslant \varepsilon \quad (\text{при любом } x \in \mathfrak{M}_x).$$

Применяя повторную теорему о неравенстве, получим:

$$\lim_{x\to a} |F(x) - L| = |L_{12} - L| \leqslant \varepsilon.$$

При произвольном ε последнее неравенство возможно лишь, если числа L и L_{12} равны: $L = L_{12}$, ч. т. д. (доказательство для случая бесконечных пределов предоставляем читателю).

Следствие I. Если предел и все повторные пределы существуют, то все эти пределы равны: $L = L_{12} = L_{21}$.

Следствие II. Если $L_{12} \neq L_{21}$, то предел функции в данной точке не существует.

Примечание. Из сказанного следует, что отыскание предела функции в точке с помощью повторных переходов к пределу по отдельным аргументам допустимо лишь, когда заранее известно существование предела. Это всегда возможно для функции, непрерывной в области.

Примеры.

1. Функция $f(x, y, z) = \sqrt{x+y+z} + e^{\frac{x}{y}}$ непрерывна в окрестности точки (1, 1,1), а потому

$$\lim_{x\to 1}\lim_{y\to 1}\lim_{z\to 1} f(x, y, z) = f(1, 1, 1) = \sqrt{3} + e.$$

Это же значение имеют и все прочие повторные пределы в данной точке.

2. $f(x, y, z) = (x^2 + y^2)\sin\frac{1}{z}$;

имеем:

$$\lim_{z\to 0}\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y, z) = \lim_{z\to 0} 0 = 0,$$

но $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\lim\limits_{z\to 0} f(x, y, z)$ не существует; $f(0, 0, 0) = 0$, в силу продолжения по непрерывности.

В данном примере функция непрерывна в точке $O(0, 0, 0)$, но не является непрерывной в окрестности этой точки.

3. Рассмотрим предельную функцию $F(x)$, представленную при помощи следующего повторного перехода к пределу:

$$F(x) = \lim_{m\to+\infty}\lim_{n\to+\infty} (\cos m!\pi x)^{2n}.$$

Если x — иррациональное число, то при данном m имеем $|\cos m!\pi x| < 1$, а потому $\lim\limits_{n\to+\infty} (\cos m!\pi x)^{2n} = 0$ и $F(x) = 0$. Если x — рациональное число $x = \frac{p}{q}$, то при данном m, большем q, имеем $|\cos m!\pi x| = 1$, а потому $\lim\limits_{n\to+\infty} (\cos m!\pi x)^{2n} = 1$ и $F(x) = 1$ (то же получится и при $x = 0$). Следовательно, $F(x) = \chi(x)$ есть функция Дирихле.

§ 18. Равномерная сходимость

Определение. *Функция $f(x, y)$ называется равномерно сходящейся на множестве $\mathfrak{M}_x$ в точке b по аргументу y к предельной функции $F(x)$, если при любом заданном $\varepsilon > 0$ существует такая окрестность U_b точки b, что в точках (x, y) области определения функции $f(x, y)$ при $y \in U_b$ $y \neq b$ и при произвольном $x \in \mathfrak{M}_x$ имеет место неравенство:*

$$|f(x, y) - F(x)| < \varepsilon.$$

Для обозначения равномерной сходимости функции $f(x, y)$ по аргументу y к предельной функции $F(x)$ будем писать:

$$f(x, y) \underset{y \to b}{\rightrightarrows} F(x).$$

В этом определении существенным является следующее положение: *при равномерной сходимости окрестность U_b определяется заданием лишь числа ε: эта окрестность (при заданном ε) может быть взята одной и той же для всех значений $x \in \mathfrak{M}_x$.* Следовательно, неравенство $|F(x) - f(x, y)| < \varepsilon$ выполняется при $y \in U_b$, $y \neq b$ каким бы ни было $x \in \mathfrak{M}_x$, если только точка (x, y) принадлежит области определения функции $f(x, y)$.

Если b есть действительное число, то U_b есть интервал $(b - \delta, b + \delta)$ и условие равномерной сходимости формулируется так:

при любом заданном $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что неравенство

$$|f(x, y) - F(x)| < \varepsilon$$

выполняется при $0 < |y - b| < \delta$ и при произвольном значении $x \in \mathfrak{M}_x$ (число δ определяется заданием ε).

Если $b = +\infty$ (или $-\infty$), то условие $|y - b| < \delta$ следует заменить неравенством $y > N$ (или $y < N$).

Для равномерно сходящейся последовательности функций $\{f_n(x)\}$ имеем $b = +\infty$, и определение формулируется так:

при любом заданном $\varepsilon > 0$ существует такое число $N > 0$, что неравенство

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

выполняется при $n > N$ и при произвольном значении $x \in \mathfrak{M}_x$ (число N определяется заданием ε).

Если на множестве $\mathfrak{M}_x$ существует предельная функция

$$\lim_{y \to b} f(x, y) = F(x),$$

но равномерная сходимость не имеет места, то можно указать такое число ε (хотя бы одно), что какой бы ни была взята окрестность U_b, существуют значения $y \in U_b$ $y \neq b$ и $x \in \mathfrak{M}_x$, при которых

$$|f(x, y) - F(x)| \geqslant \varepsilon.$$

В этом случае неравенство $|f(x, y) - F(x)| < \varepsilon$ будет выполняться для каждого данного значения $x \in \mathfrak{M}_x$, если $y \in U_b$, но окрестность U_b для всех значений $x \in \mathfrak{M}_x$ не может быть взята одной и той же, а должна выбираться различной для различных x.

При наличии предельной функции, но при отсутствии равномерной сходимости принято говорить, что имеет место неравномерная сходимость.

Понятие равномерной сходимости является относительным: одна и та же функция в данной точке по данному аргументу на одном множестве может быть, а на другом не быть равномерно сходящейся.

Если $f(x, y) \underset{y \to b}{\rightrightarrows} F(x)$ на множестве $\mathfrak{M}_x$, то равномерная сходимость имеет место на любой части $\mathfrak{M}_x$ множества $\mathfrak{M}_x$ (но не обратно).

Понятие равномерной сходимости функции двух аргументов на данном множестве переносится на функции с любым числом аргументов. Именно, при равномерной сходимости на множестве $\mathfrak{M}_x$ функции

$$f(X, Y) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, y_m)$$

по аргументам $y_1, y_2, \ldots, y_m$ в точке $B(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ к предельной функции $F(X)$ неравенство

$$|f(X, Y) - F(X)| < \varepsilon$$

выполняется, если $Y(y_1, y_2, \ldots, y_m) \in U_B$ для произвольной точки $X \in \mathfrak{M}_x$ (окрестность U_b определяется заданием ε).

Теорема. *Если функция $f(x, y)$ непрерывна в ограниченной замкнутой области $\overline{D}$, то*

$$f(x, y) \underset{y \to b}{\rightrightarrows} f(x, b)$$

на множестве $\mathfrak{M}_x$ точек, для которых $(x, b) \in \overline{D}$ и $\lim\limits_{y \to b} f(x, y)$ имеет смысл.

Доказательство. В силу равномерной непрерывности функции $f(x, y)$ неравенство

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \varepsilon$$

справедливо для любой пары точек $(x_1, y_1) \in \overline{D}$ и $(x_2, y_2) \in \overline{D}$, если

$$|x_1 - x_2| < \delta \quad \text{и} \quad |y_1 - y_2| < \delta.$$

В частности, неравенство

$$|f(x, y) - f(x, b)| < \varepsilon$$

будет справедливо, если $|y - b| < \delta$ (здесь $x_1 = x_2 = x$) при любом значении $x \in \mathfrak{M}_x$, где $(x, y) \in \overline{D}$ и $(x, b) \in \overline{D}$.

Значит,

$$f(x, y) \underset{y \to b}{\rightrightarrows} f(x, b), \quad \text{ч. т. д.}$$

Предельная функция, равная $f(x, b)$, непрерывна на множестве $\mathfrak{M}_x$. Если, в частности, $\overline{D}$ есть прямоугольник

$$a \leqslant x \leqslant b, \quad c \leqslant y \leqslant d,$$

то

$$f(x, y) \underset{y \to y_0}{\rightrightarrows} f(x, y_0)$$

при любом $c \leqslant y_0 \leqslant d$. В этом случае областью определения предельной функции является сегмент $a \leqslant x \leqslant b$.

Примечание. Для открытой области теорема не имеет места, при соблюдении прочих условий сходимость к непрерывной предельной функции может быть неравномерной.

Примеры.

1. Функция xy (см. пример 1, стр. 71) равномерно сходится по аргументу y в любой точке b на любом сегменте $-R \leqslant x \leqslant R$:

$$xy \underset{y \to b}{\rightrightarrows} bx.$$

В самом деле, основное неравенство $|xy - bx| < \varepsilon$ имеет место, если $|y - b| < \frac{\varepsilon}{|x|}$. Если взять радиус окрестности U_b меньшим, чем $\frac{\varepsilon}{R}$, то основное неравенство будет выполняться во всех точках сегмента $-R \leqslant x \leqslant R$. Следовательно, функция по аргументу y равномерно сходится в любом конечном промежутке.

В интервале $-\infty < x < +\infty$ равномерная сходимость не имеет места, так как радиус окрестности U_b, равный $\frac{\varepsilon}{|x|}$ при достаточно больших $|x|$, может быть сделан как угодно малым.

Аналогичные результаты имеют место для предельной функции по аргументу x.

2. Имеем:

$$\sqrt{x^2 + y^2} \underset{y \to 0}{\rightrightarrows} |x| \text{ в интервале } -\infty < x < +\infty \text{ (пример 2, стр. 72),}$$

так как основное неравенство выполняется, если $|y| < \varepsilon$ при произвольном значении $-\infty < x < +\infty$.

3. Имеем (пример 3, стр. 72):

$$\arcsin(x^2 + y^2) \underset{x \to a}{\rightrightarrows} \arcsin(a^2 + y^2), \quad (\text{где } |a| \leqslant 1).$$

В самом деле, функция $\arcsin(x^2 + y^2)$ непрерывна в замкнутом круге $x^2 + y^2 \leqslant 1$.

4. Последовательность $\left\{\frac{\sin nx}{n}\right\}$ (пример 5, стр. 73) равномерно сходится к нулю в интервале $-\infty < x < +\infty$.

В самом деле, неравенство $\left|\frac{\sin nx}{n}\right| < \varepsilon$ имеет место при произвольном значении x, если $n > \frac{1}{\varepsilon}$.

5. Последовательность $\{x^n\}$ в интервале $-1 < x \leqslant 1$ сходится к нулю неравномерно (пример 7, стр. 73). В самом деле, неравенство $|x^n| < \varepsilon$ выполняется, если

$$n \ln|x| < \ln\varepsilon, \quad \text{откуда} \quad n > \frac{\ln\varepsilon}{\ln|x|} = N$$

(заметим, что $\ln|x| < 0$). Так как $\lim\limits_{x \to \pm 1} \ln|x| = 0$, то $\lim\limits_{x \to \pm 1} \frac{\ln\varepsilon}{\ln|x|} = +\infty$ (считаем, что $\varepsilon < 1$), и число N не может быть взято одним и тем же для всего интервала $-1 < x < 1$.

На любом сегменте $[-a, a]$, где $a<1$, последовательность сходится равномерно. В самом деле, при $n>\frac{\ln \varepsilon}{\ln a}$ основное неравенство $|x^n|<\varepsilon$ будет выполняться на всем сегменте $-a \leqslant x \leqslant a$.

Предлагаем читателю показать, что последовательность $\{\ln^n(x^2+y^2)\}$ (пример 2, стр. 68) равномерно сходится в любом кольце $\frac{1}{a} \leqslant x^2+y^2<a$, где $a<\sqrt{e}$.

6. Имеем:

$$\lim_{y \to +\infty} \frac{1}{xy+1} = \begin{cases} 0 & (\text{если } x \neq 0), \\ 1 & (\text{если } x = 0). \end{cases}$$

Сходимость не является равномерной в интервале $-\infty<x<+\infty$.

В самом деле, при $x \neq 0$ неравенство $\left|\frac{1}{xy+1}\right|<\varepsilon$ выполняется, если $|xy+1|>\frac{1}{\varepsilon}$. Будем для определенности считать, что $x>0$, тогда получим:

$$y>\frac{1}{x}\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right)=N;$$

число N при данном ε не может быть выбрано одним и тем же при произвольном значении x, ибо $\lim\limits_{x \to 0} N=+\infty$.

7. Предположим, что существует конечный предел $\lim\limits_{X \to A} f(x, y)=B$, где функция $f(x, y)$ определена в некоторой окрестности точки $A(a, b)$. Введем полярные координаты с полюсом в точке $A(a, b)$, положив:

$$x-a=\rho \cos \varphi, \quad y-b=\rho \sin \varphi.$$

Основное неравенство $|f(x, y)-B|<\varepsilon$ будет выполняться для всех точек некоторой δ-окрестности точки A. Значит, неравенство

$$|f(a+\rho \cos \varphi, \quad b+\rho \sin \varphi)-B|<\varepsilon$$

имеет место, если $\rho<\delta$ при произвольном значении φ. Это значит, что имеет место равномерная сходимость функции $f(a+\rho \cos \varphi, b+\rho \sin \varphi)$ по аргументу ρ в точке $\rho=0$ к предельной функции $\Phi(\varphi)=\text{const}=B$:

$$f(a+\rho \cos \varphi, \quad b+\rho \sin \varphi) \rightrightarrows B, \quad \text{где} \quad -\infty<\varphi<+\infty.$$
$$\rho \to 0$$

Обратно, из последнего условия следует существование предела $f(x, y)$ в точке A, равного B (предоставляем читателю провести соответствующие рассуждения).

Нижеследующая теорема дает достаточное условие непрерывности предельной функции.

Теорема. *Если функция $f(x, y)$:*

1° *на множестве $\mathfrak{M}_x$ непрерывна по аргументу x при*

$$0<|y-b|<\delta;$$

2° *равномерно сходится по аргументу y в точке b:*

$$f(x, y) \rightrightarrows F(x), \qquad (x \in \mathfrak{M}_x),$$
$$y \to b$$

то предельная функция $F(x)$ непрерывна на множестве $\mathfrak{M}_x$.

Доказательство. Составим приращение предельной функции и преобразуем его следующим образом:

$$F(X)-F(x)=[F(X)-f(X,\ y)]+[f(X,\ y)-f(x,\ y)]+$$
$$+[f(x,\ y)-F(x)], \qquad (1)$$

где $X\in\mathfrak{M}_x$ и $x\in\mathfrak{M}_x$ (черт. 81).

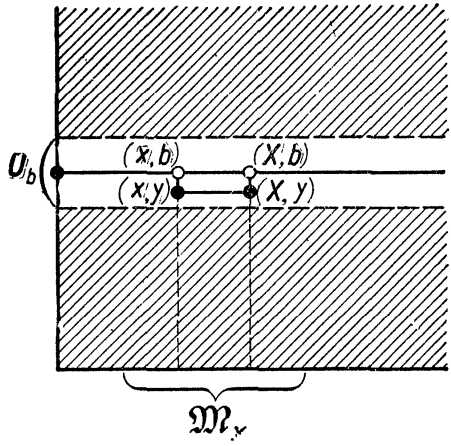
В силу равномерной сходимости (условие 2°) при произвольном значении $x\in\mathfrak{M}_x$ будем иметь $|f(x,\ y)-F(x)|<\frac{\varepsilon}{3}$, если $y\neq b$ содержится в некоторой окрестности U_b. Выберем численное значение $y=y_1$ в окрестности U_b, тогда (в силу равномерной сходимости) неравенства

$$|F(X)-f(X,\ y_1)|<\frac{\varepsilon}{3} \text{ и}$$

$$|f(x,\ y_1)-F(x)|<\frac{\varepsilon}{3} \qquad (2)$$

будут выполняться при произвольных значениях $X\in\mathfrak{M}_x$ и $x\in\mathfrak{M}_x$. Так как функция $f(x,\ y_1)$ (аргумента x при данном y_1) непрерывна на множестве $\mathfrak{M}_x$ (условие 1°), то неравенство

$$|f(X,\ y_1)-f(x,\ y_1)|<\frac{\varepsilon}{3} \qquad (3)$$



Черт. 81.

будет иметь место, если $|X-x|<\delta$, где δ определяется заданием ε.

Из равенства (1) и неравенств (2) и (3) (при $y=y_1$) получим:

$$|F(X)-F(x)|<\varepsilon, \qquad \text{если} \quad |X-x|<\delta.$$

Следовательно, предельная функция $f(x)$ непрерывна в любой точке x множества $\mathfrak{M}_x$, ч. т. д.

Применительно к последовательностям доказанная теорема обычно читается так:

Предельная функция равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций $\{f_n\}$ непрерывна:

если $f_n(x)\rightrightarrows f(x)$, то $f(x)$ непрерывна.

Доказанная теорема не дает необходимого условия непрерывности предельной функции. При неравномерной сходимости предельная функция может быть как непрерывной, так и разрывной (примеры см. ниже).

Следствие. Если функция $f(x,\ y)$ непрерывна по аргументу x, но предельная функция $F(x)=\lim\limits_{y\to b} f(x,\ y)$ разрывна, то имеет место неравномерная сходимость.

Примечание. Если функция $f(x, y)$ непрерывна по аргументу x, то непрерывность предельной функции

$$F(x) = \lim_{y \to b} f(x, y)$$

в данной точке $x = a$ выражает равенство повторных пределов

$$L_{12} = \lim_{x \to a} \lim_{y \to b} f(x, y) \quad \text{и} \quad L_{21} = \lim_{y \to b} \lim_{x \to a} f(x, y)$$

в точке (a, b). В самом деле,

$$\lim_{x \to a} F(x) = \lim_{x \to a} \lim_{y \to b} f(x, y)$$

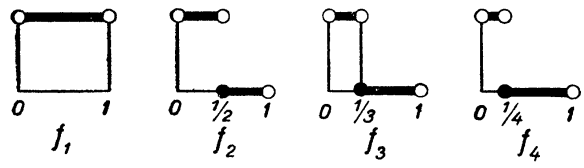
и

$$F(a) = \lim_{y \to b} f(a, y) = \lim_{y \to b} \lim_{x \to a} f(x, y)\ *.$$

Условие непрерывности предельной функции $F(a) = \lim_{x \to a} F(x)$ при непрерывности $f(x, y)$ по аргументу x выполняется тогда и только тогда, когда $L_{12} = L_{21}$. В частности, при равномерной сходимости функции $f(x, y)$, непрерывной по аргументу x, предельная функция непрерывна, а следовательно, имеет место равенство повторных пределов.

Примеры.

1. Обратимся к примерам, рассмотренным на стр. 83. В примере 1 равномерная сходимость имеет место на каждом сегменте, предельная функция bx непрерывна на каждом сегменте.



Черт. 82.

В интервале

$$-\infty < x < +\infty$$

равномерная сходимость не имеет места, предельная функция bx непрерывна в этом интервале. В примерах 2, 3 и 4 имеет место равномерная сходимость и непрерывность предельной функции. В примере 5 (см. также пример 7, стр. 73) последовательность $\{x^n\}$ непрерывных функций сходится неравномерно в полуинтервале $(-1, 1]$ к разрывной функции

$$F(x) = \begin{cases} 0 & (\text{если } -1 < x < 1), \\ 1 & (\text{если } x = 1). \end{cases}$$

В интервале $-1 < x < 1$ предельная функция непрерывна: $F(x) = 0$, но сходимость неравномерная. На любом сегменте $-a \leqslant x \leqslant a$, где $0 < a < 1$, последовательность сходится равномерно, предельная функция непрерывна. Последовательность непрерывных функций $\{\cos^{2n} x\}$ в интервале $-\infty < x < +\infty$ сходится к разрывной функции (пример 6, стр. 73), этого достаточно, чтобы утверждать наличие неравномерной сходимости.

2. Если $f(x, y) \rightrightarrows_{y \to b} F(x)$, но данная функция $f(x, y)$ не является непрерывной по аргументу x, то о непрерывности предельной функции в общем

* В силу непрерывности $f(x, y)$ по аргументу x имеем $f(a, y) = \lim_{x \to a} f(x, y)$.

случае ничего утверждать невозможно. Положим, например, $f(x, y) = y\chi(x)$, где $\chi(x)$ — функция Дирихле (см. пример 9, стр. 74). При любом данном $y \neq 0$ функция $f(x, y)$ разрывна по аргументу x. В любой точке b существует предельная функция по аргументу y:

$$y\chi(x) \underset{y \to b}{\rightrightarrows} b\chi(x).$$

В самом деле,

$$|y\chi(x) - b\chi(x)| = |y - b|\,|\chi(x)| \leqslant |y - b| < \varepsilon$$

при $|y - b| < \varepsilon$ и при произвольном значении x. Следовательно, в интервале $-\infty < x < +\infty$ имеет место равномерная сходимость. Если $b \neq 0$, то предельная функция разрывна, но при $b = 0$ предельная функция, будучи равной нулю, непрерывна.

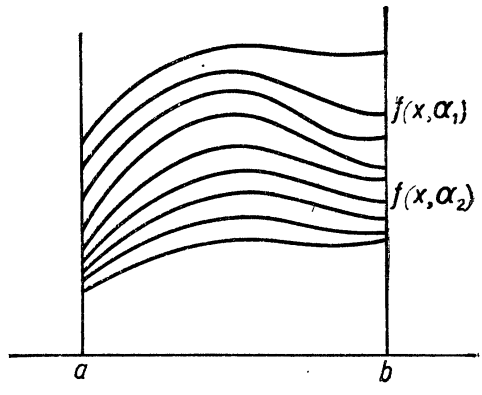
3. Рассмотрим последовательность функций, разрывных в интервале (0,1):

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \left(\text{если } 0 < x < \dfrac{1}{n}\right), \\ 0 & \left(\text{если } \dfrac{1}{n} \leqslant x < 1\right) \end{cases} \quad \text{(черт. 82).}$$

Эта последовательность сходится к нулю: $\lim f_n(x) = 0$, так как неравенство $|f_n(x)| < \varepsilon$ при $\varepsilon < 1$ имеет место, если $\dfrac{1}{n} < x$, т. е. $n > \dfrac{1}{x} = N$. Сходимость неравномерная, предельная функция непрерывна в интервале (0, 1).

§ 19. Геометрическая интерпретация равномерной сходимости

Ограничимся случаем функции двух аргументов $y = f(x, \alpha)$*, непрерывной по аргументу x в промежутке $< a, b >$ при значениях α, принадлежащих некоторому множеству $\mathfrak{M}_\alpha$. При этих условиях каждому численному значению $\alpha \in \mathfrak{M}_\alpha$ соответствует определенная функция $y = f(x, \alpha)$, непрерывная в промежутке $< a, b >$. Это соответствие можно толковать как отображение, в котором прообразами являются числа — значения α, а образами — функции $f(x, \alpha)$.



Черт. 83.

Множество всех функций $f(x, \alpha)$ при всевозможных значениях $\alpha \in \mathfrak{M}_\alpha$ будем называть семейством функции, а α — параметром семейства.

В геометрической интерпретации каждому значению α соответствует на плоскости линия — график функции $y = f(x, \alpha)$, а множеству $\mathfrak{M}_\alpha$ — множество (семейство) линий (черт. 83).

В частности, последовательность функций (линий)

$$f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_n(x),\ \ldots,$$

* Второй аргумент для удобства обозначим вместо y буквой α; аргументам x и α будет дано различное толкование.

непрерывных в данном промежутке, есть семейство функций (линий), где множество $\mathfrak{M}_\alpha$ есть натуральный ряд чисел $\alpha = 1, 2, \ldots, n, \ldots$

Определение. *ε-окрестностью функции $y = f(x)$, непрерывной в промежутке $< a, b >$, называется множество всех непрерывных в $< a, b >$ функций $\varphi(x)$, удовлетворяющих неравенству*

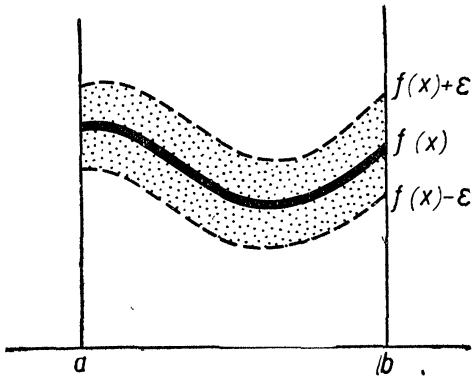
$$|\varphi(x) - f(x)| < \varepsilon$$

при произвольном значении x в промежутке $< a, b >$.

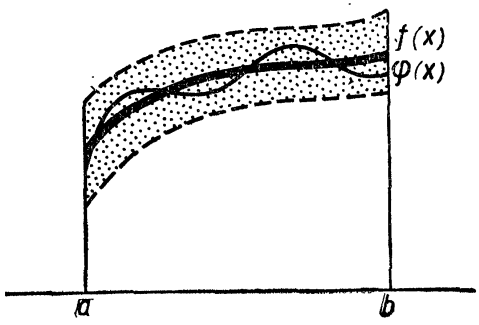
Множество точек (x, y) плоскости, удовлетворяющих неравенствам

$$f(x) - \varepsilon < y < f(x) + \varepsilon; \quad x \in < a, b >,$$

будем называть ε-полосой, окружающей линию $y = f(x)$ (черт. 84). Если функция $\varphi(x)$ принадлежит ε-окрестности функции $f(x)$, то (по



Черт. 84.



Черт. 85.

определению) при всех значениях x в данном промежутке

$$f(x) - \varepsilon < \varphi(x) < f(x) + \varepsilon;$$

следовательно, линия $y = \varphi(x)$ содержится в ε-полосе, окружающей линию $y = f(x)$ (черт. 85).

Предположим, что функция $f(x, \alpha)$ в промежутке $< a, b >$ равномерно сходится в точке α_0 к предельной функции $F(x)$:

$$f(x, \alpha) \underset{\alpha \to \alpha_0}{\rightrightarrows} F(x).$$

Будем говорить, что данное семейство функций (линий) в точке α_0 равномерно сходится к предельной функции (линии) $y = F(x)$. При условии равномерной сходимости предельная функция является непрерывной в промежутке $< a, b >$. В силу определения равномерной сходимости неравенство

$$|f(x, \alpha) - F(x)| < \varepsilon$$

будет выполняться, если $\alpha \in U_{\alpha_0}$ (где U_{α_0} — окрестность, определяемая заданием ε) при произвольном значении $x \in < a, b >$. Следовательно,

при $\alpha \in U_{\alpha_0}$ функция $f(x, \alpha)$ содержится в ε-окрестности предельной функции $F(x)$ (где $\alpha \neq \alpha_0$).

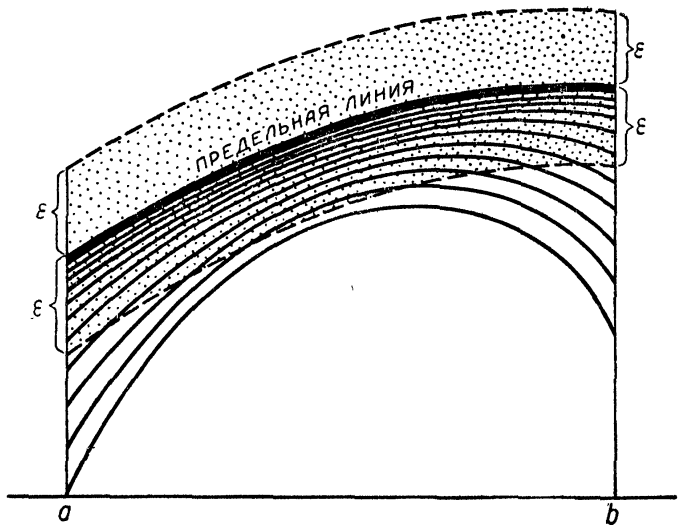
Определение равномерной сходимости можно сформулировать так: *равномерная сходимость*

$$f(x, \alpha) \underset{\alpha \to \alpha_0}{\rightrightarrows} F(x)$$

к предельной функции $F(x)$ *имеет место (по определению), если при любой заданной* ε*-окрестности* U_F *предельной функции* $F(x)$ существует такая окрестность U_{α_0}, что

$$f(x, \alpha) \in U_F, \quad \text{если} \quad \alpha \in U_{\alpha_0} \text{ и } \alpha \neq \alpha_0.$$

Геометрическая интерпретация: при равномерной сходимости семейства линии, *какой бы узкой ни была задана* ε*-по-*



Черт. 86.

лоса, окружающая предельную линию, линии семейства $y = f(x, \alpha)$ *содержатся в этой полосе при всех значениях параметра* α *из окрестности* U_{α_0} (черт. 86) неравных α_0.

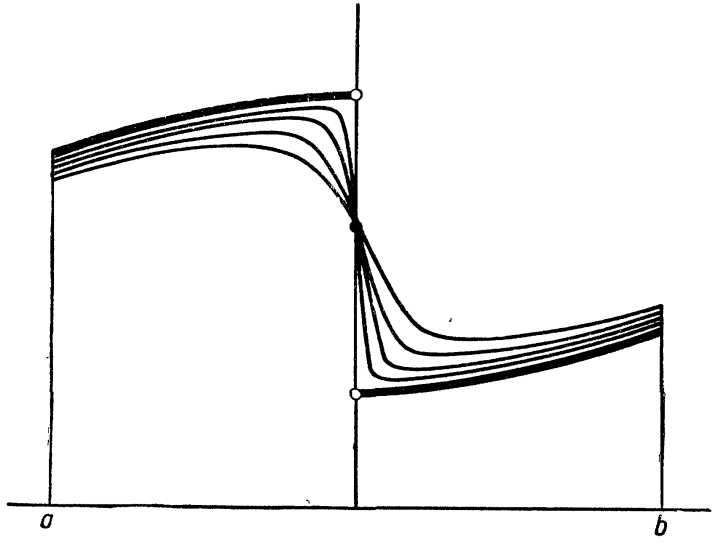
Если в точке α_0

$$\lim_{\alpha \to \alpha_0} f(x, \alpha) = F(x),$$

то при неравномерной сходимости предельная функция $F(x)$ может быть разрывной; на чертеже 87 пояснен один из возможных простейших случаев разрывной предельной функции.

Если при неравномерной сходимости семейства функций $f(x, \alpha)$ в точке α_0 предельная функция непрерывна, то существуют такие ε-полосы, окружающие предельную линию $y = F(x)$, что в любой окрестности U_{α_0} содержатся значения параметра α, для которых линия семейства $y = f(x, \alpha)$ хотя бы частично расположена

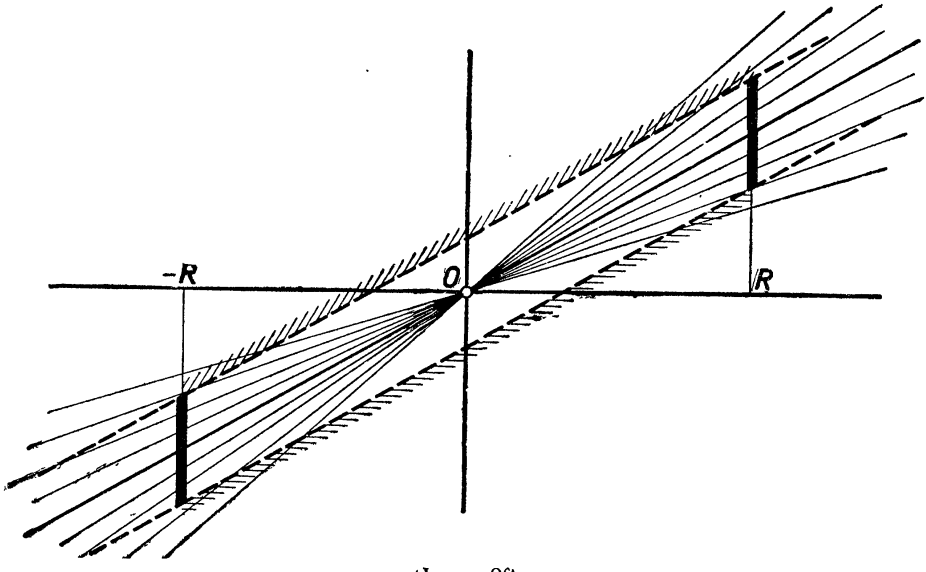
вне полосы. Однако при любом данном значении x точки $(x, f(x, \alpha))$ линий семейства будут содержаться в ε-полосе для всех значений $\alpha \in U_{\alpha_0}$ и $\alpha \neq \alpha_0$, но для различных значений x (при данном ε) окрестность U_{α_0}, вообще говоря, должна выбираться различной.



Черт. 87.

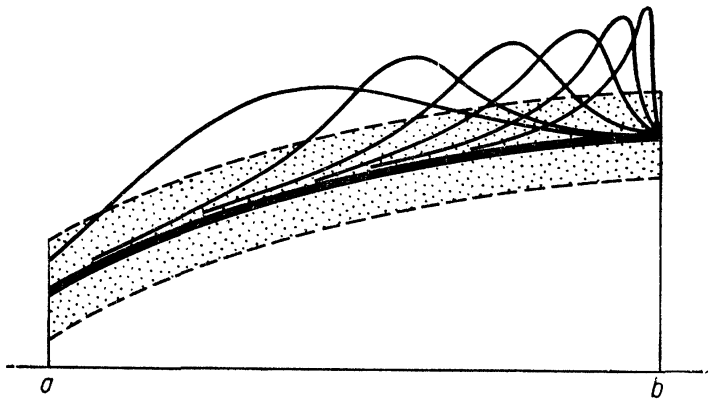
На чертеже 88 пояснена сходимость семейства (пучка) прямых линий $y = \alpha x$ в точке $\alpha = b$ (см. пример 1, стр. 83):

$$\lim_{\alpha \to b} \alpha x = bx.$$



Черт 88.

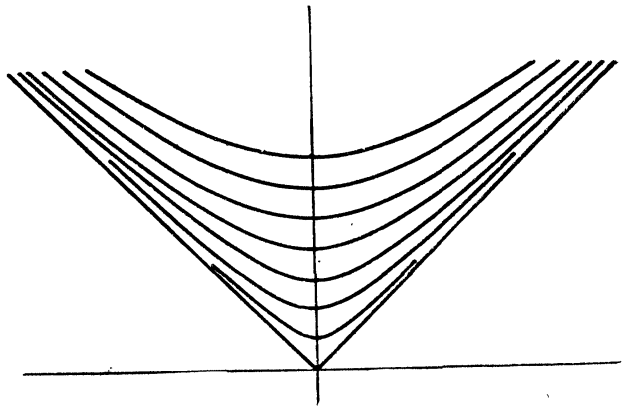
Какую бы ε-полосу, окружающую предельную прямую $y = bx$, мы ни взяли, ни одна из прямых пучка полностью не содержится в этой полосе. Сходимость не является равномерной. На любом сегменте $-R \leqslant x \leqslant R$ сходимость равномерная, так как при достаточно



Черт. 89.

малом $|x - b|$ все отрезки прямых пучка содержатся в «урезанной» ε-полосе, окружающей предельную линию.

Один из простейших возможных случаев неравномерной сходимости семейства непрерывных функций к непрерывной функции на сегменте показан на чертеже 89. На этом чертеже представлена последовательность $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ линий, каждая из которых имеет «гребень». При переходе от меньших значений n к большим высота гребня не уменьшается, а сам гребень «сжимается» и «смещается» вправо, к концу сегмента b. При любом данном x и при достаточно большом n гребень будет находиться вправо от точки x, и все точки линий данной последовательности, имеющие данную абсциссу, попадут внутрь ε-полосы. Однако чем ближе к точке b берется значение x, тем большее значение n должно быть взято. Заметим, что рассмотренный пример иллюстрирует лишь один из наиболее простых случаев неравномерной сходимости и что могут иметь место случаи, не поддающиеся столь простому наглядному представлению.



Черт. 90.

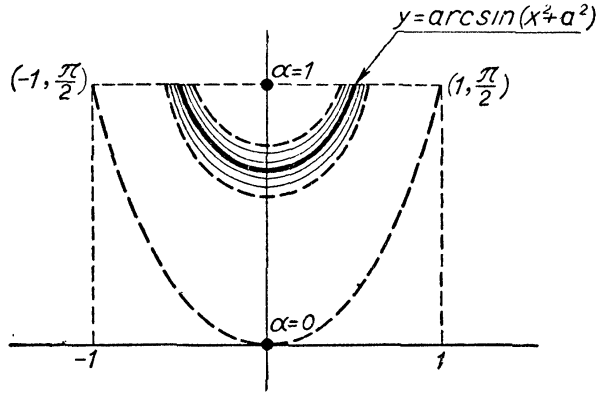
Примеры.

1. На чертежах 90, 91, 92 изображены следующие семейства линий, равномерно сходящиеся к предельным линиям:

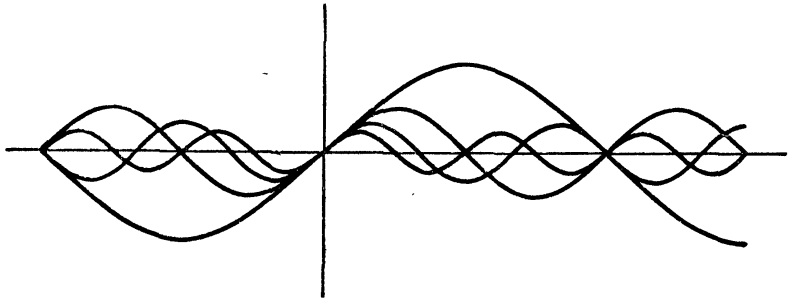
a) $\sqrt{x^2+a^2} \rightrightarrows |x|$ (черт. 90, пример 2, стр. 83);

b) $\arcsin(x^2+\alpha^2) \underset{\alpha \to a}{\rightrightarrows} \arcsin(x^2+a^2)$ (черт. 91, пример 3, стр. 83);

c) $\dfrac{\sin nx}{n} \underset{n \to +\infty}{\rightrightarrows} 0$ (черт. 92, пример 5, стр. 83).



Черт. 91.



Черт. 92.

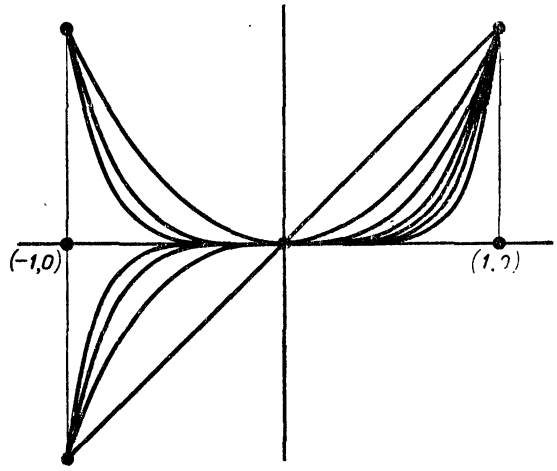
2. На чертежах 93, 94, 95, 96 изображены семейства функций, сходящиеся (неравномерно) к разрывным предельным функциям:

a) $\lim\limits_{n \to +\infty} x^n = \begin{cases} 0 \text{ (если } -1 < x < 1), \\ 1 \text{ (если } x = 1) \end{cases}$ (черт. 93, пример 5, стр. 83);

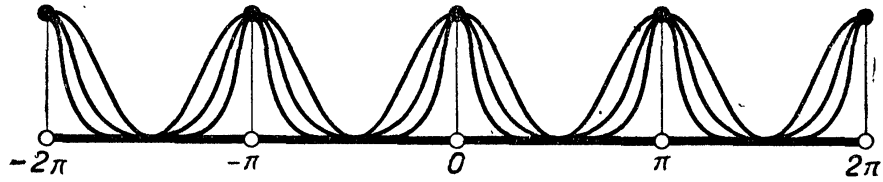
b) $\lim\limits_{n \to +\infty} [\cos x]^{2n} = \begin{cases} 0 \text{ (если } x \neq k\pi), \\ 1 \text{ (если } x = k\pi) \end{cases}$ (черт. 94, пример 6, стр. 73);

c) $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} \dfrac{1}{\alpha x + 1} = \begin{cases} 0 \text{ (если } x \neq 0), \\ 1 \text{ (если } x = 0) \end{cases}$ (черт. 95, пример 6, стр. 84);

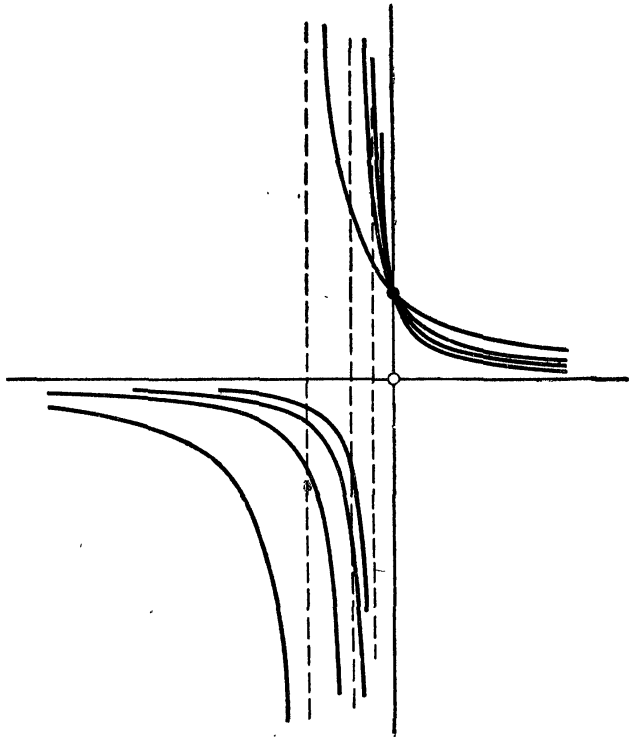
d) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{x^{2n}+1} = \begin{cases} 0 \text{ (если } |x| > 1), \\ 1 \text{ (если } |x| < 1), \\ \dfrac{1}{2} \text{ (если } |x| = 1) \end{cases}$ (черт. 96).



Черт. 93.



Черт. 94.

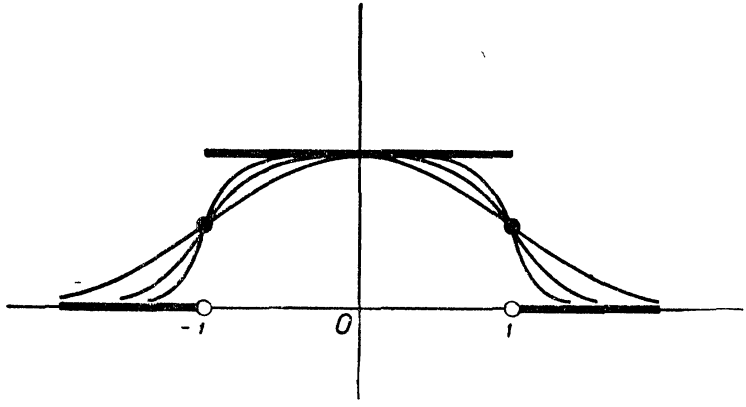


Черт. 95.

3. Рассмотрим последовательность $\{n^2 xe^{-nx}\}$ на полусегменте $0 \leqslant x < +\infty$. Имеем

$$\lim_{n \to +\infty} n^2 xe^{-nx} = \lim x \frac{n^2}{e^{nx}} = 0$$

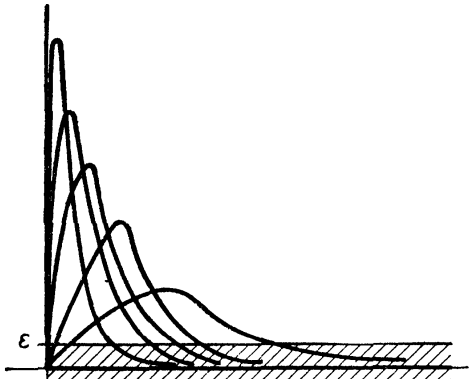
при всяком данном $x \neq 0$. При $x = 0$ имеем $\lim n^2 xe^{-nx} = \lim 0 = 0$.



Черт. 96.

Следовательно, предельная функция $f(x) = \text{const} = 0$ непрерывна на полусегменте $0 \leqslant x < +\infty$.

Исследуем n-й член последовательности (при данном значении n) $f_n(x) = n^2 xe^{-nx}$. Дифференцируя, получим: $f_n'(x) = n^2 e^{-nx}(1 - nx)$; так как производная положительна в интервале $\left(0, \frac{1}{n}\right)$ и отрицательна в интервале $\left(\frac{1}{n}, +\infty\right)$, то в первом интервале функция $f_n(x)$ возрастает, а во втором—убывает; в точке $x = \frac{1}{n}$ функция имеет максимум, равный $\frac{n}{e}$. Графики членов последовательности $f_1(x) = xe^{-x}$, $f_2(x) = 4xe^{-2x}$ и т. д. представлены на чертеже 97. Каждая функция $f_n(x)$, рассматриваемая в отдельности, ограничена, но все члены последовательности не ограничены в совокупности. Линия $y = n^2 xe^{-nx}$ имеет «гребень», высота которого, равная $\frac{n}{e}$, может быть сделана как угодно большой при достаточно больших значениях n. Никакая полоса $-\varepsilon < y < \varepsilon$, окружающая предельную (непрерывную) линию, не может содержать полностью внутри себя линии данного семейства при достаточно больших значениях n.



Черт. 97.

§ 20. Критерий Коши

Теорема. *Для равномерной сходимости по аргументу y в точке b функции $f(x, y)$ к предельной функции на множестве $\mathfrak{M}_x$ необходимо и достаточно, чтобы при любом $\varepsilon > 0$ существовала такая окрестность U_b, в которой неравенство*

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| < \varepsilon$$

выполняется для произвольных двух значений $y_1 \in U_b$ и $y_2 \in U_b$ при любом значении $x \in \mathfrak{M}_x$, где точки (x, y_1) и (x, y_2) принадлежат области определения функции $f(x, y)$ (при этом $y_1 \neq b$ и $y_2 \neq b$).

Доказательство. Условие необходимо. Если $f(x, y) \underset{y \to b}{\rightrightarrows} F(x)$ на множестве $\mathfrak{M}_x$, то существует такая окрестность U_b, что при $y \in U_b$ и при любом $x \in \mathfrak{M}_x$ будем иметь:

$$|f(x, y) - F(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (\text{где } y \neq b).$$

Поэтому, если $y_1 \in U_b$ и $y_2 \in U_b$, то

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqslant |f(x, y_1) - F(x)| + |F(x) - f(x, y_2)| < \varepsilon$$

при любом $x \in \mathfrak{M}_x$.

Условие достаточно. Предположим, что условие Коши выполнено; тогда неравенство

$$|f(x, y) - f(x, y')| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{1}$$

имеет место при любых значениях y и y' из некоторой окрестности U_b и при произвольном $x \in \mathfrak{M}_x$. Следовательно, при всяком данном значении $x \in \mathfrak{M}_x$ функция $f(x, y)$ (по аргументу y) удовлетворяет условиям критерия Коши, а потому существует предел по аргументу y (при всяком данном x):

$$\lim_{y \to b} f(x, y) = F(x).$$

Перейдя к пределу по y' в левой части неравенства (1), получим:

$$\lim_{y' \to b} |f(x, y) - f(x, y')| = |f(x, y) - F(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Следовательно, при $y \in U_b$ и при произвольном $x \in \mathfrak{M}_x$ будет выполняться неравенство

$$|f(x, y) - F(x)| < \varepsilon \quad (\text{где } y \neq b)^*.$$

---

* В условии (1) взято $\frac{\varepsilon}{2}$ лишь для того, чтобы окончательно получилось нужное неравенство. Вместо $\frac{\varepsilon}{2}$ можно взять любое число $\varepsilon' > 0$, меньшее ε.

Значит,

$$f(x, y) \underset{y \to b}{\rightrightarrows} F(x),$$ ч. т. д.

§ 21. Предельный переход под знаком интеграла

Рассмотрим семейство функций $f(x, \alpha)$, определенных на сегменте $a \leqslant x \leqslant b$, при значениях параметра α, принадлежащих некоторому множеству $\mathfrak{M}_\alpha$*. Пусть c — предельная точка (конечная или бесконечная) множества $\mathfrak{M}_\alpha$.

Теорема. *Если на сегменте* $a \leqslant x \leqslant b$:

1° *функции семейства* $f(x, \alpha)$ *интегрируемы,*

2° *в точке* c *семейство равномерно сходится по аргументу* α

$$f(x, \alpha) \underset{\alpha \to c}{\rightrightarrows} F(x),$$

то предельная функция $F(x)$ *интегрируема на сегменте* $[a, b]$ *и имеет место равенство*:

$$\lim_{\alpha \to c} \int_a^b f(x, \alpha)\, dx = \int_a^b F(x)\, dx.$$

Кратко эту теорему формулируют так: *при равномерной сходимости подинтегральной функции возможен переход к пределу под знаком интеграла*:

$$\lim_{\alpha \to c} \int_a^b f(x, \alpha)\, dx = \int_a^b \lim_{\alpha \to c} f(x, \alpha)\, dx.$$

Доказательство. Докажем, что при соблюдении условий теоремы предельная функция интегрируема. Обозначим

$$R(x, \alpha) = F(x) - f(x, \alpha).$$

В силу равномерной сходимости семейства $f(x, \alpha)$ при всех значениях $x \in [a, b]$ в некоторой окрестности U_c значений параметра $\alpha \in U_c$ и $\alpha = c$ будет выполняться неравенство

$$|R(x, \alpha)| < \varepsilon' \quad (\text{т. е. } R(x, \alpha) \underset{\alpha \to c}{\rightrightarrows} 0).$$

Выбрав значение параметра $\alpha \in U_c$, рассмотрим функцию $f(x, \alpha)$ при данном значении α. Пусть (σ) — некоторое разбиение сегмента $[a, b]$, обозначим через $M_f^{(i)}$, $m_f^{(i)}$ и $\omega_f^{(i)}$ верхнюю и нижнюю грани и колебание функции $f(x, \alpha)$ (при данном α) в ячейке σ_i.

* Лишь из педагогических соображений, для удобства запоминания, аргумент, по которому осуществляется предельный переход, обозначен буквой α.

Из соотношения (при указанном выборе α)

$$F(x) = f(x, \alpha) + R(x, \alpha) \tag{1}$$

следуют неравенства (в ячейке σ_i):

$$m_f^{(i)} - \varepsilon' < F(x) < M_f^{(i)} + \varepsilon'.$$

Следовательно, для верхней и нижней граней предельной функции $F(x)$ в ячейке σ_i получим неравенства:

$$m_f^{(i)} - \varepsilon' \leqslant m_F^{(i)} < M_f^{(i)} + \varepsilon' \quad \text{и} \quad m_f^{(i)} - \varepsilon' < M_F^{(i)} \leqslant M_f^{(i)} + \varepsilon',$$

откуда

$$\omega_F^{(i)} = M_F^{(i)} - m_F^{(i)} \leqslant \left(M_f^{(i)} - m_f^{(i)}\right) + 2\varepsilon' = \omega_f^{(i)} + 2\varepsilon',$$

а потому

$$\Omega_F = \sum \omega_F^{(i)} \sigma_i \leqslant \sum \omega_f^{(i)} \sigma_i + 2\varepsilon' \sum \sigma_i = \Omega_f + 2(b-a)\varepsilon'.$$

В силу интегрируемости функции $f(x, \alpha)$ для достаточно мелкого δ-разбиения сегмента $[a, b]$ будем иметь $\Omega_f < \varepsilon''$ и, следовательно,

$$\Omega_F < \varepsilon'' + 2\varepsilon'(b-a).$$

Выбрав $\varepsilon'' < \frac{\varepsilon}{2}$ и $\varepsilon' < \frac{\varepsilon}{4(b-a)}$, получим $\Omega_F < \varepsilon$.

Значит, $\lim \Omega_F = 0$, т. е. предельная функция интегрируема.

Из равенства (1) найдем:

$$\left| \int_a^b F(x)\,dx - \int_a^b f(x, \alpha)\,dx \right| = \left| \int_a^b R(x, \alpha)\,dx \right| \leqslant \int_a^b |R(x, \alpha)|\,dx.$$

В силу условия $R(x, \alpha) \underset{\alpha \to c}{\rightrightarrows} 0$ при всех значениях $\alpha \neq c$ из некоторой окрестности точки c и при всех значениях $x \in [a, b]$ будет выполняться неравенство $|R(x, \alpha)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$; но тогда

$$\left| \int_a^b F(x)\,dx - \int_a^b f(x, \alpha)\,dx \right| < \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot (b-a) = \varepsilon.$$

Значит,

$$\int_a^b F(x)\,dx = \lim_{\alpha \to c} \int_a^b f(x, \alpha)\,dx,$$

ч. т. д.

Следствие. *Если семейство непрерывных функций $f(x, \alpha)$ равномерно сходится на сегменте $[a, b]$, то имеет место формула перехода к пределу под знаком интеграла.*

В самом деле, в этом случае как функции семейства, так и предельная функция, будучи непрерывными, интегрируемы, а потому выполняются все условия теоремы.

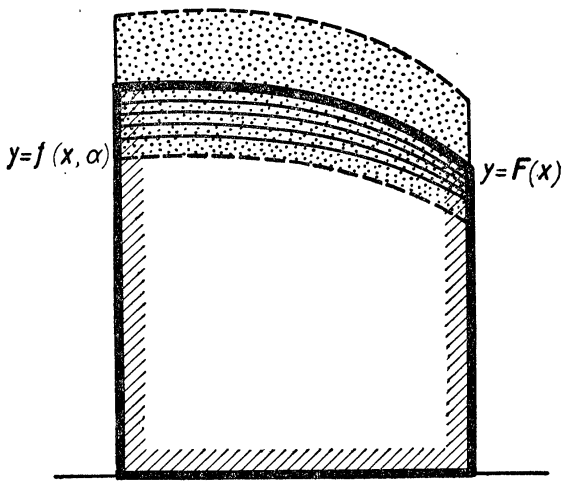
В частности, применительно к последовательностям теорема формулируется так: *предельная функция равномерно сходящейся последовательности интегрируемых функций интегрируема, и возможен переход к пределу под знаком интеграла*:

$$\lim \int_a^b S_n(x)\,dx = \int_a^b \lim S_n(x)\,dx.$$

Геометрическая интерпретация. Рассмотрим для определенности равномерно сходящееся семейство непрерывных на сегменте $[a, b]$ функций $f(x, \alpha)$. Построим ε-полосу, окружающую предельную линию $y = F(x)$. Площадь ε-полосы равна

$$\int_a^b [F(x) + \varepsilon]\,dx - \int_a^b [F(x) - \varepsilon]\,dx = 2\varepsilon(b - a).$$

При значениях параметра $\alpha \in U_c$ линия семейства $y = f(x, \alpha)$ содержится в ε-полосе, а потому площадь криволинейной трапеции, ограниченной линией $y = f(x, \alpha)$, отличается (по абсолютной величине) от площади трапеции, ограниченной предельной линией, меньше чем на $2\varepsilon(b - a)$ (черт. 98). Значит, площади криволинейных трапеций, ограниченных линиями семейства, имеют предел, равный площади, ограниченной линией $y = F(x)$.



Черт. 98.

Равномерная сходимость есть достаточное условие возможности перехода к пределу под знаком интеграла. При неравномерной сходимости семейства интегрируемых функций могут представиться различные случаи:

1° *переход к пределу под знаком интеграла возможен*;

2° *предел интеграла* $\int_a^b f(x, \alpha)\,dx$ *не существует*;

3° *предел этого интеграла не равен интегралу от предельной функции;*

4° *предельная функция неинтегрируема.*

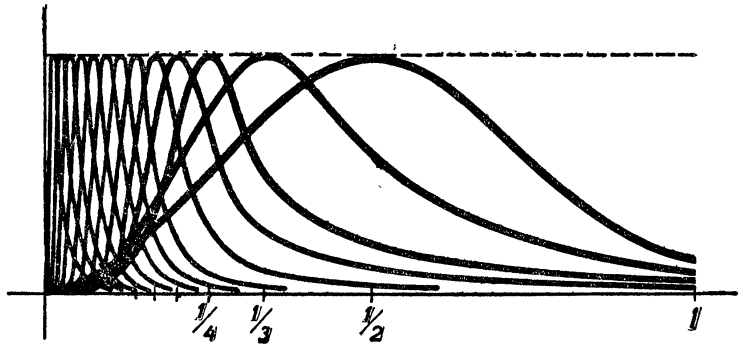
Примеры.

1. Вычислить методом предельного перехода интеграл $\int_a^b |x|\,dx$. Функция $|x|$ есть предельная функция в точке $\alpha = 0$ для равномерно сходящегося семейства функции (см. пример 2, стр. 79) $\sqrt{x^2+\alpha}$.

Имеем:

$$\int_a^b \sqrt{x^2+\alpha}\,dx = \left[\frac{x\sqrt{x^2+\alpha}}{2} + \frac{\alpha}{2}\ln|x+\sqrt{x^2+\alpha}|\right]_a^b =$$

$$= \frac{b\sqrt{b^2+\alpha}}{2} - \frac{a\sqrt{a^2+\alpha}}{2} + \frac{\alpha}{2}\ln\left|\frac{b+\sqrt{b^2+\alpha}}{a+\sqrt{a^2+\alpha}}\right|.$$



Черт. 99.

Предел полученного выражения в точке $\alpha = 0$ равен $\frac{b\sqrt{b^2}}{2} - \frac{a\sqrt{a^2}}{2}$, а потому и

$$\int_a^b |x|\,dx = \frac{b|b|}{2} - \frac{a|a|}{2}.$$

2. Рассмотрим последовательность функций $\{nxe^{-nx}\}$. Эта последовательность на сегменте $[0, 1]$ сходится к нулю $\lim\limits_{n\to+\infty}(nxe^{-nx}) = 0$. Функция nxe^{-nx} в точке $x = \frac{1}{n}$ имеет максимум, равный $\frac{1}{e}$ (ср. пример 3, стр. 94). Сходимость неравномерная (черт. 99). Интеграл от предельной функции равен нулю. Вычислим

$$\lim \int_0^1 nxe^{-nx}\,dx = \lim\left[n\left(-\frac{xe^{-nx}}{n} - \frac{e^{-nx}}{n^2}\right)\right]_0^1 = \lim\left[\frac{1}{n} - \frac{e^{-n}}{n} - e^{-n}\right] = 0.$$

При наличии неравномерной сходимости предельный переход под знаком интеграла оказался возможным.

3. Видоизменив предыдущий пример, рассмотрим последовательность $\{n^2xe^{-nx}\}$ (пример 3, стр. 94) на сегменте [0, 1]. Предельная функция и интеграл от этой функции равны нулю. Вычислим

$$\lim \int_0^1 n^2xe^{-nx}\,dx = \lim [1 - e^{-n} - ne^{-n}] = 1;$$

этот предел существует, но не равен интегралу от предельной функции. Переход к пределу под знаком интеграла невозможен.

4. Рассмотрим последовательность $\{n^3xe^{-nx}\}$ на сегменте [0, 1]. Как и в предыдущих двух примерах, предельная функция и ее интеграл равны нулю, но

$$\lim \int_0^1 n^3xe^{-nx}\,dx = +\infty.$$

Переход к пределу под знаком интеграла невозможен.

5. Положим $f_n(0) = f_n(1) = 1$ и $f_n(x) = 1$, если $x = \frac{p}{q}$ есть несократимая дробь со знаменателем, не большим n; во всех остальных точках сегмента [0, 1] положим $f_n(x) = 0$. Функция $f_n(x)$ на сегменте [0, 1] имеет конечное множество точек разрыва, а потому интегрируема. Предельная функция есть неинтегрируемая функция Дирихле.

§ 22. Переход к пределу под знаком производной

Рассмотрим семейство функций $f(x, \alpha)$, определенных в некотором промежутке $\langle a, b\rangle$ при значениях параметра $\alpha \in \mathfrak{M}_\alpha$. Предположим, что при всяком значении $\alpha \in \mathfrak{M}_\alpha$ функция $f(x, \alpha)$ имеет конечную производную $\frac{df(x, \alpha)}{dx} = f'_x(x, \alpha)$, в каждой точке промежутка $\langle a, b\rangle$, в этом случае производные $f'_x(x, \alpha)$ образуют семейство функций, которые могут быть рассматриваемы в промежутке $\langle a, b\rangle$ при значениях $\alpha \in \mathfrak{M}_\alpha$.

Теорема. *Если в некотором промежутке $\langle a, b\rangle$ семейство функций $f(x, \alpha)$, имеющих конечную производную $f'_x(x, \alpha)$ (при каждом значении $\alpha \in \mathfrak{M}_\alpha$):*

1° *сходится к предельной функции*

$$\lim_{\alpha \to c} f(x, \alpha) = F(x),$$

2° *семейство производных $\frac{df(x, \alpha)}{dx}$ в промежутке $\langle a, b\rangle$ равномерно сходится к предельной функции*

$$f'_x(x, \alpha) \underset{\alpha \to c}{\rightrightarrows} \Phi(x),$$

то предельная функция $F(x)$ в промежутке $<a, b>$ имеет производную, равную $\Phi(x)$:

$$\Phi(x) = \frac{dF}{dx}.$$

Иными словами, при выполнении теоремы *возможен переход к пределу под знаком производной*:

$$\lim \frac{df(x, \alpha)}{dx} = \frac{d\,[\lim f(x, \alpha)]}{dx}.$$

Доказательство. Рассмотрим произвольную функцию $f(x)$, имеющую конечную производную $f'(x)$ в промежутке $\langle a, b\rangle$. Пусть $x \neq \xi$ — какая-либо данная точка промежутка $<a, b>$, положим

$$H(x) = \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}.$$

Так как существует конечный предел $\lim\limits_{x \to \xi} H(x) = f'(\xi)$, то согласно принципу продолжения по непрерывности следует считать $H(\xi) = f'(\xi)$. Таким образом, $H(x)$ есть функция, непрерывная в промежутке $\langle a, b\rangle$.

Докажем, что при соблюдении условий теоремы предельная функция $F(x)$ имеет производную, равную $\Phi(x)$. При данном значении $x \neq \xi$ функция H может быть составлена для каждой функции $f(x, \alpha)$ семейства. Следовательно, мы получим семейство функций $H(x, \alpha)$, непрерывных в промежутке $\langle a, b\rangle$:

$$H(x, \alpha) = \begin{cases} \dfrac{f(x, \alpha) - f(\xi, \alpha)}{x - \xi} & (\text{если } x \neq \xi), \\ f'(\xi, \alpha) & (\text{если } x = \xi). \end{cases}$$

Докажем, что функции $H(x, \alpha)$ (в точке $\alpha = c$) образуют равномерно сходящееся семейство функций. Применим критерий равномерной сходимости Коши:

$$|H(x, \alpha_2) - H(x, \alpha_1)| = \\ = \frac{1}{|x - \xi|} |[f(x, \alpha_2) - f(x, \alpha_1)] - [f(\xi, \alpha_2) - f(\xi, \alpha_1)]|.$$

Применив формулу Лагранжа к функции $f(x, \alpha_2) - f(x, \alpha_1)$, получим:

$$|H(x, \alpha_2) - H(x, \alpha_1)| = |f'_x(\eta, \alpha_2) - f'_x(\eta, \alpha_1)|,$$

где $\eta = \xi + \theta(x - \xi)$.

Заметим, что при $x = \xi$ следует положить $\eta = \xi$, так как

$$|H(\xi, \alpha_2) - H(\xi, \alpha_1)| = |f'_x(\xi, \alpha_2) - f'_x(\xi, \alpha_1)|.$$

В силу равномерной сходимости семейства производных $f'_x(x, \alpha)$ неравенство (критерий Коши)

$$|f'_x(\eta, \alpha_2) - f'_x(\eta, \alpha_1)| < \varepsilon$$

будет выполняться при произвольном значении $\eta \in \langle a, b\rangle$, если значения параметра α_1 и α_2 содержатся в некоторой окрестности U_c. Следовательно,

$$|H(x, \alpha_2) - H(x, \alpha_1)| < \varepsilon$$

при произвольном x в промежутке $\langle a, b\rangle$, если $\alpha_1 \in U_c$ и $\alpha_2 \in U_c$. Значит, для семейства функций $H(x, \alpha)$ выполняется критерий равномерной сходимости Коши, а потому

$$H(x, \alpha) \underset{\alpha \to c}{\rightrightarrows} H(x).$$

Находим предельную функцию:

$$H(x) = \begin{cases} \lim\limits_{\alpha \to c} \dfrac{f(x, \alpha) - f(\xi, \alpha)}{x - \xi} = \dfrac{F(x) - F(\xi)}{x - \xi}, & \text{если } x \neq \xi, \\ \lim\limits_{\alpha \to c} f'_x(\xi, \alpha) = \Phi(\xi), & \text{если } x = \xi. \end{cases}$$

Предельная функция $H(x)$ равномерно сходящегося семейства непрерывных функций $H(x, \alpha)$ непрерывна в точке ξ:

$$\lim_{x \to \xi} H(x) = H(\xi),$$

т. е. в любой точке ξ промежутка $\langle a, b\rangle$ имеем:

$$\lim_{x \to \xi} \frac{F(x) - F(\xi)}{x - \xi} = F'(\xi) = \Phi(\xi),$$

ч. т. д.

Примеры.

1. Предположим, что формула $(x^r)' = rx^{r-1}$ выведена при любом рациональном значении r. Доказать методом предельного перехода, что формула остается в силе для функции x^α, где α — иррациональное число. Пусть $x > 0$ — произвольная данная точка и $0 < a \leqslant x \leqslant b$ — произвольный сегмент, содержащий эту точку; как известно, функция x^α есть предельная функция $x^\alpha = \lim\limits_{r \to \alpha} x^r$.

Рассмотрим семейство функций x^r на сегменте $a \leqslant x \leqslant b$, где r — любое рациональное число на каком-либо сегменте $r - h \leqslant \alpha \leqslant r + h$. Производные функций данного семейства образуют семейство непрерывных функций rx^{r-1}. Заметим, что rx^{r-1}, рассматриваемая как функция двух аргументов x и r, непрерывна в прямоугольнике $a \leqslant x \leqslant b$, $\alpha - h \leqslant r \leqslant \alpha + h$ (достаточно заметить, что $rx^{r-1} = re^{(r-1)\ln x}$ и что $(r-1)\ln x$, будучи произведением непрерывных функций, есть непрерывная функция).

В силу непрерывности функции rx^{r-1} (как функции двух аргументов)

$$rx^{r-1} \underset{r \to \alpha}{\rightrightarrows} \alpha x^{\alpha-1},$$

т. е. семейство производных равномерно сходится.

В силу равномерной сходимости семейства производных возможен переход к пределу под знаком производной:

$$\lim_{r \to \alpha} \frac{dx^r}{dx} = \frac{dx^\alpha}{dx}, \text{ т. е. } \alpha x^{\alpha-1} = \frac{dx^\alpha}{dx}.$$

2. Рассмотрим последовательность функций, равномерно сходящуюся к нулю, $f_n(x) = \dfrac{\sin n^2 x}{n}$. Производные образуют последовательность $f'_n(x) = n \cos n^2 x$. В этом примере формула перехода к пределу под знаком производной не имеет места, так как предельная функция имеет производную, тождественно равную нулю, а последовательность производных не является сходящейся (так, например, она расходится в точке $x = 0$).

3. Рассмотрим семейство функций

$$f(x, \alpha) = \alpha \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{\alpha}.$$

Так как $\left|\operatorname{arc\,tg} \frac{x}{\alpha}\right| \leqslant \frac{\pi}{2}$, то при $|\alpha| < \frac{\varepsilon \cdot 2}{\pi}$ имеем

$$\left|\alpha \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{\alpha}\right| \leqslant |\alpha| \frac{\pi}{2} < \varepsilon$$

при произвольном значении x. Следовательно, $\alpha \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{\alpha} \underset{\alpha \to 0}{\rightrightarrows} F(x) = 0$.

Семейство производных

$$f'_x(x, \alpha) = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + x^2}$$

сходится к разрывной предельной функции

$$\lim_{\alpha \to 0} f'_x(x, \alpha) = \Phi(x) = \begin{cases} 0 & (\text{если } |x| \neq 0), \\ 1 & (\text{если } x = 0). \end{cases}$$

Сходимость семейства производных неравномерная. В точке $x = 0$ имеем $F'(0) = 0 \neq \Phi(0)$.

Рассмотрим то же семейство в интервале $(0, 1)$. При неравномерной сходимости семейства производных предельный переход под знаком производной возможен: $F'(x) = \Phi(x) = 0$. Этот пример показывает, что равномерная сходимость семейства производных не является необходимым условием возможности перехода к пределу под знаком производной.

ГЛАВА III

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ АРГУМЕНТОВ

§ 23. Частные производные

Пусть $f(X)=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — функция, определенная в окрестности точки $A(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Будем рассматривать $f(X)$ при данных значениях аргументов $x_1=a_1$, $x_2=a_2$, $\ldots$, $x_{i-1}=a_{i-1}$, $x_{i+1}=a_{i+1}$, $\ldots$, $x_n=a_n$ как функцию аргумента x_i.

Определение. *Производной функции $f(X)$ по аргументу x_i в точке A называется производная (конечная или бесконечная) в точке $x_i=a_i$ от функции*

$$f(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n).$$

Эта производная обозначается так:

$$f'_{x_i}(A), \text{ или } \frac{\partial f(A)}{\partial x_i}, \text{ или } f_{x_i}(a_1, a_2, \ldots, a_n).$$

Таким образом, по определению,

$$f'_{x_i}(A)=\lim_{x_i \to a_i} \frac{f(a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots, a_n)-f(a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots, a_n)}{x_i-a_i}.$$

Производные функции нескольких аргументов (в отличие от производных функций одного аргумента) называются частными производными.

Пусть $\mathfrak{M}$ — множество точек, в которых существует конечная производная по аргументу x_i, каждой точке $X \in \mathfrak{M}$ соответствует значение производной $f'_{x_i}(X)$; следовательно, $f'_{x_i}(X)$ есть функция n аргументов $x_1, x_2, \ldots, x_n$, определенная на множестве $\mathfrak{M}$. Эта функция называется производной от функции $f(X)$ по аргументу x_i.

Определение. *Функция, имеющая в некоторой области непрерывные производные по каждому аргументу, называется гладкой в данной области.*

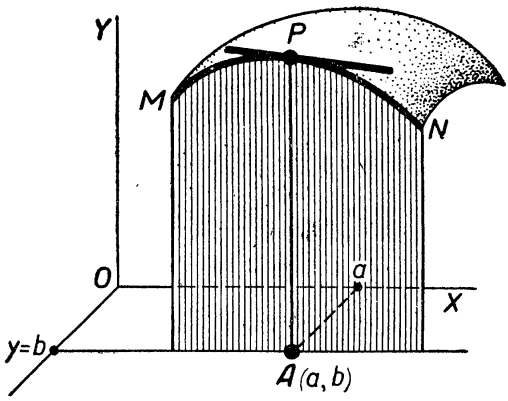
Геометрическая интерпретация производных функции двух аргументов. Положив $y=b$, получим функцию $z=f(x, b)$. Это есть функция $f(x, y)$, рассматриваемая на прямой $y=b$, парал-

лельной оси абсцисс. Графиком $f(x, b)$ (в плоскости $y = b$) служит линия MN (черт. 100) пересечения графика $z = f(x, y)$ и плоскости $y = b$. Производная от $f(x, b)$ по аргументу x в точке a, т. е. частная производная по x в точке $A(a, b)$:

$$f'_x(a, b) = \left[\frac{df(x, b)}{dx}\right]_{x=a},$$

есть тангенс угла, образованного касательной к линии MN в точке $P(a, b, f(a, b))$ с осью абсцисс.

Аналогичную интерпретацию имеет частная производная по y в точке $A(a, b)$.



Черт. 100.

Примечание. Из существования производных в точке A по каждому аргументу не следует непрерывность функции в этой точке. Положим, например,

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & (\text{если } xy \neq 0), \\ 1 & (\text{если } xy = 0). \end{cases}$$

Функция $f(x, y)$ равна нулю в точках, не лежащих на осях координат, а на каждой из осей эта функция равна единице.

Имеем: $f'_x(0, 0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = 0$, и аналогично $f'_y(0, 0) = 0$. Однако точка O является точкой разрыва функции $f(x, y)$ относительно всей области ее определения.

Вычисление производных от элементарных функций многих аргументов выполняется по обычным правилам дифференцирования функций одного аргумента, при этом *значения всех аргументов, кроме одного, по которому вычисляется производная, мысленно считаются данными числами.*

Примеры.

1. $f(x, y, z) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$.

В любой точке $M(x, y, z) \neq 0$ производные находятся по правилам дифференцирования элементарных функций:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - x \frac{2x}{2\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}} = \frac{y^2 + z^2}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}},$$

и аналогично

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{xy}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{xz}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}.$$

В точке $O(0, 0, 0)$ производные не имеют смысла, так как эта точка не принадлежит области определения данной функции. Функция $f(x, y)$ является гладкой в любой области, не содержащей точку $O(0, 0)$.

2. Положим $f(x, y) = e^{\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}}$.

По правилам дифференцирования элементарных функций найдем:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2+y^2} e^{\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}};$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2} e^{\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}}.$$

3.

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & (\text{если } X(x, y, z) \neq O(0, 0, 0)), \\ 0 & (\text{если } X = O). \end{cases}$$

Во всех точках, отличных от $O(0, 0, 0)$, производные находятся, как в примере 1.

На оси абсцисс функция $f(X)$ разрывна в точке $x = 0$, так как $f(x, 0, 0) = \operatorname{sign} x$, а потому $f'_x(0, 0, 0)$ не существует.

На оси ординат $f(0, y, 0) = 0$, а потому $f'_y(0, 0, 0) = 0$; аналогично $f'_z(0, 0, 0) = 0$.

4. Положим $\rho(X) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$.

В любой точке $X \neq 0$ имеем:

$$\frac{\partial \rho}{\partial x_i} = \frac{x_i}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}} = \frac{x_i}{\rho} = \alpha_i,$$ где α_i — соответствующий направляющий косинус луча OX. На оси OX_i имеем $\rho(X) = \sqrt{x_i^2} = |x_i|$.

В точке $O(0, 0, \ldots, 0)$ производная $\frac{\partial \rho}{\partial x_i}$ не существует. В случае двух аргументов функция изображается поверхностью полости конуса $z = \sqrt{x^2+y^2}$. Сечение каждой из плоскостей (x, z) и (y, z) дает пару прямых. Ясно, что в точке $O(0, 0, 0)$ касательная к сечению не существует.

5. Положим $f(x, y) = y\sqrt[3]{x}$.

В любой точке плоскости существует производная

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \sqrt[3]{x}.$$

В любой точке, не лежащей на прямой $x = 0$, существует конечная производная

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

В точках оси ординат имеем:

$$\frac{f(x, y) - f(0, y)}{x - 0} = \frac{y}{\sqrt[3]{x^2}}.$$

Следовательно, в любой точке $M(0, y)$, где $y \neq 0$, существует бесконечная производная

$$f'_x(0, y) = \lim_{x \to 0} \frac{y}{\sqrt[3]{x^2}} = \begin{cases} +\infty & (\text{если } y > 0), \\ -\infty & (\text{если } y < 0). \end{cases}$$

В точке $O(0, 0)$ имеем $f'_x(0, 0) = 0$.

§ 24. Теорема Лагранжа

Теорема (Лагранжа). *Если функция* $f(X) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *в некоторой окрестности* U_A *точки* A *имеет конечные или бесконечные производные по каждому аргументу, то для произвольной точки* $X \in U_A$ *существует по крайней мере одна такая система* n *точек* $X_1, X_2, \ldots, X_n$, *что*

1° имеет место равенство:

$$f(X) - f(A) = f'_{x_1}(X_1)(x_1 - a_1) + f'_{x_2}(X_2)(x_2 - a_2) + \ldots + f'_{x_n}(X_n)(x_n - a_n);$$

2° расстояние каждой из точек $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *от точки* A *меньше расстояния* $\rho(X, A)$.

Доказательство. Преобразуем приращение данной функции (для определенности полагаем $n = 3$) следующим образом:

$$f(x, y, z) - f(a, b, c) = [f(x, y, z) - f(a, y, z)] + [f(a, y, z) - f(a, b, z)] + [f(a, b, z) - f(a, b, c)].$$

Первую скобку можно рассматривать как приращение функций по аргументу x. Применив теорему Лагранжа для функции одного аргумента, получим:

$$f(x, y, z) - f(a, y, z) = f'_x(\xi_1, y, z)(x - a),$$
$$\text{где } \xi_1 = a + \theta_1(x - a).$$

Точка $X_1(\xi_1, y, z)$ удалена от точки A на расстояние, меньшее, чем $\rho(X, A)$, так как

$$\rho(X_1, A) = \sqrt{\theta_1^2(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2} < \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2} = \rho(X, A).$$

Аналогично преобразуются вторая и третья скобки:

$$f(a, y, z) - f(a, b, z) = f'_y(a, \xi_2, z)(y - b) = f'_y(X_2)(y - b);$$
$$f(a, b, z) - f(a, b, c) = f'_z(a, b, \xi_3)(z - c) = f'_z(X_3)(z - c),$$
$$\text{где } \rho(X_2, A) < \rho(X, A) \text{ и } \rho(X_3, A) < \rho(X, A).$$

Следовательно,

$$f(x, y, z) - f(a, b, c) = f'_x(X_1)(x-a) + f'_y(X_2)(y-b) + f'_z(X_3)(z-c),$$

ч. т. д.

Теорема. *Если функция $f(X)$ имеет ограниченные производные по каждому аргументу в некоторой области, то она непрерывна в этой области.*

Доказательство. В силу ограниченности производных (по условию) существует такое число $K > 0$, что

$$|f'_x| < K, \ |f'_y| < K \text{ и } |f'_z| < K$$

в области G.

Пусть $A \in G$ и $U_A \subset G$ — любая окрестность точки A.

Если $X \in U_A$, то, применив теорему Лагранжа, получим:

$$\begin{aligned} |f(x, y, z) - f(a, b, c)| &= |f'_x(X_1)(x-a) + f'_y(X_2)(y-b) + \\ &+ f'_z(X_3)(z-c)| \leqslant |f'_x(X_1)|\,|x-a| + \\ &+ |f'_y(X_2)|\,|y-b| + |f'_z(X_3)|\,|z-c|, \end{aligned}$$

откуда

$$|f(x, y, z) - f(a, b, c)| < K|x-a| + K|y-b| + K|z-c|.$$

Следовательно,

$$|f(x, y, z) - f(a, b, c)| < \varepsilon,$$

$$\text{если } |x-a| < \frac{\varepsilon}{3K}, \ |y-b| < \frac{\varepsilon}{3K}, \ |z-c| < \frac{\varepsilon}{3K},$$

т. е. функция $f(x, y, z)$ непрерывна в точке A. Так как A — произвольная точка области G, то функция $f(X)$ непрерывна в данной области, ч. т. д.

Пример.

Рассмотрим функцию

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} & (\text{если } x^2+y^2 \neq 0), \\ 0 & (\text{если } x = y = 0). \end{cases}$$

В любой точке, отличной от $O(0, 0)$, производные находятся по обычным правилам. Например:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 2\frac{y(x^2+y^2) - 2x^2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$

На осях координат $\varphi(x, 0) = \varphi(0, y) = \text{const} = 0$, а потому $\varphi'_x(0, 0) = \varphi'_y(0, 0) = 0$.

Следовательно, производные существуют в любой точке плоскости. Функция разрывна в точке $O(0, 0)$ (см. пример 5, стр. 52). Легко видеть, что

производные неограничены в окрестности точки O (0, 0), так на прямой $y=2x$ имеем $\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{12}{25x}$.

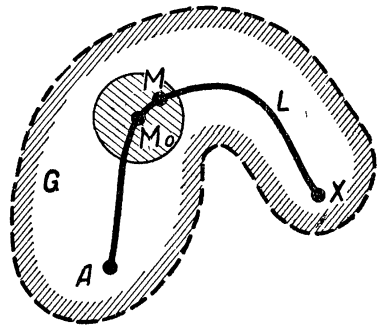
Теорема. *Если в области G функция $f(X)$ имеет производные по каждому аргументу, равные нулю, то $f(X)$ есть константа в области G.*

Доказательство. Пусть $A(a, b, c)$ и $X(x, y, z)$ — две различные точки области G. Соединим точки A и X простой дугой $L\subset G$

$$x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t);\quad \alpha\leqslant t\leqslant\beta. \qquad (L)$$

Докажем, что на дуге L функция $f(x, y, z)$ постоянна. Функцию $f(x, y, z)$ на L можно рассматривать как функцию параметра: $f(x(t), y(t), z(t))$ на сегменте $[\alpha, \beta]$.

Пусть $M_0(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ — любая точка дуги L, а $U_{M_0}\subset G$ — некоторая ее окрестность (черт. 101). При достаточно малом приращении параметра t точка $M(x(t), y(t), z(t))$ лежит в окрестности U_{M_0}.



Черт. 101.

По теореме Лагранжа имеем:

$$f(x(t), y(t), z(t))-f(x(t_0), y(t_0), z(t_0))=$$
$$=f'_x(X_1)(x(t)-x(t_0))+f'_y(X_2)(y(t)-y(t_0))+f'_z(X_3)(z(t)-z(t_0))=0,$$

где $X_1\in U_{M_0}$, $X_2\in U_{M_0}$, $X_3\in U_{M_0}$, ибо, по условию, $f'_x=f'_y=f'_z=0$ в любой точке области G.

Следовательно,

$$\lim_{t\to t_0}\frac{f(x(t), y(t), z(t))-f(x(t_0), y(t_0), z(t_0))}{t-t_0}=0.$$

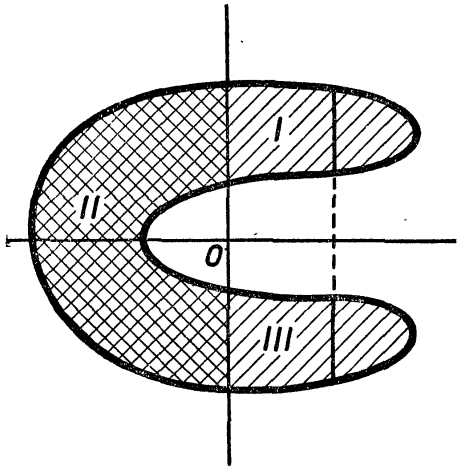
Значит, функция $f(x(t), y(t), z(t))$ имеет производную, равную нулю на сегменте $[\alpha, \beta]$, а потому постоянна на этом сегменте. В частности, ее значения в концах данного сегмента равны, т. е. $f(A)=f(X)$. Так как $X\in G$ — произвольная точка, то $f(X)=\text{const}=f(A)$ в области G, ч. т. д.

Следствие. *Если функция $f(X)$ в области G имеет производные, равные нулю по некоторой части аргументов, то в достаточно малой окрестности каждой точки области данная функция постоянна относительно совокупности соответствующих аргументов.*

Пусть, например,

$$f(X)=f(x, y, z)\quad\text{и}\quad\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial z}=0.$$

Рассмотрим $f(x, y, z)$ в окрестности данной точки $A(a, b, c)$. Положим $x = a$, тогда получим функцию двух аргументов $f(a, y, z)$, определенную в достаточно малой окрестности точки $y = b$, $z = c$ и имеющую производные, равные нулю в этой окрестности. Следовательно, $f(a, y, z) = f(a, b, c)$, т. е. значение функции определяется значением первого аргумента.



Черт. 102.

Примечание. Полученное следствие носит локальный характер. Так, например, функция $f(x, y, z)$ может не быть постоянной относительно y и z во всей области при условии $f'_y = f'_z = 0$.

В самом деле, сечение области G плоскостью $x = a$ может оказаться несвязным, и в различных (связных) частях этого сечения функция $f(a, y, z)$ может иметь различные значения.

Пример.

На чертеже 102 изображена область G, разделяющаяся осью OY на три части: I, II, III. Положим

$$f(X) = \begin{cases} x^2 \text{ (если } x \in \text{I)}, \\ x^3 \text{ (если } x \in \text{II)}, \\ x^4 \text{ (если } x \in \text{III)}. \end{cases}$$

Имеем $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$. Прямая $x = k$ при $k > 0$ пересекает область по двум отрезкам: на верхнем имеем $f(k, y) = k^2$, а на нижнем $f(k, y) = k^4$.

§ 25. Дифференцируемые функции

Определение. *Функция $f(x)$, определенная в окрестности точки A, называется дифференцируемой в точке A, если ее приращение $f(X) - f(A)$ может быть представлено в виде суммы*

$$f(X) - f(A) = l(X) + \omega(X)\rho(X, A), \qquad (1)$$

где $l(X)$ — линейная функция, равная нулю в точке A, а $\omega(X)$ — функция, непрерывная в точке A и равная нулю в этой точке:

$$\lim_{X \to A} \omega(X) = \omega(A) = 0.$$

Линейная функция $l(X)$ называется дифференциалом функции $f(X)$ в точке A и обозначается символом $df(X, A)$.

Итак,

$$f(x) - f(A) = df(X, A) + \omega(X)\rho(X, A).$$

В частности, для функции двух аргументов, дифференцируемой в точке $A(a, b)$, равенство (1) запишется следующим образом:

$$f(x, y) - f(a, b) = p_1 \cdot (x - a) + p_2 \cdot (y - b) + \\ + \omega(x, y)\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2},$$

где $\lim\limits_{(x, y) \to (a, b)} \omega(x, y) = \omega(a, b) = 0$, а p_1 и p_2 — коэффициенты линейной функции (т. е. числа).

Для функции трех аргументов равенство (1) запишется так:

$$f(x, y, z) - f(a, b, c) = p_1 \cdot (x - a) + p_2 \cdot (y - b) + p_3 \cdot (z - c) + \\ + \omega(x, y, z)\rho(X, A)\ *.$$

Следствие. *Всякая функция, дифференцируемая в точке A, непрерывна в этой точке.*

В самом деле, из (1) имеем:

$$\lim_{X \to A} f(X) = f(A).$$

Примечание. *Не всякая непрерывная функция является дифференцируемой.* Достаточно указать на непрерывные недифференцируемые функции одного аргумента.

Теорема. *Если функция* $\omega(X)$ *непрерывна в точке* A *и* $\omega(A) = 0$, *то произведение* $\omega(X)\rho(X, A)$ *может быть представлено в виде суммы*

$$\omega(X)\rho(X, A) = \omega_1(X)(x_1 - a_1) + \omega_2(X)(x_2 - a_2) + \ldots + \\ + \omega_n(X)(x_n - a_n),$$

где $\omega_1(X), \omega_2(X), \ldots, \omega_n(X)$ — *функции, непрерывные в точке* A *и равные нулю в этой точке; обратно, всякая сумма* $\sum \omega_i(X)(x_i - a_i)$, *где* $\omega_i(X)$ — *функции, непрерывные в точке* A *и равные нулю в этой точке,* — *может быть представлена в виде* $\omega(X)\rho(X, A)$.

Доказательство. Положим для определенности $n = 3$. Пусть $\lim\limits_{X \to A} \omega(X) = 0$. Так как

$$\rho = \frac{(x-a)}{\rho}(x - a) + \frac{y-b}{\rho}(y - b) + \frac{z-c}{\rho}(z - c),$$

где

$$\rho = \rho(X, A) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2},$$

то

$$\omega\rho = \frac{\omega(X)(x-a)}{\rho}(x - a) + \frac{\omega(X)(y-b)}{\rho}(y - b) + \frac{\omega(X)(z-c)}{\rho}(z - c);$$

---

* Возможность тождественного равенства нулю функции $l(X)$ не исключается, в этом случае $p_1 = p_2 = \ldots = 0$.

положим

$$\frac{\omega(X)(x-a)}{\rho}=\omega_1(X),\quad \frac{\omega(X)(y-b)}{\rho}=\omega_2(X),\quad \frac{\omega(X)(z-c)}{\rho}=\omega_3(X)$$

при $X\neq A$ и $\omega_1(a, b, c)=\omega_2(a, b, c)=\omega_3(a, b, c)=0$.

Функции ω_1, ω_2 и ω_3 непрерывны в точке $A(a, b, c)$; так, например, $|\omega_1(X)|=|\omega|\cdot\frac{|x-a|}{\rho}\leqslant|\omega(X)|$, а потому

$$\lim_{X\to A}\omega_1(X)=0=\omega_1(a, b, c).$$

Следовательно,

$$\omega\rho=\omega_1\cdot(x-a)+\omega_2\cdot(y-b)+\omega_3\cdot(z-c).$$

Обратно, пусть дана сумма $\omega_1\cdot(x-a)+\omega_2\cdot(y-b)+\omega_3\cdot(z-c)$, где ω_1, ω_2 и ω_3 — функции, непрерывные в точке $A(a, b, c)$ и равные нулю в этой точке; положив

$$\omega(X)=\frac{\omega_1\cdot(x-a)+\omega_2\cdot(y-b)+\omega_3\cdot(z-c)}{\rho}$$

и $\omega(A)=0$, получим представление данной суммы в виде $\omega\rho$, ч. т. д.

Следствие. В определении дифференцируемости функции основное условие

$$f(X)-f(A)=l(X)+\omega\cdot\rho(X, A) \tag{1}$$

можно заменить эквивалентным условием

$$f(X)-f(A)=l(X)+\sum\omega_i(X)(x_i-a_i). \tag{1'}$$

Теорема. Необходимое условие дифференцируемости. *Если функция $f(X)$ дифференцируема в точке A, то:*

1° *в точке A существуют конечные производные по каждому аргументу;*

$$2^\circ\ df(X, A)=f'_{x_1}(A)(x_1-a_1)+f'_{x_2}(A)(x_2-a_2)+\ldots+f'_{x_n}(A)(x_n-a_n).$$

Доказательство. Положим для определенности $n=3$. По условию в точке $A(a, b, c)$ функция $f(x, y, z)$ дифференцируема:

$$f(x, y, z)-f(a, b, c)=p_1\cdot(x-a)+p_2\cdot(y-b)+p_3\cdot(z-c)+\omega\rho(A, X).$$

Положим в этом равенстве $y=b$, $z=c$:

$$f(x, b, c)-f(a, b, c)=p_1(x-a)+\omega\cdot|x-a|,$$

откуда

$$\frac{f(x, b, c) - f(a, b, c)}{x - a} = p_1 \pm \omega;$$

перейдя к пределу, получим:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x, b, c) - f(a, b, c)}{x - a} = f'_x(a, b, c) = p_1.$$

Аналогично докажем, что

$$f'_y(a, b, c) = p_2, \quad f'_z(a, b, c) = p_3.$$

Следовательно,

$$df(X, A) = f'_x(a, b, c)(x - a) + f'_y(a, b, c)(y - b) + f'_z(a, b, c)(z - c),$$

ч. т. д.

Для функций с числом аргументов $n > 1$ существование конечных производных является необходимым, но не является достаточным условием дифференцируемости. Примером может служить всякая разрывная (и, следовательно, недифференцируемая) функция, имеющая в данной точке производные по каждому аргументу (примечание на стр. 105, пример непрерывной функции см. ниже, на стр. 114).

Теорема. *Представление приращения дифференцируемой функции в виде*

$$f(X) - f(A) = l(X) + \omega(X)\rho(X, A)$$

возможно только единственным образом.

Доказательство. Допустим, что для одной и той же функции $f(X)$ получены два представления:

$$f(X) - f(A) = \sum p_i \cdot (x_i - a_i) + \omega(X)\rho(X, A)$$

и

$$f(X) - f(A) = \sum q_i \cdot (x_i - a_i) + \bar{\omega}(X)\rho(X, A).$$

По доказанному коэффициенты p_i и q_i равны соответствующей производной в точке A:

$$p_i = q_i = f'_{x_i}(A).$$

Следовательно, обе линейные функции $\sum p_i \cdot (x_i - a_i)$ и $\sum q_i \cdot (x_i - a_i)$ тождественны; но тогда $\omega(X) = \tilde{\omega}(X)$, ч. т. д.

Теорема. Достаточное условие дифференцируемости. Если функция $f(X)$:

1° *в окрестности точки A имеет производные по каждому аргументу,*

2° *эти производные непрерывны в точке A,*

то функция $f(X)$ дифференцируема в точке A.

Доказательство. Преобразуем приращение функции $f(x, y, z)$ по формуле Лагранжа:

$$f(x, y, z) - f(a, b, c) = (x-a) f'_x(X_1) + (y-b) f'_y(X_2) + (z-c) f'_z(X_3),$$

где $X(x, y, z)$ — любая точка в достаточно малой окрестности точки $A(a, b, c)$. Так как производная f'_x непрерывна в точке A, то разность $f'_x(X) - f'_x(A)$ есть функция, непрерывная в точке A и равная нулю в этой точке; следовательно,

$$f'_x(X_1) = f'_x(A) + \omega_1(X),$$

где

$$\lim_{X \to A} \omega_1(X) = \omega_1(A) = 0.$$

На аналогичном основании

$$f'_y(X_2) = f'_y(A) + \omega_2(X) \quad \text{и} \quad f'_z(X_3) = f'_z(A) + \omega_3(X),$$

откуда найдем:

$$f(X) - f(A) = (x-a) f'_x(A) + (y-b) f'_y(A) + (z-c) f'_z(A) + [\omega_1(X)(x-a) + \omega_2(X)(y-b) + \omega_3(X)(z-c)].$$

Следовательно, функция $f(X)$ дифференцируема в точке A, ч. т. д.

Примечание. Непрерывность производных не является необходимым условием дифференцируемости. Пример дифференцируемой функции, имеющей разрывные производные, приведен ниже (см. пример 3).

Следствие. *Всякая функция, гладкая в области G, дифференцируема в этой области.*

Примеры.

1. Непрерывная функция $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ недифференцируема в точке $O(0, 0)$.

В самом деле, в точке $O(0, 0)$ не выполнено необходимое условие дифференцируемости, так как производные $f'_x(0, 0)$ и $f'_y(0, 0)$ не существуют.

2. Положим $f(x, y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. В точке $O(0, 0)$ функция непрерывна (согласно принципу продолжения по непрерывности):

$$\lim_{(x, y) \to (0, 0)} f(x, y) = f(0, 0) = 0;$$

и имеет производные $f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0$, ибо на координатных осях $f(x, y) = \text{const} = 0$. Функция недифференцируема в точке $O(0, 0)$. В самом деле, ее приращение

$$f(x, y) - f(0, 0) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{xy}{x^2 + y^2} \cdot \rho$$

не может быть представлено в виде $\omega\rho$, так как

$$\lim_{X\to O}\frac{xy}{x^2+y^2}$$

не существует.

3. $$f(X)=f(x,\ y)=(x^2+y^2)\cdot\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Эта функция непрерывна в каждой точке плоскости.
В точке $O(0,\ 0)$ имеем $\lim\limits_{X\to O} f(X)=0$, поэтому $f(0,\ 0)=0$ (по принципу продолжения).

а) В каждой точке $A\neq 0$ производные существуют, в чем убеждаемся непосредственным вычислением:

$$f'_x(x,\ y)=-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}+2x\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Аналогично

$$f'_y(x,\ y)=-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}+2y\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Вычислим производные в точке $O(0,\ 0)$:

$$f'_x(0,\ 0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,\ 0)-f(0,\ 0)}{x-0}=\lim\frac{x^2\sin\frac{1}{|x|}}{x}=\lim x\sin\frac{1}{|x|}=0.$$

Аналогично $f'_y(0,\ 0)=0$.

b) Производные $f'_x(0,\ 0)$ и $f'_y(0,\ 0)$ разрывны в точке O.

Докажем, например, что $\lim\limits_{X\to O} f'_x(x,\ y)$ не существует.

Чтобы в этом убедиться, достаточно рассмотреть $f'_x(x,\ y)$ на оси $y=0$ при $x>0$:

$$f'_x(x,\ 0)=\cos\frac{1}{x}+2x\sin\frac{1}{x}.$$

Предел второго слагаемого в точке 0 равен нулю, а предел первого слагаемого не существует.

Аналогично докажем, что $\lim\limits_{X\to O} f'_y(x,\ y)$ не существует.

c) Функция $f(X)$ дифференцируема в точке O.
Действительно,

$$f(X)-f(O)=(x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=\rho\sqrt{x^2+y^2}\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Положив

$$l(x,\ y)=0\cdot(x-0)+0\cdot(y-0)=0$$

$$\text{и}\quad\omega(x,\ y)=\sqrt{x^2+y^2}\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=\rho\sin\frac{1}{\rho},$$

имеем:

$$f(X)-f(O)=l(x,\ y)+\omega\cdot\rho,$$

где $\lim\limits_{X\to O}\omega(x,\ y)=\lim\limits_{\rho\to 0}\rho\sin\frac{1}{\rho}=0.$

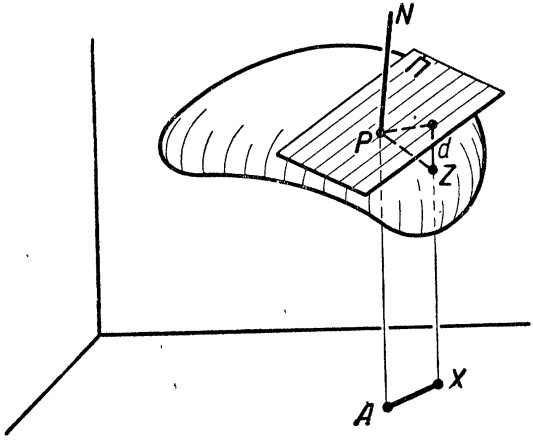
§ 26. Касательная плоскость к поверхности

Дан простой кусок поверхности и некоторая его некраевая точка P.

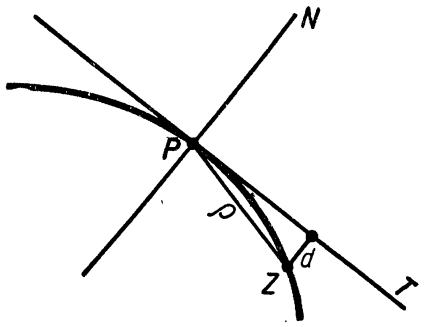
Определение. *Плоскость* Π *называется касательной плоскостью к поверхности в точке* P, *если расстояние* $d(Z, \Pi)$ *от точки* Z, *лежащей на поверхности, до плоскости* Π *может быть представлено в виде произведения*

$$d(Z, \Pi) = \omega(Z) \cdot \rho(Z, P) \quad \text{(черт. 103), где} \quad \lim_{Z \to P} \omega(Z) = 0.$$

Иными словами, плоскость Π называется касательной плоскостью к поверхности в точке P, если отношение расстояния точки Z поверх-



Черт. 103.



Черт. 104.

ности от плоскости Π к расстоянию точки Z от точки P имеет предел (в точке P), равный нулю:

$$\lim_{Z \to P} \frac{d(Z, \Pi)}{\rho(Z, P)} = \lim \omega(Z) = 0.$$

Прямая PN, перпендикулярная плоскости Π, называется нормалью к поверхности в точке P.

Всякая плоскость, проходящая через нормаль PN, пересекает поверхность по линии, а касательную плоскость — по прямой PT, касательной к этой линии в точке P. В самом деле (черт. 104) секущая PZ образует с прямой PT угол

$$\alpha = \arcsin \frac{d(Z, \Pi)}{\rho(Z, \Pi)} = \arcsin \omega(Z).$$

Следовательно, $\lim_{Z \to P} \alpha = 0$, т. е. прямая PT есть предельное положение секущей PZ.

Теорема. *В данной точке может существовать не более одной касательной плоскости к поверхности.*

Доказательство. Предположим, что в точке P существуют две различные касательные плоскости Π и Π', тогда плоскость, проходящая через обе соответствующие нормали PN и PN', пересекла бы поверхность по линии, имеющей в точке P две различные касательные PT и PT', что невозможно, ч. т. д.

Предположим, что функция $Z = f(x, y)$ непрерывна в окрестности точки $A(a, b)$.

Теорема. *Для существования касательной плоскости непараллельной оси OZ в точке $P(a, b, f(a, b))$ к поверхности $z = f(x, y)$ необходимо и достаточно, чтобы функция $f(x, y)$ была дифференцируема в точке $A(a, b)$.*

Доказательство. Условие достаточно. Если функция $f(x, y)$ дифференцируема в точке $A(a, b)$, то

$$f(x, y) - f(a, b) = f'_x(a, b)(x - a) + f'_y(a, b)(y - b) + \omega\rho(X, A). \quad (1)$$

Докажем, что

$$Z - f(a, b) = f'_x(a, b)(x - a) + f'_y(a, b)(y - b) \qquad (\Pi)$$

есть уравнение касательной плоскости к графику в точке $P(a, b, f(a, b))$. В самом деле, как известно из аналитической геометрии, расстояние точки $Z(x, y, f(x, y))$ поверхности до плоскости Π пропорционально результату подстановки координат точки Z в уравнение (Π) после переноса его членов в одну часть:

$$d(Z, \Pi) = \lambda \,|\, f(x, y) - f(a, b) - f'_x(a, b)(x - a) - f'_y(a, b)(y - b) \,|.$$

В силу (1) имеем $d(Z, \Pi) = \lambda \,|\, \omega \,|\, \rho(X, A)$.

Но отрезок AX есть проекция на плоскость (x, y) соответствующей хорды поверхности PZ (черт. 103); следовательно,

$$\rho(A, X) \leqslant \rho(P, Z), \text{ откуда } d(Z, \Pi) \leqslant \lambda \,|\, \omega \,|\, \rho(P, Z),$$

т. е. $d(Z, \Pi)$ имеет вид $\omega_1\rho$, значит, (Π) есть касательная плоскость к графику в точке P.

Условие необходимо. Допустим, что существует касательная плоскость Π в точке $P(a, b, f(a, b))$, не параллельная оси OZ:

$$Z - f(a, b) - p_1 \cdot (x - a) - p_2 \cdot (y - b) = 0.$$

Расстояние от точки $Z(x, y, f(x, y))$ поверхности до этой плоскости равно:

$$d(Z, \Pi) = \lambda [f(x, y) - f(a, b) - p_1 \cdot (x - a) - p_2 \cdot (y - b)]. \quad (2)$$

Так как Π есть касательная плоскость, то

$$d(Z, \Pi) = \omega \cdot \rho(Z, P), \text{ где } \lim_{X \to A} \omega = 0. \quad (3)$$

Пусть α — острый двугранный угол, образованный касательной плоскостью и плоскостью (x, y). В достаточно малой окрестности точки P луч PZ образует как угодно малый угол с касательной плоскостью II.

В самом деле, этот угол равен $\arcsin \frac{d(Z, \Pi)}{\rho(P, Z)} = \arcsin \omega$; следовательно, в достаточно малой окрестности точки P отрезок PZ образует с плоскостью XOY угол (острый), не больший $\alpha + \varepsilon$, а потому

$$\rho(P, Z) \leqslant \frac{\rho(A, X)}{\cos(\alpha + \varepsilon)}.$$

Из соотношений (2) и (3) находим:

$$f(x, y) - f(a, b) = p_1 \cdot (x - a) + p_2 \cdot (y - b) + \frac{1}{\lambda} \omega\rho(P, Z);$$

но так как

$$\frac{1}{\lambda} \omega\rho(P, Z) \leqslant \frac{\omega}{\lambda \cos(\alpha + \varepsilon)} \cdot \rho(A, X),$$

то слагаемое $\frac{1}{\lambda} \omega\rho(P, Z)$ имеет вид $\omega_1 \cdot \rho(A, X)$. Следовательно, функция $f(x, y)$ дифференцируема в точке A и

$$df(x, y; A) = p_1 \cdot (x - a) + p_2 \cdot (y - b), \qquad \text{ч. т. д.}$$

Из сказанного вытекает геометрическая интерпретация дифференциала функции двух аргументов: *дифференциал*

$$df(x, y; a, b) = f'_x(a, b)(x - a) + f'_y(a, b)(y - b)$$

есть приращение аппликаты касательной плоскости

$$Z - f(a, b) = f'_x(a, b)(x - a) + f'_y(a, b)(y - b)$$

в данной точке к графику функции.

Примеры.

1. Составить уравнение касательной плоскости к параболоиду $z = ax^2 + by^2$ в данной точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Функция $ax^2 + by^2$ дифференцируема в любой точке. Так как

$$f'_x(x_0, y_0) = 2ax_0, \quad f'_y(x_0, y_0) = 2by_0,$$

то искомое уравнение имеет вид:

$$Z - z_0 = 2ax_0(x - x_0) + 2by_0(y - y_0).$$

Приняв во внимание, что точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ удовлетворяет уравнению параболоида $z_0 = 2ax_0^2 + 2by_0^2$,
получим окончательно:

$$Z = 2ax_0x + 2by_0y.$$

2. Поверхность полости конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ не имеет касательной плоскости в вершине, так как функция $\sqrt{x^2 + y^2}$ недифференцируема в точке $O(0, 0)$.

3. Можно ли определить касательную плоскость к поверхности (по аналогии с определением касательной к линии) как предельное положение плоскости, проходящей через три точки: данную точку и две другие точки, достаточно близкие к данной?

Ответ отрицательный, так как предельное положение, о котором идет речь, не существует. Рассмотрим, например сферу. Пусть П есть произвольная плоскость, проходящая через данную точку M и пересекающая сферу по некоторой окружности K. Будем выбирать точки M_1 и M_2 на окружности K, тогда предельным положением плоскости, проходящей через точки M, M_1, M_2, будет плоскость П. Таким образом, при различных специальных способах выбора точек M, M_1 и M_2 в качестве предельного положения может быть получена любая секущая плоскость.

§ 27. Дифференцирование сложных функций

Теорема. *Если каждая из функций*

$$x_1 = x_1(t_1, t_2, \ldots, t_k), \ldots, x_n = x_n(t_1, t_2, \ldots, t_k)$$

дифференцируема в точке $T_0\left(t_1^{(0)}, t_2^{(0)}, \ldots, t_k^{(0)}\right)$, *а функция* $f(X) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *дифференцируема в соответствующей точке* $X_0\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right)$ (где $x_1^{(0)} = x_1(T_0), \ldots, x_n^{(0)} = x_n(T_0)$), *то сложная функция*

$$F(T) = f\left(x_1(t_1, t_2, \ldots, t_k), x_2(t_1, t_2, \ldots, t_k), \ldots, x_n(t_1, t_2, \ldots, t_k)\right)$$

дифференцируема в точке T_0.

Доказательство. Положим для определенности

$$z = f(x, y); \quad x = x(u, v, w); \quad y = y(u, v, w).$$

Обозначим

$$f\left(x(u, v, w), y(u, v, w)\right) = F(u, v, w).$$

По условию x и y — дифференцируемые функции аргументов u, v, w в точке (u_0, v_0, w_0) и $f(x, y)$ — дифференцируемая функция аргументов x и y в точке $x_0 = x(u_0, v_0, w_0)$, $y_0 = y(u_0, v_0, w_0)$. Следовательно,

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) + \\ + \omega_1(x, y)(x - x_0) + \omega_2(x, y)(y - y_0),$$

где $\omega_1(x, y)$ и $\omega_2(x, y)$ — непрерывные в точке (x_0, y_0) функции, равные нулю в этой точке. Приращения промежуточных аргументов (в силу их дифференцируемости) выражаются формулами:

$$x - x_0 = x(u, v, w) - x(u_0, v_0, w_0) = x'_{u_0} \cdot (u - u_0) + x'_{v_0} \cdot (v - v_0) + \\ + x'_{w_0} \cdot (w - w_0) + \omega_3(u, v, w)\rho;$$

$$y - y_0 = y(u, v, w) - y(u_0, v_0, w_0) = y'_{u_0} \cdot (u - u_0) + y'_{v_0} \cdot (v - v_0) + \\ + y'_{w_0} \cdot (w - w_0) + \omega_4(u, v, w)\rho,$$

где ρ — расстояние от точки (u_0, v_0, w_0) до точки (u, v, w) и ω_3 и ω_4 — непрерывные в точке (u_0, v_0, w_0) функции, равные в этой точке нулю, а x'_{u_0}, x'_{v_0} и т. д. — значения производных в точке (u_0, v_0, w_0).

Таким образом,

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = (f'_{x_0} + \omega_1)[x'_{u_0} \cdot (u - u_0) + x'_{v_0} \cdot (v - v_0) + x'_{w_0} \cdot (w - w_0) + \omega_3\rho] + (f'_{y_0} + \omega_2)[y'_{u_0} \cdot (u - u_0) + y'_{v_0} \cdot (v - v_0) + y'_{w_0} \cdot (w - w_0) + \omega_4\rho],$$

или:

$$F(u, v, w) - F(u_0, v_0, w_0) = [(f'_{x_0}x'_{u_0} + f'_{y_0}y'_{u_0})(u - u_0) + (f'_{x_0}x'_{v_0} + f'_{y_0}y'_{v_0})(v - v_0) + (f'_{x_0}x'_{w_0} + f'_{y_0}y'_{w_0})(w - w_0)] + [(f'_{x_0} + \omega_1)\omega_3 + (f'_{y_0} + \omega_2)\omega_4]\rho + [(\omega_1 x'_{u_0} + \omega_2 y'_{u_0})(u - u_0) + (\omega_1 x'_{v_0} + \omega_2 y'_{v_0})(v - v_0) + (\omega_1 x'_{w_0} + \omega_2 y'_{w_0})(w - w_0)].$$

Выражение в первых квадратных скобках есть линейная функция аргументов u, v, w, равная в точке (u_0, v_0, w_0) нулю. Выражение во вторых квадратных скобках есть функция аргументов u, v, w, непрерывная в точке (u_0, v_0, w_0) и равная нулю в этой точке; в самом деле, $\omega_1(x, y)$ и $\omega_2(x, y)$ суть сложные функции аргументов u, v, w — непрерывные в точке (u_0, v_0, w_0) и равные нулю в этой точке; $\omega_3(u, v, w)$, $\omega_4(u, v, w)$ непрерывны и равны нулю в точке u_0, v_0, w_0; а $f_{x_0}(x_0, y_0)$ и $f_{y_0}(x_0, y_0)$ — константы.

Выражение в третьей квадратной скобке (в силу теоремы, стр. 111) равно $\omega_5\rho$.

Значит, $(f_{x_0} + \omega_1)\omega_3 + (f_{y_0} + \omega_2)\omega_4 + \omega_5 = \omega(u, v, w)$ есть функция аргументов u, v, w, непрерывная и равная нулю в точке (u_0, v_0, w_0). Следовательно, $F(u, v, w)$ есть дифференцируемая в точке (u_0, v_0, w_0) функция, ч. т. д.

Коэффициентами при приращениях $u - u_0$, $v - v_0$, $w - w_0$ служат производные сложной функции:

$$F'_{u_0} = f'_{x_0}x'_{u_0} + f'_{y_0}y'_{u_0}; \quad F'_{v_0} = f'_{x_0}x'_{v_0} + f'_{y_0}y'_{v_0}; \quad F'_{w_0} = f'_{x_0}x'_{w_0} + f'_{y_0}y'_{w_0}.$$

Доказательство применимо в общем случае сложной функции с любым числом промежуточных аргументов. Следовательно, если

$$F(T) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

где

$$x_1 = x_1(t_1, t_2, \ldots, t_k), \ldots, x_n = x_n(t_1, t_2, \ldots, t_k),$$

то для частных производных получим выражения:

$$\frac{\partial F}{\partial t_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t_1} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial x_n}{\partial t_1};$$

$$\frac{\partial F}{\partial t_2} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_2} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t_2} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial x_n}{\partial t_2};$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\partial F}{\partial t_k} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_k} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t_k} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial x_n}{\partial t_k}.$$

Если эти равенства умножить соответственно на приращения аргументов Δt_1, Δt_2, ..., Δt_k и сложить «по столбцам», то, как нетрудно видеть, коэффициентами при производных функции f будут служить дифференциалы промежуточных аргументов. Так, например, коэффициент при $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ равен

$$\frac{\partial x_1}{\partial t_1}\Delta t_1+\frac{\partial x_1}{\partial t_2}\Delta t_2+\ \ldots\ +\frac{\partial x_1}{\partial t_k}\Delta t_k=dx_1.$$

Следовательно, получим формулу:

$$dF=\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2+\ \ldots\ +\frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n.$$

Условились дифференциалами непосредственных аргументов считать их приращения. При таком соглашении имеет место следующая теорема инвариантности формулы дифференциала.

Теорема. *Формула дифференциала*

$$df(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)=\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2+\ \ldots\ +\frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n$$

справедлива всегда вне зависимости от того, являются ли x_1, x_2, ..., x_n *непосредственными или промежуточными аргументами.*

В частном случае, когда промежуточные аргументы x_1, x_2, ..., x_n суть функции одного аргумента t, получим следующую формулу производной сложной функции:

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\frac{dx_1}{dt}+\frac{\partial f}{\partial x_2}\cdot\frac{dx_2}{dt}+\ \ldots\ +\frac{\partial f}{\partial x_n}\cdot\frac{dx_n}{dt}.$$

Ниже приводятся примеры на вычисление производных от сложных функций.

Примеры.

1. Покажем, что формулы дифференциалов суммы произведения и частного применимы для функции с любым числом аргументов:

$$d(u+v)=du+dv;\quad d(uv)=u\,dv+v\,du;$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\,du-u\,dv}{v^2},\qquad (v\neq 0);$$

где u и v — дифференцируемые функции от любого числа аргументов. Рассмотрим, например, вторую формулу. Функция $F(u, v)=uv$ дифференцируема как функция аргументов u и v, так как она имеет непрерывные производные $F'_u=v$ и $F'_v=u$; следовательно, дифференцируема и сложная функция $u(X)\cdot v(X)$; имеем:

$$d(uv)=\frac{\partial F}{\partial u}du+\frac{\partial F}{\partial v}dv=v\,du+u\,dv.$$

2. Найти выражения для производных от сложной функции

$$F(x,\ y)=f(x,\ y,\ z),\quad \text{где}\quad z=\varphi(x,\ y).$$

Будем рассматривать аргументы функции f как промежуточные

$$x = x, \quad y = y, \quad z = \varphi(x, y),$$

тогда по общей формуле:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}.$$

Так как $\frac{\partial x}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$ и $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$, то

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x};$$ аналогично найдем: $$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

3. Найти V'_x и V'_y, где $V = f(x + y, xy)$. Полагая $x + y = u$, $xy = v$, примем u и v за промежуточные аргументы: $V = f(u, v)$.

Имеем:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v} y,$$

и аналогично:

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v} x.$$

Этот же результат можно записать так:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = f'_u(x + y, xy) + f'_v(x + y, xy) \cdot y;$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = f'_u(x + y, xy) + f'_v(x + y, xy) \cdot x.$$

Другое решение. По свойству инвариантности формулы дифференциала имеем:

$$dV = f'_u(x + y, xy)\, d(x + y) + f'_v(x + y, xy)\, d(xy) =$$

$$= f'_u(x + y, xy)(dx + dy) + f'_v(x + y, xy)(y\, dx + x\, dy) =$$

$$= \left[f'_u(x + y, xy) + f'_v(x + y, xy)\, y\right] dx + \left[f'_u(x+y, xy)+f'_v(x+y, xy)\, x\right] dy.$$

Коэффициенты при dx и dy суть частные производные.

4. Пусть $z = f(x, y)$ — данная функция; при переходе к полярным координатам получим $z = f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)$.

Преобразуем выражение $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$ к полярным координатам, рассматривая z как функцию аргументов ρ и φ.

Имеем:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

Но $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ и $\varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}$,

откуда

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \cos \varphi; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 + y^2} = -\frac{\sin \varphi}{\rho};$$

аналогично:

$$\frac{\partial \rho}{\partial y} = \sin \varphi \quad \text{и} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\cos \varphi}{\rho};$$

следовательно,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial \rho}\cos\varphi - \frac{\partial z}{\partial \varphi}\frac{\sin\varphi}{\rho};$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial \rho}\sin\varphi + \frac{\partial z}{\partial \varphi}\frac{\cos\varphi}{\rho}.$$

По возведении в квадрат и сложении получим:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial \rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2.$$

5. Доказать, что функция $z = y\varphi(x^2 - y^2)$ (где φ — произвольная дифференцируемая функция) удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2};$$

имеем:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \varphi'(x^2 - y^2)\cdot 2xy;$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \varphi(x^2 - y^2) - 2y^2\varphi'(x^2 - y^2).$$

По умножении на $\frac{1}{x}$ и $\frac{1}{y}$ и сложении получим в правой части:

$$\frac{\varphi(x^2 - y^2)}{y} = \frac{z}{y^2}.$$

6. Формула

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} \qquad (1)$$

производной сложной функции $f(x(t), y(t))$, вообще говоря, не имеет места, если функция $f(x, y)$ имеет производные, но не является дифференцируемой.

Положим, например: $f = \frac{x|y|}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

Эта функция (см. пример 2, стр. 114) недифференцируема в точке $O(0, 0)$ и имеет производные, равные нулю, в этой точке:

$$f'_x(0, 0) = 0, \quad f'_y(0, 0) = 0.$$

Положив $x = t$, $y = t$, получим сложную функцию $F(t) = f(t, t) = \frac{t}{\sqrt{2}}$; следовательно, $F'(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ при всех значениях t. Воспользовавшись формально равенством (1), получим неверный результат:

$$F'(0) = f'_x(0, 0)\cdot 1 + f'_y(0, 0)\cdot 1 = 0.$$

§ 28. Производная функции по направлению

Рассмотрим функцию $F(x, y, z)$, определенную в окрестности точки $A(a, b, c)$ на данном луче l с концом в точке A:

$$x = a + \rho\cos\alpha, \quad y = b + \rho\cos\beta, \quad z = c + \rho\cos\gamma, \qquad (l)$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы l.

Пусть $X(x, y, z) \in l$ — произвольная точка луча l.

Определение. *Производной* $\frac{df}{dl}$ *функции* $f(X)$ *в точке* A *по направлению* l *называется предел в точке* A *отношения приращения функции на* l *к расстоянию* $\rho(A, X)$:

$$\frac{df}{dl} = \lim_{X \to A} \frac{f(X) - f(A)}{\rho(A, X)}.$$

Производную $\frac{df}{dl}$ можно вычислить, взяв правую производную по ρ в точке $\rho = 0$ от сложной функции:

$$f(a + \rho\cos\alpha,\ b + \rho\cos\beta,\ c + \rho\cos\gamma).$$

Если функция $f(x, y, z)$ дифференцируема в точке $A(a, b, c)$, то, применив правило дифференцирования сложной функции, получим:

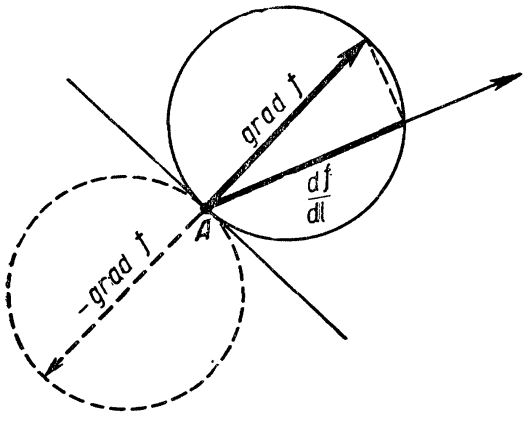
$$\frac{df}{dl} = \frac{df}{d\rho} = f'_x(A)\cos\alpha + f'_y(A)\cos\beta + f'_z(A)\cos\gamma.$$

Для функции двух аргументов $f(x, y)$ последняя формула примет вид:

$$\frac{df}{dl} = f'_x(A)\cos\alpha + f'_y(A)\sin\alpha,$$

где α — угол луча l с осью абсцисс.

Предположим, что в точке A хотя бы одна из производных отлична от нуля.



Черт. 105.

Определение. *Вектор, проекции которого на координатные оси равны соответствующим производным функции* $f(X)$ *в точке* A, *называется градиентом функции* f *в точке* A.

Градиент обозначается так:

$$\operatorname{grad} f(A) = f'_x(A)\,\mathbf{i} + f'_y(A)\,\mathbf{j} + f'_z(A)\,\mathbf{k}.$$

Из формулы для производной по направлению следует, что $\frac{df}{dl}$ есть скалярное произведение градиента на единичный вектор $\mathbf{l}$ направления l. Следовательно, *производная по направлению* l *равна проекции градиента на это направление*:

$$\frac{df}{dl} = \operatorname{grad} f \cdot \mathbf{l} = |\operatorname{grad} f|\cos\varphi,$$

где φ — угол между $\operatorname{grad} f$ и l (черт. 105).

Наибольшее значение $\frac{df}{dl}$ имеет, если $\cos\varphi = 1$, т. е. если направление l совпадает с направлением градиента. Производная в направлении градиента равна

$$\frac{df}{dg} = f'_x \frac{f'_x}{\sqrt{f'^2_x + f'^2_y + f'^2_z}} + f'_y \frac{f'_y}{\sqrt{f'^2_x + f'^2_y + f'^2_z}} + \\ + f'_z \frac{f'_z}{\sqrt{f'^2_x + f'^2_y + f'^2_z}} = \sqrt{f'^2_x + f'^2_y + f'^2_z}.$$

Производная в направлении, противоположном градиенту, равна $-\sqrt{f'^2_x + f'^2_y + f'^2_z}$.

Примеры.

1. Функция $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ недифференцируема в начале координат. По любому направлению существует производная в точке $O(0, 0)$, равная 1:

$$\lim_{\rho \to 0+} \frac{f(\rho\cos\alpha, \rho\sin\alpha)}{\rho} = \lim \frac{\rho}{\rho} = 1.$$

Этот пример показывает, что дифференцируемость есть достаточное, но не необходимое условие существования производной по любому направлению.

2. Функция (см. пример 6, стр. 48)

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } y \leqslant 0 \text{ или } y \geqslant x^2, \\ 1, & \text{если } 0 < y < x^2 \end{cases}$$ (черт. 59)

разрывна в точке $O(0, 0)$. На любом данном луче эта функция равна нулю в достаточно малой окрестности точки O.

Следовательно, в точке O производная $\frac{df}{dl}$ по любому направлению равна нулю.

§ 29. Теорема Эйлера об однородных функциях

Предположим, что область определения функции удовлетворяет следующему условию: если $f(X)$ определена в точке X_0, то она определена на всем луче OX_0, соединяющем начало координат O с точкой X_0, кроме, может быть, самой точки O.

Определение. *Функция $f(X)$ называется однородной степени k, если имеет место тождество*

$$f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) = t^k f(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

где t — произвольное положительное число, а $X(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — произвольная точка, принадлежащая области определения $f(X)$.

Примеры.

$ax^2 + 2bxy + cy^2$ есть однородный многочлен второй степени; $(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^m$ есть однородный многочлен степени m:

$\sqrt{x^2+y^2}$ однородная функция степени 1.

$\frac{1}{x+y}$ » » » -1.

$\sin\frac{y}{x}+2$ » » » 0.

$\sqrt{x-y}$ » » » $\frac{1}{2}$.

Теорема Эйлера. *Если однородная функция $f(X)$ степени k дифференцируема в точке $X \neq 0$, то имеет место тождество:*

$$x_1 f'_{x_1}(X) + x_2 f'_{x_2}(X) + \ldots + x_n f'_{x_n}(X) = kf(X).$$

Доказательство. По условию имеем тождество:

$$f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) = t^k f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Продифференцируем обе части этого тождества по параметру t в точке $t = 1$. Производную от левой части находим по правилу дифференцирования сложной функции:

$$\left[\frac{df}{dt}\right]_{t=1} = \left[\sum f'_{x_i}(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n)\frac{d(tx_i)}{dt}\right]_{t=1} =$$

$$= \sum f'_{x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, x_i.$$

Производная правой части равна

$$[kt^{k-1} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)]_{t=1} = kf(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Следовательно,

$$\sum x_i f'_{x_i}(X) = kf(X), \quad \text{ч. т. д.}$$

Пример.

Для однородной функции второй степени

$$f(x, y) = \frac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}} - xy$$

имеем:

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = x\left(\frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x^2y^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} - y\right) +$$

$$+ y\left(\frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{y^3x}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} - x\right) = 2\left(\frac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}} - xy\right) = 2f(x, y).$$

Обратная теорема. *Если функция $f(X)$,*

1° *будучи определенной в какой-либо точке X, где $\rho(O, X) \neq 0$ определена на луче OX (за исключением, может быть, точки O),*

2° *дифференцируема в любой точке* $X \neq O$ *области определения,*

3° *удовлетворяет условию* $\sum x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = kf(X)$,

то $f(X)$ *является однородной функцией степени* k.

Доказательство. Рассмотрим произвольную точку $X(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, в которой определена функция $f(X)$, и докажем, что в любой точке луча OX $\xi_i = tx_i$ имеет место тождество

$$f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) = t^k f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Для этого докажем, что функция

$$\psi(t) = \frac{f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n)}{t^k}$$

есть константа в интервале $0 < t < +\infty$. Вычислим $\psi'(t)$:

$$\psi'(t) = \frac{\sum tx_i f_{x_i}(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) - kf(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n)}{t^{k+1}} =$$

$$= \frac{\sum \xi_i f_{x_i}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) - kf(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)}{t^{k+1}} = 0.$$

Следовательно,

$$\psi(t) = \text{const} = \psi(1) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

т. е. $f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) = t^k f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, ч. т. д.

§ 30. Частные производные высших порядков

Рассмотрим производную $f'_{x_i}(X)$ по аргументу x_i от данной функции $f(X)$; предположим, что $f'_{x_i}(X)$ есть функция, имеющая производную (конечную или бесконечную) по аргументу x_j в каждой точке некоторого множества $\mathfrak{M}$. Производная по аргументу x_j от производной $f'_{x_i}(X)$ называется второй производной (частной), или производной второго порядка, функции $f(X)$ по аргументам x_i и x_j. Эта производная обозначается так: $f''_{x_i x_j}(X)$ или $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$.

Аналогично последовательно определяются частные производные третьего, четвертого и т. д. порядков.

Определение. *k-й производной от функции* $f(X)$ *по* k *аргументам* $x_\alpha, x_\beta, \ldots, x_\lambda, x_\mu$ *называется производная по аргументу* x_μ *от производной по аргументам* $x_\alpha, x_\beta, \ldots, x_\lambda$.

Эта производная обозначается так:

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_\alpha \partial x_\beta \ldots \partial x_\lambda \partial x_\mu}.$$

Таким образом, в силу определения,

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_\alpha \partial x_\beta \ldots \partial x_\lambda \partial x_\mu} = \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_\alpha \partial x_\beta \ldots \partial x_\lambda}\right).$$

Аргументы, по которым берутся производные, могут повторяться. При последовательном вычислении производных по одному и тому же аргументу принята следующая сокращенная запись:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\,\partial y};\quad \frac{\partial^4 f}{\partial y\,\partial y\,\partial y\,\partial y}=\frac{\partial^4 f}{\partial y^4};\quad \frac{\partial^4 f}{\partial x\,\partial x\,\partial y\,\partial y}=\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\,\partial y^2}\text{ и т. п.}$$

Производные, в которых дифференцирование выполняется по различным аргументам, называются смешанными: таковы, например, производные

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y};\quad \frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y^2};\quad \frac{\partial^4 f}{\partial x^2\,\partial y^2}\text{ и т. п.}$$

Примеры.

1. $f(x, y)=\ln(x^2+y^2)$, вычислить $\dfrac{\partial^4 f}{\partial x^2\,\partial y^2}$.

Имеем:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{2x}{x^2+y^2};\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2x}{x^2+y^2}\right)=2\frac{(x^2+y^2)-2x^2}{(x^2+y^2)^2}=$$

$$=\frac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2};\quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2\,\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(2\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\right)=$$

$$=2\frac{2y(x^2+y^2)^2-(y^2-x^2)\,4y(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^4}=\frac{4(3x^2y-y^3)}{(x^2+y^2)^3};$$

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\,\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left[4\frac{3x^2y-y^3}{(x^2+y^2)^3}\right]=$$

$$=4\frac{(x^2+y^2)^3(3x^2-3y^2)-(3x^2y-y^3)\,6y(x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)^6}=12\frac{x^4+y^4-6x^2y^2}{(x^2+y^2)^4}.$$

2. $u=e^{xy+z}$, вычислить $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x\,\partial z^2\,\partial y}$.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=ye^{xy+z};\quad \frac{\partial u}{\partial x\,\partial z}=\frac{\partial(ye^{xy+z})}{\partial z}=ye^{xy+z};$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial z^2}=\frac{\partial(ye^{xy+z})}{\partial z}=ye^{xy+z};$$

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x\,\partial z^2\,\partial y}=\frac{\partial(ye^{xy+z})}{\partial y}=xye^{xy+z}+e^{xy+z}=e^{xy+z}(xy+1).$$

Теорема. *Если в некоторой окрестности точки $A(a, b)$ функция двух аргументов $f(x, y)$ имеет производные $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$, дифференцируемые в точке A, то*

$$f''_{yx}(a, b)=f''_{xy}(a, b).$$

Доказательство. Так как производные первого порядка дифференцируемы, то в точке A существуют производные второго порядка и имеют место равенства:

$$f'_x(x, y)-f'_x(a, b)=f''_{xx}(a, b)(x-a)+f''_{xy}(a, b)(y-b)+\omega\rho;$$

$$f'_y(x, y)-f'_y(a, b)=f''_{yx}(a, b)(x-a)+f''_{yy}(a, b)(y-b)+\omega_1\rho.$$

Рассмотрим выражение

$$\Delta = f(a+t,\ b+t) - f(a+t,\ b) - f(a,\ b+t) + f(a,\ b)$$

при достаточно малом значении t; введем вспомогательную функцию аргумента x, положив

$$\varphi(x) = f(x,\ b+t) - f(x,\ b);$$

тогда Δ можно рассматривать как приращение функции $\varphi(x)$:

$$\Delta = \varphi(a+t) - \varphi(a).$$

По теореме Лагранжа

$$\Delta = t\varphi'(a+\theta t) = t\left[f'_x(a+\theta t,\ b+t) - f'_x(a+\theta t,\ b)\right]; \qquad (1)$$

имеем:

$$f'_x(a+\theta t,\ b+t) - f'_x(a+\theta t,\ b) =$$

$$= \left[f'_x(a+\theta t,\ b+t) - f'_x(a,\ b)\right] - \left[f'_x(a+\theta t,\ b) - f'_x(a,\ b)\right].$$

В силу дифференцируемости функции f'_x в точке A имеем:

$$f'_x(a+\theta t,\ b+t) - f'_x(a,\ b) = f''_{xx}(a,\ b)\,\theta t + f''_{xy}(a,\ b)\,t + \omega_1 t$$

и

$$f'_x(a+\theta t,\ b) - f'_x(a,\ b) = f''_{xx}(a,\ b)\,\theta t + \omega_2 t,$$

где $\lim\limits_{t\to 0} \omega_1 = \lim\limits_{t\to 0} \omega_2 = 0$.

Подставив (1), получим:

$$\Delta = f''_{xy}(a,\ b)\,t^2 + \omega t^2, \quad \text{где } \omega = \omega_1 - \omega_2.$$

Рассмотрим вспомогательную функцию аргумента y:

$$\psi(y) = f(a+t,\ y) - f(a,\ y);$$

имеем:

$$\Delta = \psi(b+t) - \psi(b).$$

Повторив предыдущие рассуждения, найдем (поменяв местами аргументы x и y):

$$\Delta = t^2 f''_{yx}(a,\ b) + \bar{\omega}t^2.$$

Сопоставим оба выражения Δ:

$$f''_{xy}(a,\ b) + \omega = f''_{yx}(a,\ b) + \bar{\omega}.$$

Перейдя к пределу в точке $t = 0$, получим:

$$f''_{yx}(a,\ b) = f''_{xy}(a,\ b), \quad \text{ч. т. д.}$$

Следствие. Если в точке $A(a, b)$ все производные второго порядка непрерывны, то производные первого порядка дифференцируемы, а потому имеет место равенство:

$$f''_{xy}(a, b) = f''_{yx}(a, b).$$

Равенство вторых смешанных производных может не иметь места лишь в точках разрыва вторых производных.

Пример.

Вычислим производные $f''_{yx}(x, y)$ и $f''_{xy}(x, y)$ функции

$$f(x, y) = xy\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.$$

Функция $f(x, y)$ непрерывна во всей плоскости. В любой точке, отличной от $O(0, 0)$, первые и вторые производные вычисляются по обычным правилам:

$$f'_x(x, y) = y\left\{\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + \frac{4x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2}\right\};$$

$$f'_y(x, y) = x\left\{\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} - \frac{4x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2}\right\};$$

$$f''_{yx}(x, y) = f''_{xy}(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\left\{1 + \frac{8x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2}\right\}.$$

Вычислим $f''_{yx}(x, y)$ и $f''_{xy}(x, y)$ в точке $O(0, 0)$:

$$f''_{xy}(0, 0) = \lim_{y \to 0}\frac{f'_x(0, y) - f'_x(0, 0)}{y} = \lim\frac{-y}{y} = -1;$$

$$f''_{yx}(0, 0) = \lim_{x \to 0}\frac{f'_y(x, 0) - f'_y(0, 0)}{x} = \lim\frac{x}{x} = 1.$$

Равенство $f''_{xy} = f''_{yx}$ не имеет места в точке $O(0, 0)$; покажем, что f''_{xy} и f''_{yx} разрывны в этой точке. В точке (x, y), отличной от точки $O(0, 0)$:

$$f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y) = \frac{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}\left\{1 + \frac{8\left(\frac{y}{x}\right)^2}{\left[1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right]^2}\right\},$$

на луче $y = kx$, где $x \neq 0$,

$$f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y) = \frac{1 - k^2}{1 + k^2}\left[1 + \frac{8k^2}{(1 + k^2)^2}\right]$$

есть константа, значение которой не одно и то же для различных лучей. Следовательно, пределы

$$\lim f''_{xy}(x, y) \quad \text{и} \quad \lim f''_{yx}(x, y)$$

в точке $O(0, 0)$ не существуют, а потому производные $f''_x(x, y)$ и $f''_{yx}(x, y)$ разрывны.

Определение. *Функция n аргументов $f(X)$ называется дифференцируемой k раз в точке X_0, если все ее производные $k-1$-го порядка дифференцируемы в точке X_0.*

Для функции, дифференцируемой k раз в точке X_0, производные k-го порядка в этой точке существуют (в силу предположенной дифференцируемости производных $k-1$-го порядка), а производные $k-1$-го порядка и все производные более низких порядков существуют в окрестности точки X_0. Производные $k-1$-го порядка, будучи дифференцируемыми, непрерывны в точке X_0, а следовательно, ограничены в окрестности точки X_0. Производные $k-2$-го порядка непрерывны в окрестности точки X_0 (так как они имеют ограниченные производные) и дифференцируемы в точке X_0 (так как они имеют непрерывные производные в точке X_0). Все производные более низких порядков дифференцируемы в окрестности точки X_0.

Теорема. *Если функция $f(X)$ дифференцируема k раз в точке X_0, то все смешанные производные k-го порядка в этой точке, содержащие дифференцирования по одним и тем же аргументам одинаковое число раз и отличающиеся лишь порядком, в котором вычисляются производные по различным аргументам, равны между собой.*

Кратко теорему формулируют так: *если $f(X)$ дифференцируема k раз, то смешанная производная k-порядка не зависит от порядка дифференцирований по различным аргументам.*

Доказательство. Пусть вычисление какой-либо k-й производной в точке X_0 производится в следующем порядке: сначала вычисляется производная по аргументу x_i, потом по x_j (не исключена возможность, что $i=j$) и так далее и, наконец, по аргументу x_p. Изобразим символически эту операцию дифференцирования так:

$$\underbrace{i,\ j,\ \ldots,\ l,\ m,\ \ldots,\ p.}_{k \text{ раз}}$$

Докажем, что, не меняя значения производной, можно изменить порядок двух «соседних» дифференцирований.

В самом деле, после выполнения предыдущих дифференцирований, при соседних дифференцированиях по аргументам x_l и x_m следует считать прочие аргументы данными числами; в силу предыдущей теоремы результат дифференцирования по двум аргументам x_l и x_m получится тот же, если вычислить производную сначала по x_m, а затем по x_l. Все последующие дифференцирования не нарушат равенства получаемых смешанных производных, так как они (дифференцирования) выполняются по одним и тем же аргументам в одном и том же порядке.

Рассмотрим любую смешанную производную, содержащую дифференцирования по тем же аргументам, но в другом порядке:

$$\underbrace{r,\ s,\ \ldots,\ t,\ \ldots,\ q.}_{k \text{ раз}}$$

Как известно из алгебры, эта последняя перестановка может быть получена из первой путем ряда последовательных транспозиций соседних элементов. Но при транспозиции соседних элементов (т. е. соседних дифференцирований) смешанная производная не изменяется. Следовательно, обе рассматриваемые производные равны, ч. т. д.

§ 31. Производные высших порядков от сложных функций

Рассмотрим сложную функцию

$$F(T) = f\big(x_1(T),\ x_2(T),\ \ldots,\ x_n(T)\big),$$

где $f(X) = f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ — функция от n промежуточных аргументов:

$$x_i = x_i(t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_m), \quad \text{где } i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Будем предполагать, что функция $f(X)$ в окрестности точки X_0 имеет производные, дифференцируемые в точке X_0, а каждая из функций $x_i(T)$ имеет в окрестности точки T_0 производные, дифференцируемые в точке T_0.

Составим выражения для производных от сложной функции

$$\frac{\partial F}{\partial t_i} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial t_i} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial t_i} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\cdot\frac{\partial x_n}{\partial t_i}. \tag{1}$$

Производные $\dfrac{\partial F}{\partial t_i}$, рассматриваемые как функции аргументов $t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_m$, являются дифференцируемыми в точке T_0, так как каждая из производных $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}$ дифференцируема по теореме о дифференцируемости сложной функции, а производные $\dfrac{\partial x_k}{\partial t_i}$ дифференцируемы в точке T_0 (по условию). Производные второго порядка от сложной функции находятся по общим правилам: следует рассматривать каждый член в правой части выражения (1) как произведение, а первый множитель — как сложную функцию.

Если данные функции f и x_i в точках X_0 и T_0 (соответственно) имеют дифференцируемые производные второго порядка, то сложная функция имеет производные третьего порядка и т. д. Эти производные находятся последовательным дифференцированием.

Для иллюстрации произведем подробные вычисления вторых производных в случае $m = n = 2$. Имеем:

$$F(t_1,\ t_2) = f(x,\ y), \quad \text{где } x = x(t_1,\ t_2),\quad y = y(t_1,\ t_2)$$

и

$$\frac{\partial F}{\partial t_1} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t_1} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t_1}; \tag{2}$$

$$\frac{\partial F}{\partial t_2} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t_2} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t_2}. \tag{3}$$

Вычисляем вторые производные:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t_1^2} = \frac{\partial x}{\partial t_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial t_1} + \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial t_1^2} + \frac{\partial}{\partial t_1}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial t_1} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial t_1^2} =$$

$$= \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial x}{\partial t_1} + \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t_1}\right]\frac{\partial x}{\partial t_1} + \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\cdot\frac{\partial x}{\partial t_1} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial t_1}\right]\frac{\partial y}{\partial t_1} +$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial t_1^2} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial t_1^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial t_1}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial x}{\partial t_1}\frac{\partial y}{\partial t_1} +$$

$$+ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial t_1}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial t_1^2} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial t_1^2}.$$

Аналогично найдем:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t_2^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial t_2}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial x}{\partial t_2}\frac{\partial y}{\partial t_2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial t_2}\right)^2 +$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial t_2^2} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial t_2^2}.$$

Для нахождения второй смешанной производной $\frac{\partial^2 F}{\partial t_1\,\partial t_2}$ дифференцируем $\frac{\partial F}{\partial t_1}$ по аргументу t_2 (либо $\frac{\partial F}{\partial t_2}$ по аргументу t_1):

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t_1\,\partial t_2} = \frac{\partial}{\partial t_2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial t_1} + \frac{\partial}{\partial t_2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial t_1} + \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial t_1\,\partial t_2} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial t_1\,\partial t_2} =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial t_1}\frac{\partial x}{\partial t_2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial x}{\partial t_1}\frac{\partial y}{\partial t_2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial x}{\partial t_2}\frac{\partial y}{\partial t_1} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial t_1}\frac{\partial y}{\partial t_2} +$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 f}{\partial t_1\,\partial t_2} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 f}{\partial t_1\,\partial t_2}.$$

Примеры.

1. Положим $z = F(x, y)$, где $y = f(x)$; вычислим $\frac{d^2 z}{dx^2}$, рассматривая z как сложную функцию $z = F(x, f(x))$;
имеем:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}.$$

Далее находим производную по x от первого слагаемого по формуле дифференцирования сложной функции, а от второго слагаемого по формулам дифференцирования сложной функции и произведения:

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)\frac{dy}{dx}\right\} + \left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)\frac{dy}{dx}\right\}\frac{dy}{dx} +$$

$$+ \frac{\partial F}{\partial y}\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\frac{df}{dx} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \frac{\partial F}{\partial y}\left(\frac{d^2 f}{dx^2}\right).$$

2. Доказать, что функция $z = x^2\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ при произвольной (дважды дифференцируемой) функции $\varphi(t)$ удовлетворяет уравнению

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2z.$$

Имеем:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x\varphi\left(\frac{y}{x}\right) - \varphi'\left(\frac{y}{x}\right)y; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x\varphi'\left(\frac{y}{x}\right);$$

$$\begin{array}{rl} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right) - \dfrac{2y}{x}\varphi'\left(\dfrac{y}{x}\right) + \varphi''\left(\dfrac{y}{x}\right)\dfrac{y^2}{x^2} & \Big\| \; x^2 \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = -\varphi''\left(\dfrac{y}{x}\right)\dfrac{y}{x} + \varphi'\left(\dfrac{y}{x}\right) & \Big\| \; 2xy + \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \varphi''\left(\dfrac{y}{x}\right) & \Big\| \; y^2 \end{array}$$

$$x^2 z''_{xx} + 2xyz''_{xy} + y^2 z''_{yy} = 2x^2\varphi\left(\frac{y}{x}\right) = 2z.$$

3. Преобразовать выражение $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ к полярным координатам. Имеем (см. 4-й пример, стр. 122):

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \rho}\cos\varphi - \frac{\partial f}{\partial \varphi}\cdot\frac{\sin\varphi}{\rho}; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial \rho}\sin\varphi + \frac{\partial f}{\partial \varphi}\cdot\frac{\cos\varphi}{\rho}.$$

Дифференцируя еще раз, получим:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\cos\varphi - \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\sin\varphi}{\rho} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial \rho}\left[\frac{\partial f}{\partial \rho}\cos\varphi - \frac{\partial f}{\partial \varphi}\cdot\frac{\sin\varphi}{\rho}\right]\cos\varphi - \frac{\partial}{\partial \varphi}\left[\frac{\partial f}{\partial \rho}\cos\varphi - \frac{\partial f}{\partial \varphi}\frac{\sin\varphi}{\rho}\right]\frac{\sin\varphi}{\rho} =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2}\cos^2\varphi - 2\frac{\partial^2 f}{\partial \rho\,\partial \varphi}\cdot\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\rho} + \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}\frac{\sin^2\varphi}{\rho^2} + \frac{\partial f}{\partial \varphi}\cdot\frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{\rho^2} + \frac{\partial f}{\partial \rho}\frac{\sin^2\varphi}{\rho}.$$

Аналогично найдем:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2}\sin^2\varphi + 2\frac{\partial^2 f}{\partial \rho\,\partial \varphi}\cdot\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\rho} +$$

$$+ \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}\frac{\cos^2\varphi}{\rho^2} - \frac{\partial f}{\partial \varphi}\frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{\rho^2} + \frac{\partial f}{\partial \rho}\cdot\frac{\cos^2\varphi}{\rho},$$

откуда

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \rho}.$$

§ 32. Формула Тейлора

Рассмотрим функцию $f(x, y)$ в некоторой области G. Пусть $A(a, b)$ и $X(x, y)$ — две данные точки такие, что отрезок AX, их соединяющий, $\xi = a + (x - a)t$; $\eta = b + (y - b)t$, где $0 < t \leqslant 1$, лежит внутри G. Функция $f(x, y)$, рассматриваемая на отрезке AX, есть функция параметра t:

$$f\left(a + (x - a)t,\ b + (y - b)t\right) = F(t).$$

Если функция $f(x, y)$ дифференцируема k раз в области G, то функция $F(t)$ дифференцируема k раз на сегменте $0 \leqslant t \leqslant 1$. Выведем общую формулу для производной $F^{(n)}(t)$. Положив для краткости в обозначениях $x - a = h$, $y - b = k$, получим последовательно (по правилу дифференцирования сложной функции):

$$F(t) = f(a + th,\ b + tk),$$

$$F'(t) = f'_x(a + th,\ b + tk)\,h + f'_y(a + th,\ b + tk)\,k = \frac{\partial f}{\partial x}h + \frac{\partial f}{\partial y}k;$$

$$F''(t) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}h + \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}k\right)h + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}h + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}k\right)k =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}k^2;$$

$$F'''(t) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}h^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\,\partial y}h^2k + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y^2}hk^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}k^3.$$

Методом полной индукции докажем, что

$$F^{(n)}(t) = \frac{\partial^n f}{\partial x^n}h^n + C_n^1\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-1}\,\partial y}h^{n-1}k + \ldots + C_n^i\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-i}\,\partial y^i}h^{n-i}k^i +$$

$$+ C_n^{i+1}\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-i-1}\,\partial y^{i+1}}h^{n-i-1}k^{i+1} + \ldots + \frac{\partial^n f}{\partial y^n}k^n,$$

где значения производных берутся в точке $(\xi, \eta) = (a + th,\ b + tk)$.

В самом деле, предположим, что формула верна для $F^{(n)}(t)$.

Докажем, что в этом предположении она верна для $F^{(n+1)}(t)$.

Дифференцируем $F^{(n)}(t)$ по t: легко видеть, что коэффициент в $F^{(n+1)}(t)$ при $\dfrac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n-i}\,\partial y^{i+1}}h^{n-i}k^{i+1}$ равен

$$C_n^i + C_n^{i+1} = C_{n+1}^{i+1}.$$

Следовательно,

$$F^{(n+1)}(t) = \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1}}h^{n+1} + \ldots + C_{n+1}^{i+1}\frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n-i}\,\partial y^{i+1}}h^{n-i}k^{i+1} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\partial^{n+1} f}{\partial y^{n+1}}k^{n+1}.$$

Так как формула верна при $n = 1$, то она верна при произвольном n. Выражения для производных функций $F(t)$ принято символически записывать следующим образом:

$$F'(t) = \left(\frac{\partial}{\partial x}h + \frac{\partial}{\partial y}k\right)f; \quad F''(t) = \left(\frac{\partial}{\partial x}t + \frac{\partial}{\partial y}k\right)^2 f, \ldots$$

$$\ldots, \quad F^{(n)}(t) = \left(\frac{\partial}{\partial x}h + \frac{\partial}{\partial y}k\right)^n f$$

или

$$F^{(n)}(t) = \left[\frac{\partial}{\partial x}(x - a) + \frac{\partial}{\partial y}(y - b)\right]^n f(\xi, \eta).$$

Выведенная символическая формула справедлива для функции с любым числом m аргументов: *если*

$$F(t)=f\left(a_1+t(x_1-a_1),\ a_2+t(x_2-a_2),\ \ldots,\ a_m+t(x_m-a_m)\right),$$

то

$$F^{(n)}(t)=\left[\frac{\partial}{\partial x_1}(x_1-a_1)+\frac{\partial}{\partial x_2}(x_2-a_2)+\ \ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\frac{\partial}{\partial x_m}(x_m-a_m)\right]^n f(\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_m),$$

где

$$\xi_i=a_i+t(x_i-a_i).$$

Доказательство методом полной индукции, проведенное при $m=2$, остается в силе для любого m.

Теорема. *Если функция $f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_m)$ дифференцируема $n+1$ раз в области G, то в окрестности точки $A\in G$ имеет место формула Тейлора:*

$$f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_m)=f(A)+\left[\frac{\partial}{\partial x_1}h_1+\frac{\partial}{\partial x_2}h_2+\ldots+\frac{\partial}{\partial x_m}h_m\right]f(A)+$$
$$+\frac{1}{2!}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}h_1+\frac{\partial}{\partial x_2}h_2+\ldots+\frac{\partial}{\partial x_m}h_m\right]^2 f(A)+\ldots+\frac{1}{n!}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}h_1+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial x_2}h_2+\ldots+\frac{\partial}{\partial x_m}h_m\right]^n f(A)+\frac{1}{(n+1)!}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}h_1+\frac{\partial}{\partial x_2}h_2+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\frac{\partial}{\partial x_m}h_m\right]^{n+1} f(a_1+\theta h_1,\ a_2+\theta h_2,\ \ldots,\ a_m+\theta h_m),$$

где $0<\theta<1$, *а* $h_1=x_1-a_1,\ h_2=x_2-a_2,\ \ldots,\ h_m=x_m-a_m$.

Доказательство. По формуле Маклорена для функции $F(t)$ имеем:

$$F(t)=F(0)+F'(0)t+\frac{1}{2!}F''(0)t^2+\ldots+\frac{1}{n!}F^{(n)}(0)t^n+$$
$$+\frac{1}{(n+1)!}F^{(n+1)}(\theta t)t^{n+1}$$

(остаточный член в форме Лагранжа).

Положив $t=1$ и приняв во внимание, что

$$F(1)=f(a_1+h_1,\ a_2+h_2,\ \ldots,\ a_m+h_m)=f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_m),$$

получим формулу Тейлора, ч. т. д.

Примечание. Формула верна для любой точки $X\in G$, которая может быть соединена с точкой A прямолинейным отрезком.

Определение. *Многочлен*

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_1}(x_1-a_1)+\frac{\partial}{\partial x_2}(x_2-a_2)+\ \ldots+\frac{\partial}{\partial x_m}(x_m-a_m)\right]^k f(A)$$

называется дифференциалом k-го порядка функции $f(X)$ в точке A.

Дифференциал k-го порядка в точке A обозначается символом

$$d^k f(X;\ A).$$

Дифференциал $d^k f(X;\ A)$ есть однородный многочлен степени k относительно приращений аргументов (возможность обращения всех коэффициентов в нуль не исключается). Так, например, дифференциал второго порядка есть квадратичная форма относительно приращений аргументов:

$$d^2 f(x,\ y;\ a,\ b) = f''_{xx}(a,\ b)(x-a)^2 + 2f''_{xy}(a,\ b)(x-a)(y-b) + f''_{yy}(a,\ b)(y-b)^2;$$

$$d^2 f(x,\ y,\ z;\ a,\ b,\ c) = f''_{xx}(A)(x-a)^2 + f''_{yy}(A)(y-b)^2 + f''_{zz}(A)(z-c)^2 + 2f''_{xy}(A)(x-a)(y-b) + 2f''_{xz}(A)(x-a)(z-c) + 2f''_{yz}(A)(y-b)(z-c).$$

Для дифференциала третьего порядка функции двух аргументов получим выражение:

$$d^3 f(x,\ y;\ a,\ b) = f'''_{xxx}(a,\ b)h^3 + 3f'''_{xxy}(a,\ b)h^2k + 3f'''_{xyy}(a,\ b)hk^2 + f'''_{yyy}(a,\ b)k^3; \qquad \text{где } h = x-a,\ k = y-b.$$

При помощи символов дифференциалов формула Тейлора может быть записана следующим образом:

$$f(X) = f(A) + df(X,\ A) + \frac{1}{2!}d^2 f(X,\ A) + \ldots + \frac{1}{n!}d^n f(X,\ A) + R_n(X).$$

Теорема. *Если функция $f(X)$:*

1° имеет в окрестности точки A производные n-го порядка,

2° производные n-го порядка непрерывны в точке A,

то

$$R_n(X) = [\rho(X,\ A)]^n \omega(X),$$

где $\omega(X)$ — функция, непрерывная в точке A и равная нулю в этой точке.

Доказательство. Рассмотрим для определенности функцию двух аргументов.

Заменив в формуле Тейлора n на $n-1$, получим:

$$f(x,\ y) = f(A) + df(X,\ A) + \frac{1}{2!}d^2 f(X,\ A) + \ldots + \frac{1}{(n-1)!}d^{n-1} f(X,\ A) + \frac{1}{n!}\left[\frac{\partial}{\partial x}h + \frac{\partial}{\partial y}k\right]^n f(a+\theta h,\ b+\theta k). \quad (1)$$

В последнем слагаемом (если его написать в развернутом виде) коэффициентом при $h^{n-i}k^i$ служит

$$\frac{1}{n!}C_n^i \frac{\partial^n f(a+\theta h,\ b+\theta k)}{\partial x^{n-i}\,\partial y^i}.$$

Так как производные n-го порядка непрерывны в точке $A(a, b)$, то

$$\lim_{(h, k) \to (0, 0)} \frac{1}{n!} C_n^i \frac{\partial^n f(a+\theta h, b+\theta k)}{\partial x^{n-i} \partial y^i} = \frac{1}{n!} C_n^i \frac{\partial^n f(A)}{\partial x^{n-i} \partial y^i},$$

поэтому

$$\frac{1}{n!} C_n^i \frac{\partial^n f(a+\theta h, b+\theta k)}{\partial x^{n-i} \partial y^i} = \frac{1}{n!} C_n^i \frac{\partial^n f(A)}{\partial x^{n-i} \partial y^i} + \omega_i(X),$$

где $\lim\limits_{X \to A} \omega_i(X) = \omega_i(A) = 0$. Умножив на $h^{n-i}k^i$ и просуммировав, получим следующее выражение для остаточного члена:

$$\frac{1}{n!} d^n f(X, A) + (\omega_0 h^n + \omega_1 h^{n-1} k + \omega_2 h^{n-2} k^2 + \ldots + \omega_n k^n).$$

Положив $h = \rho \cos \varphi$, $k = \rho \sin \varphi$, представим второе слагаемое в виде:

$$\rho^n (\omega_0 \cos^n \varphi + \omega_1 \cos^{n-1} \varphi \sin \varphi + \ldots + \omega_n \sin^n \varphi) = \rho^n \omega(X),$$

где $\lim\limits_{X \to A} \omega(X) = \omega(A) = 0$.

Следовательно, формула (1) может быть переписана так:

$$f(x, y) = f(A) + df(X, A) + \ldots + \frac{1}{n!} d^n f(X, A) + \rho^n \omega(X), \text{ ч. т. д.}$$

Если функция $f(X)$ дифференцируема в окрестности точки A, то в этой окрестности имеет место следующая формула Лагранжа (для определенности формула записана ниже для функции трех аргументов):

$$f(x, y, z) - f(a, b, c) = h f'_x(a+\theta h, b+\theta k, c+\theta l) + k f'_y(a+\theta h, b+\theta k, c+\theta l) + l f'_z(a+\theta h, b+\theta k, c+\theta l),$$

где $h = x - a$, $k = y - b$, $l = z - c$.

Последняя формула есть частный случай формулы Тейлора (при $n = 0$).

Пример.

Написать формулу Тейлора для функции $f(x, y) = x^y$ в точке (1, 1), положив $n = 3$.

Вычисляем все производные до третьего порядка включительно и их значения в данной точке:

$f(x, y) = x^y$;	$f(1, 1) = 1$;
$f'_x(x, y) = y x^{y-1}$;	$f'_x(1, 1) = 1$;
$f'_y(x, y) = x^y \ln x$;	$f'_y(1, 1) = 0$;
$f''_{xx}(x, y) = y(y-1) x^{y-2}$;	$f''_{xx}(1, 1) = 0$;
$f''_{xy}(x, y) = x^{y-1} + y x^{y-1} \ln x$;	$f''_{xy}(1, 1) = 1$;

$$f''_{yy}(x, y) = x^y \ln^2 x; \qquad f''_{yy}(1, 1) = 0;$$
$$f'''_{xxx}(x, y) = y(y-1)(y-2)x^{y-3}; \qquad f'''_{xxx}(1, 1) = 0;$$
$$f'''_{xxy}(x, y) = (2y-1)x^{y-2} + y(y-1)x^{y-2}\ln x; \qquad f'''_{xxy}(1, 1) = 1;$$
$$f'''_{xyy}(x, y) = yx^{y-1}\ln^2 x + 2x^{y-1}\ln x; \qquad f'''_{xyy}(1, 1) = 0;$$
$$f'''_{yyy}(x, y) = x^y \ln^3 x; \qquad f'''_{yyy}(1, 1) = 0.$$

Составляем выражения для дифференциалов в точке (1, 1):

$$df = f'_x(1, 1)(x-1) + f'_y(1, 1)(y-1) = (x-1);$$
$$d^2 f = f''_{xx}(1, 1)(x-1)^2 + 2f''_{xy}(1, 1)(x-1)(y-1) + f''_{yy}(1, 1)(y-1)^2 = 2(x-1)(y-1),$$

и аналогично $d^3 f = 3(x-1)^2(y-1)$.

Подставив в формулу Тейлора, получим:

$$x^y = 1 + (x-1) + (x-1)(y-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2(y-1) + \omega(x, y)[(x-1)^2 + (y-1)^2]^{\frac{3}{2}}.$$

Эта формула при малых значениях $|x-1|$ и $|y-1|$ может служить для приближенного вычисления значений функции x^y. Так, например, полагая $h = x - 1 = 0{,}1$ и $k = y - 1 = 0{,}02$, получим (отбрасывая остаточный член):

$$(1, 1)^{1{,}02} \approx 1 + 0{,}1 + 0{,}002 + 0{,}0001 = 1{,}1021.$$

§ 33. Экстремумы функций нескольких аргументов

Определение максимума (минимума) функции одного аргумента переносится на функции нескольких аргументов, а именно:

1° *число* M (*соответственно* m) *называется максимумом* (*минимумом*) *функции* $f(X) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *на множестве* $\mathfrak{M}$, *если* M *есть наибольшее* (*наименьшее*) *значение* $f(X)$ *на множестве* $\mathfrak{M}$;

2° *точки* $A(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, *в которых* $f(X) = M$ (*или* $f(X) = m$), *называются точками максимума* (*минимума*).

Максимум и минимум обозначаются соответственно символами:

$$M = \max f(X) \quad (X \in \mathfrak{M}); \qquad m = \min f(X) \quad (X \in \mathfrak{M}).$$

Сохраняют тот же смысл термины: строгий и нестрогий максимумы (минимум), экстремум, точки экстремума, локальный и тотальный экстремумы.

Так, например, наличие в точке A строгого локального максимума (минимума) характеризуется выполнением неравенства $f(X) < f(A)$ (или $f(X) > f(A)$) во всех точках $X \neq A$ некоторой (достаточно малой) окрестности точки A. Если локальный экстремум является

нестрогим, то в любой окрестности точки A существуют точки $X \neq A$, в которых $f(X) = f(A)$.

Если A есть точка максимума (минимума) функции $f(X)$ на множестве $\mathfrak{M}$, то A есть точка максимума (минимума) $f(X)$ на любой части $\mathfrak{M}_1$ множества $\mathfrak{M}$, содержащей точку A. В самом деле, если, например, выполняется неравенство $f(X) < f(A)$ в окрестности U_A точки A при $X \in \mathfrak{M}$ и $X \neq A$, то это же неравенство выполняется и во всех точках множества $\mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{M}$, содержащихся в U_A. Обратное утверждение неверно, точка A может быть точкой экстремума на множестве $\mathfrak{M}_1$ (где $\mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{M}$), но не быть точкой экстремума на множестве $\mathfrak{M}$.

Примеры.

1. Функция $f(x, y) = x^2 + y^2 = \rho^2(X, O)$ во всей плоскости (x, y) имеет строгий минимум в точке $O(0, 0)$ $\min f(x, y) = 0$, максимум $\max f(x, y)$ не существует.

Эта же функция на эллипсе $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, где $0 < b < a$, имеет максимум в вершинах $(\pm a, 0)$, наиболее удаленных от начала координат, $\max f(x, y) = a^2$ и минимум в вершинах $(0, \pm b)$, $\min f(x, y) = b^2$.

Графиком рассматриваемой функции служит эллиптический параболоид вращения.

2. Функция $f(x, y, z) = x^2 + y^2$ постоянна относительно аргумента z. Во всем пространстве $\max f(x, y, z)$ не существует, минимум (нестрогий) $\min f(x, y, z)$ реализуется в точках оси аппликат: $f(0, 0, z) = 0$.

3. Функция $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ (график — полусфера) в круге $x^2 + y^2 \leqslant 1$ имеет максимум (строгий) в центре круга, $\max f(x, y) = f(0, 0) = 1$ и минимум (нестрогий) в точках единичной окружности $\min f(x, y) = 0$. Эта же функция в открытом круге $x^2 + y^2 < 1$ не имеет минимума.

4. Функция $f(x, y) = x^2 - y^2$ (график — гиперболический параболоид) на оси $y = 0$ равна $f(x, y) = x^2$, имеет строгий минимум $\min f(X, 0) = 0$ в точке $O(0, 0)$. Эта же функция на оси $x = 0$ равна $f(0, y) = -y^2$, имеет строгий максимум $\max f(0, y) = 0$ в точке O. Функция $f(x, y)$ во всей плоскости (x, y) не имеет наибольшего и наименьшего значений.

5. $u = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - y^2} + \sqrt{1 - z^2}$ в кубе $|x| \leqslant 1$; $|y| \leqslant 1$; $|z| \leqslant 1$ имеем: $\max u = 3$; точка максимума $O(0, 0, 0)$; максимум строгий $\min u = 0$, точка минимума $A(a, b, c)$, где $|a| = 1$; $|b| = 1$; $|c| = 1$ (8 точек); минимум нестрогий.

6. $z = \sin(x^2 + y^2)$ в плоскости (x, y); $\max z = 1$ (нестрогий); точки максимума образуют семейство окружностей $x^2 + y^2 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, где k — любое целое неотрицательное число, $\min z = -1$ (нестрогий); точки минимума образуют семейство окружностей $x^2 + y^2 = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, где k — любое натуральное число. Графиком рассматриваемой функции служит поверхность вращения кривой Френеля $z = \sin x^2$ (том I, § 58) вокруг оси OZ.

Теорема. *Если функция* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$:

1° *определена в окрестности точки* $A(a_1, a_2, \ldots, a_n)$,

2° *имеет производную* $f'_{x_i}(A)$ *по аргументу* x_i *в точке* A,

3° *имеет в точке A локальный экстремум,*
то значение производной $f'_{x_i}(A)$ равно нулю.

Доказательство. Рассмотрим функцию $f(X)$ в окрестности точки A при данных значениях $n-1$ аргументов $x_1=a_1$, $x_2=a_2$, ..., $x_{i-1}=a_{i-1}$, $x_{i+1}=a_{i+1}$, ..., $x_n=a_n$ как функцию одного аргумента x_i. Эта функция $f(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n)$ определена в окрестности точки $x_i=a_i$ и имеет экстремум в этой точке, следовательно,

$$f'_{x_i}(a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots, a_n)=0, \quad \text{ч. т. д.}$$

Следствие. Если функция $f(X)$ определена в окрестности точки экстремума A и имеет производные по каждому аргументу в точке A, то все производные в точке A равны нулю:

$$f'_{x_1}(A)=f'_{x_2}(A)=\ldots=f'_{x_n}(A)=0.$$

Определение. *Точка A называется стационарной точкой функции $f(X)=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, если:*
1° *функция $f(X)$ дифференцируема в точке A,*
2° *в точке A все производные функции $f(X)$ равны нулю:*

$$f'_{x_1}(A)=f'_{x_2}(A)=\ldots=f'_{x_n}(A)=0.$$

Этому определению можно придать следующую эквивалентную форму:
точка A есть стационарная точка функции $f(X)$, если:
1° *функция $f(X)$ дифференцируема в точке A,*
2° *дифференциал $df(X, A)$ тождественно равен нулю:*

$$df(X, A)=f'_{x_1}(A)(x_1-a_1)+f'_{x_2}(A)(x_2-a_2)+\ldots+$$
$$+f'_{x_n}(A)(x_n-a_n)=0.$$

Геометрическая интерпретация. Для функции двух аргументов $z=f(x, y)$ касательная плоскость к графику функции в стационарной точке параллельна плоскости (x, y), так как ее уравнение

$$z-f(a, b)=f'_x(A)(x-a)+f'_y(A)(y-b)$$

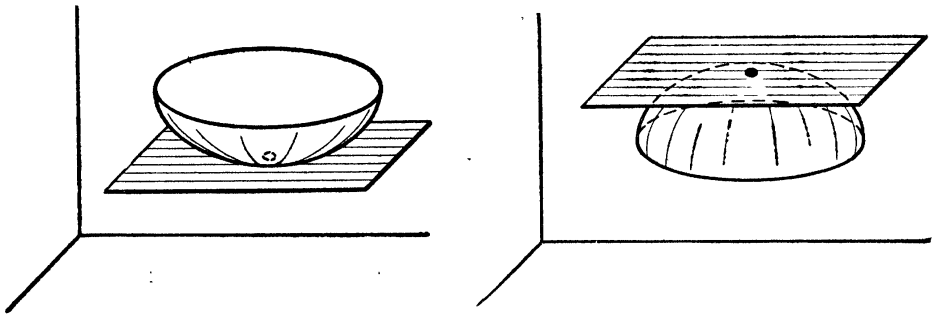
примет вид $z-f(a, b)=0$.

Нижеследующая теорема выражает необходимое условие существования локального экстремума дифференцируемой функции.

Теорема. *Если функция $f(X)$:*
1° *дифференцируема в точке A,*
2° *имеет в точке A локальный экстремум,*
то A есть стационарная точка функции $f(X)$.

Доказательство. В силу дифференцируемости функции $f(X)$ в точке A существуют конечные производные по каждому аргументу; следовательно, в точке экстремума значения всех производных равны нулю, т. е. A есть стационарная точка, ч. т. д.

Геометрическая интерпретация. Если график функции $z = f(x, y)$ имеет в точке экстремума касательную плоскость, не параллельную оси OZ, то эта плоскость параллельна плоскости (x, y) (черт. 106).

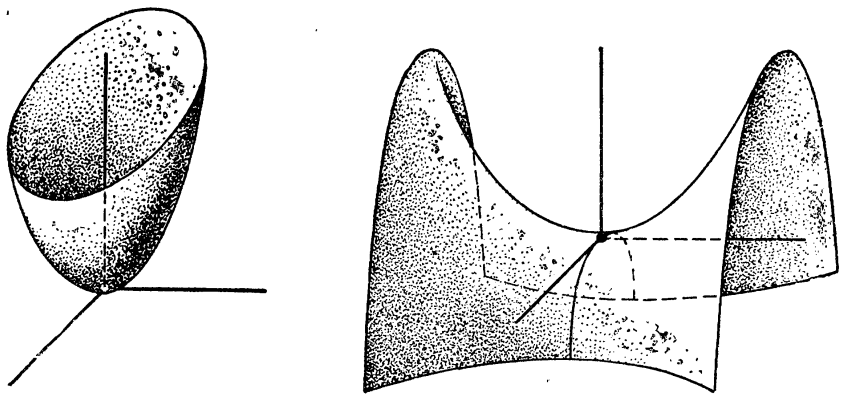


Черт. 106.

Обратная теорема не имеет места: не всякая стационарная точка является точкой экстремума.

Достаточно указать на соответствующие примеры стационарных точек функций одного аргумента. Сопоставим для примера следующие две функции двух аргументов:

$$f_1(x, y) = a^2x^2 + b^2y^2 \quad \text{и} \quad f_2(x, y) = a^2x^2 - b^2y^2.$$



Черт. 107.

графиками которых служат эллиптический и гиперболический параболоиды (черт. 107). Для обеих функций $O(0, 0)$ является стационарной точкой; оба параболоида касаются плоскости (x, y) в точке $O(0, 0, 0)$. Функция $f_1(x, y) \geqslant 0$, причем равенство имеет место только при $x = y = 0$; следовательно, точка $O(0, 0)$ есть точка строгого минимума. Эллиптический параболоид расположен над плоскостью (x, y). Функция $f_2(x, y)$ отрицательна на оси ординат (при $y \neq 0$):

$f_2(0, y) = -b^2y^2 < 0$ и положительна на оси абсцисс (при $x \neq 0$): $f_2(x, 0) = a^2x^2$. Следовательно, $O(0, 0)$ не есть точка экстремума, гиперболический параболоид в любой окрестности точки $O(0, 0, 0)$ расположен частично над и частично под плоскостью (x, y).

Для отыскания точек локального экстремума функции, дифференцируемой в данной области G, следует найти стационарные точки функции $f(X)$ в области G, т. е. найти точки области G, удовлетворяющие системе уравнений:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0; \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0, \ \ldots, \ \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0.$$

Локальные экстремумы возможны лишь в этих точках. Если область G содержит точки, в которых функция недифференцируема, то в этих точках также возможны локальные экстремумы. Так, например, функция $\sqrt{x^2+y^2}$, недифференцируема в точке $O(0, 0)$, имеет минимум в этой точке.

Примеры.

1. Найти экстремумы функции

$$U(X) = (ax + by + cz)e^{-(x^2+y^2+z^2)},$$

где $a^2 + b^2 + c^2 > 0$.

Приравняв производные нулю, получим:

$$2x(ax + by + cz) = a;$$
$$2y(ax + by + cz) = b;$$
$$2z(ax + by + cz) = c.$$

Умножив уравнения на a, b, c соответственно и сложив, получим:

$$2(ax + by + cz)^2 = a^2 + b^2 + c^2,$$

откуда

$$ax + by + cz = \pm\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{2}} \quad \text{и} \quad x = \pm\frac{a}{\sqrt{2(a^2+b^2+c^2)}};$$

$$y = \pm\frac{b}{\sqrt{2(a^2+b^2+c^2)}}; \quad z = \pm\frac{c}{\sqrt{2(a^2+b^2+c^2)}};$$

следовательно, имеются две стационарные точки:

$$A_1\left(\frac{a}{R}, \frac{b}{R}, \frac{c}{R}\right), \quad A_2\left(-\frac{a}{R}, -\frac{b}{R}, -\frac{c}{R}\right), \text{ где}$$

$$R = \sqrt{2(a^2+b^2+c^2)}.$$

Значения функции $U(X)$ в точках A_1 и A_2 суть

$$U(A_1) = \frac{R}{2\sqrt{e}} \quad \text{и} \quad U(A_2) = -\frac{R}{2\sqrt{e}}.$$

Рассмотрим сферическую поверхность с центром в начале координат достаточно большого радиуса ρ.

В точке $x = \rho\cos\alpha$, $y = \rho\cos\beta$, $z = \rho\cos\gamma$ этой поверхности

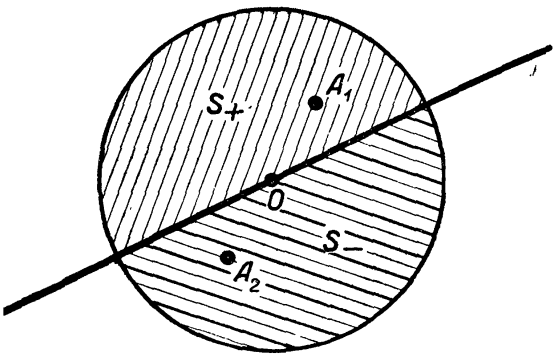
$$U(x, y, z) = \rho e^{-\rho^2}(a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma),$$

а потому

$$|U(x, y, z)| \leqslant (|a| + |b| + |c|\,\rho e^{-\rho^2})$$

и, следовательно, $\underset{\rho\to+\infty}{U}(x, y, z) \rightrightarrows 0$ (так как $\lim\limits_{\rho\to+\infty} \rho e^{-\rho^2} = 0$).

Радиус сферической поверхности ρ будем считать настолько большим, чтобы на этой поверхности выполнялось неравенство $|U| < \dfrac{R}{2\sqrt{e}}$.



Черт. 108.

Плоскость $ax + by + cz = 0$ разделяет шар $\overline{S}$ на две части (черт. 108); в одной из них $\overline{S}_+$ имеем $U(X) \geqslant 0$, а в другой $\overline{S}_-$ имеем $U(X) \leqslant 0$ (равенство на плоскости).

На границе и во всех точках вне $\overline{S}_+$ выполняется неравенство $U(X) < U(A_1)$. Максимум в части $\overline{S}_+$ (существующей по теореме Вейерштрасса) имеет место во внутренней точке полушара $\overline{S}_+$; он реализуется в единственной стационарной точке $A_1 \in S_+$. Следовательно,

$$\max U = U(A_1) = \frac{R}{2\sqrt{e}}.$$

Аналогично, рассматривая часть $\overline{S}_-$, докажем, что

$$\min U = U(A_2) = -\frac{R}{2\sqrt{e}}.$$

2. Доказать, что из всех треугольников, имеющих данный периметр, наибольшую площадь имеет правильный треугольник. Пусть x, y и z — стороны треугольника, а p (данное число) — его полупериметр; имеем:

$$x + y + z = 2p, \quad \text{откуда} \quad z = 2p - x - y.$$

Ищем минимум квадрата площади треугольника, имеющего периметр $2p$:

$$f(x, y) = S^2 = p(p - x)(p - y)(p - z) = p(p - x)(p - y)(x + y - p);$$

составим систему уравнений:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -p(p - y)(x + y - p) + p(p - x)(p - y) = 0;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -p(p - x)(x + y - p) + p(p - x)(p - y) = 0,$$

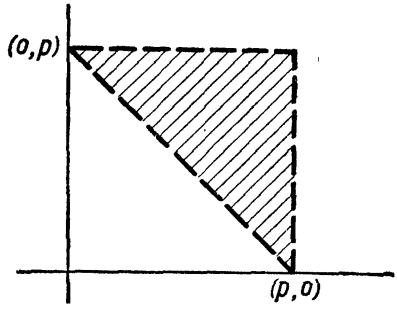
из которой найдем стационарные точки: $\left(\dfrac{2p}{3}, \dfrac{2p}{3}\right)$, (p, p), $(p, 0)$, $(0, p)$.

Вторая, третья и четвертая точки исследованию не подлежат, так как не существует треугольника, у которого одна из сторон равна полупериметру. Первая стационарная точка дает максимум площади. В самом деле, площадь

есть ограниченная функция. Положительная функция $f(x, y)$ рассматривается в области

$$x+y>p,\quad 0<x<p,\quad 0<y<p$$ (черт. 109).

Эта функция в соответствующей замкнутой области обращается в нуль на границе (соответствующие треугольники с данным периметром вырождаются в отрезки), а следовательно, наибольшее значение $f(x, y)$ имеет во внутренней точке, но внутри области существует единственная стационарная точка $\left(\frac{2p}{3}, \frac{2p}{3}\right)$. Это и есть точка максимума. Если $x=y=\frac{2}{3}p$, то и $z=\frac{2}{3}p$, т. е. экстремальный треугольник — равносторонний.



Черт. 109.

Установим достаточные условия существования локального экстремума функции в стационарной точке A в предположении, что функция $f(X)$ имеет в окрестности точки A вторые производные, непрерывные в точке A. Рассмотрим подробно случай функции двух аргументов.

Составим второй дифференциал функции $f(X)$ в точке A:

$$d^2f(X, A)=p_{11}h^2+2p_{12}hk+p_{22}k^2,$$

где

$$p_{11}=f''_{xx}(a, b);\quad p_{12}=f''_{xy}(a, b);\quad p_{22}=f''_{yy}(a, b);$$
$$h=x-a;\quad k=y-b.$$

Рассмотрим следующие возможные случаи.

Случай I. *Второй дифференциал есть определенная форма.* Это значит, что $d^2f(X, A)$ есть знакопостоянный (положительный или отрицательный) трехчлен при всех значениях h и k, кроме $h=k=0$ (при $h=k=0$ трехчлен обращается в нуль). Этот случай характеризуется условием $\Delta=p_{11}p_{22}-p_{12}^2>0$. В самом деле, если $\Delta>0$, то p_{11} и p_{22} — не равные нулю одинаковые по знаку числа*.

Применив преобразование выделения полного квадрата, получим:

$$d^2f(X, A)=\frac{1}{p_{11}}\left[(p_{11}h+p_{12}k)^2+(p_{22}p_{11}-p_{12}^2)k^2\right].$$

Так как выражение в квадратных скобках положительно при всех значениях h и k, кроме $h=k=0$, то при $p_{11}>0$ дифференциал d^2f есть положительно определенная форма, а при $p_{11}<0$ дифференциал d^2f есть отрицательно определенная форма:

$$d^2f(X, A)\begin{cases}>0 & (\text{если } p_{11}>0 \text{ и } h^2+k^2\neq 0),\\ <0 & (\text{если } p_{11}<0 \text{ и } h^2+k^2\neq 0).\end{cases}$$

* Если $p_{11}p_{22}-p_{12}^2>0$, то $p_{11}p_{22}>p_{12}^2\geqslant 0$. Это возможно лишь, если числа p_{11} и p_{22} либо оба положительны, либо оба отрицательны.

Случай II. *Второй дифференциал есть неопределенная форма.* Это значит, что существуют точки (h, k), отличные от $(0,0)$, в которых $d^2f(X, A) > 0$, и точки $(h, k) \neq (0, 0)$, в которых $d^2f(X, A) < 0$. Этот случай характеризуется условием $\Delta = p_{11}p_{22} - p_{12}^2 < 0$. В самом деле,

1° если $p_{11} \neq 0$, то

$$d^2f(X, A) = \frac{1}{p_{11}}\left[(p_{11}h + p_{12}k)^2 - (p_{12}^2 - p_{11}p_{22})k^2\right],$$

выражение в квадратных скобках на прямой $k = 0$ (при $h \neq 0$) имеет положительные значения: $p_{11}^2h^2$, а на прямой $p_{11}h + p_{12}k = 0$ (при $k \neq 0$) — отрицательные значения: $-(p_{12}^2 - p_{11}p_{22})k^2$;

2° если $p_{11} = 0$, а $p_{22} \neq 0$, то (переставив местами h и k), представив $d^2f(X, A)$ в виде:

$$d^2f(X, A) = \frac{1}{p_{22}}\left[(p_{22}k + p_{12}k) - p_{12}^2h^2\right],$$

придем к тому же заключению, что и в предыдущем случае;

3° если $p_{11} = p_{22} = 0$, то $d^2f(X, A) = 2p_{12}hk$, причем $p_{12} \neq 0$, так как $\Delta = -p_{12}^2 < 0$.

В этом случае при $p_{12} > 0$ (или < 0), $d^2f(X, A) > 0$ (или < 0), если h и k одинаковы по знаку, и $d^2f(X, A) < 0$ (или > 0), если h и k противоположны по знаку.

Случай III. *Второй дифференциал есть полуопределенная форма.* Это значит, что значения $d^2f(X, A)$ ни при каких h и k не могут быть числами, противоположными по знаку, т. е. либо $d^2f \geqslant 0$, либо $d^2f \leqslant 0$, но существуют точки $(h, k) \neq (0, 0)$, в которых $d^2f(X, A) = 0$. Этот случай характеризуется условием $\Delta = p_{11}p_{22} - p_{12}^2 = 0$. В самом деле,

1° при $p_{11} \neq 0$ имеем:

$$d^2f(X, A) = \frac{1}{p_{11}}(p_{11}h + p_{12}k)^2.$$

Значения d^2f положительны при $p_{11} > 0$ и отрицательны при $p_{11} < 0$ во всех точках плоскости, не лежащих на прямой $p_{11}h + p_{12}k = 0$, а на этой прямой $d^2f = 0$;

2° при $p_{22} \neq 0$ придем к тому же заключению, представив d^2f в виде $d^2f = \frac{1}{p_{22}}(p_{22}k + p_{12}h)^2$;

3° при $p_{11} = p_{22} = 0$ имеем $\Delta = -p_{12}^2 = 0$, откуда $p_{12} = 0$, но тогда $d^2f(X, A) = 0$ при всех значениях h и k.

Теорема. Достаточные условия экстремума.

I. *Функция $f(X)$ в стационарной точке A имеет максимум (минимум), если $d^2f(X, A)$ есть отрицательно (положительно) определенная форма.*

II. *Функция $f(X)$ в стационарной точке A не имеет экстремума, если $d^2f(X, A)$ есть неопределенная форма.*

III. *По второму дифференциалу невозможно сделать никаких заключений о существовании экстремума в стационарной точке A, если $d^2f(X, A)$ есть полуопределенная форма.*

Доказательство I. Рассмотрим для определенности функцию двух аргументов $f(x, y)$.

По формуле Тейлора в окрестности стационарной точки $A(a, b)$ имеем:

$$f(x, y) - f(a, b) = \frac{1}{2}[d^2f(X, A) + \omega\rho^2] =$$

$$= \frac{1}{2}[(p_{11}h^2 + 2p_{12}hk + p_{22}k^2) + \omega\rho^2],$$

где $\rho = \rho(X, A) = \sqrt{h^2 + k^2}$.

I. Пусть $d^2f(X, A)$ есть определенная форма, положим

$$h = \rho\cos\varphi, \quad k = \rho\sin\varphi.$$

Точка $(\cos\varphi, \sin\varphi)$ при любом φ лежит на единичной окружности, так как

$$\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1.$$

Имеем:

$$f(x, y) - f(a, b) = \frac{\rho^2}{2}[(p_{11}\cos^2\varphi + 2p_{12}\cos\varphi\sin\varphi + p_{22}\sin^2\varphi) + \omega].$$

Второй дифференциал, рассматриваемый на единичной окружности

$$p_{11}\cos^2\varphi + 2p_{12}\cos\varphi\sin\varphi + p_{22}\sin^2\varphi = Q(\varphi),$$

есть непрерывная знакопостоянная функция, не равная нулю ни при каком значении φ. Пусть $m > 0$ есть наименьшее значение абсолютной величины этой функции на сегменте $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$:

$$0 < m = \min|p_{11}\cos^2\varphi + 2p_{12}\cos\varphi\sin\varphi + p_{22}\sin^2\varphi| \leqslant |Q(\varphi)|.$$

Так как $\lim\limits_{x\to A}\omega = 0$, то в достаточно малой окрестности U_A точки A будем иметь $|\omega| < m \leqslant |Q(\varphi)|$. В окрестности U_A знак суммы $Q(\varphi) + \omega$ одинаков со знаком первого слагаемого, а потому $f(x, y) - f(a, b) > 0$ (где $X \neq A$), если $d^2f(X, A)$ есть положительно определенная форма, $(Q(\varphi) > 0)$ и $f(x, y) - f(a, b) < 0$, если $d^2f(X, A)$ есть отрицательно определенная форма $(Q(\varphi) < 0)$. В первом случае $f(x, y) > f(a, b)$ при $(x, y) \in U_A$, т. е. имеем локальный минимум (строгий), а во втором $f(x, y) < f(a, b)$ при $(x, y) \in U_A$, т. е. имеем локальный максимум (строгий).

II. Пусть $d^2f(X, A)$ есть неопределенная форма.

Рассмотрим форму $d^2f(X, A)$ на луче $h = \rho\cos\varphi$, $k = \rho\sin\varphi$, проходящем через стационарную точку:

$$d^2f(X, A) = \rho^2Q(\varphi).$$

Знак d^2f одинаков (при $\rho \neq 0$) со знаком $Q(\varphi)$.

Следовательно, на одном и том же луче (при данном φ) либо $d^2f > 0$, либо $d^2f < 0$, либо $d^2f = 0$.

Так как

$$f(X) - f(A) = \frac{1}{2}\rho^2 [Q(\varphi) + \omega], \text{ где } \lim_{\rho \to 0} \omega = 0,$$

то при достаточно малом $\rho \neq 0$ знак приращения $f(X) - f(A)$ (на данном луче) определяется знаком $Q(\varphi)$, т. е. знаком второго дифференциала $d^2f(X, A)$. Для неопределенной формы существуют лучи, на которых $d^2f(X, A) > 0$, и лучи, на которых $d^2f(X, A) < 0$, так как неопределенная форма может иметь как положительные, так и отрицательные значения. При достаточно малом ρ имеем $f(X) > f(A)$ на каждом луче, на котором $d^2f > 0$, и $f(X) < f(A)$ на каждом луче, на котором $d^2f < 0$. Следовательно, в любой окрестности точки A существуют точки, в которых $f(X) > f(A)$, и точки, в которых $f(X) < f(A)$, а потому A не есть точка экстремума.

III. Если $d^2f(X, A)$ есть полуопределенная форма, то существуют лучи, на которых $d^2f(X, A) = 0$. Следовательно, любая окрестность точки A содержит точки, отличные от A, в которых $d^2f = 0$, но тогда о знаке приращения

$$f(X) - f(A) = \frac{1}{2}[d^2f + \omega\rho^2]$$

в окрестности стационарной точки A невозможно судить по второму дифференциалу, ч. т. д.

Случай полуопределенной формы называется сомнительным случаем. Нижеследующий пример показывает, что в сомнительном случае экстремум может существовать, а может и не существовать. Положим

$$f_1(x, y) = x^2 + y^4 \quad \text{и} \quad f_2(x, y) = x^2 + y^3.$$

Точка $O(0, 0)$ для обеих функций является стационарной и

$$d^2f_1(x, y; 0, 0) = d^2f_2(x, y; 0, 0) = 2x^2$$

есть полуопределенная форма. Функция $f_1(x, y)$ в точке O имеет минимум, так как $f_1(x, y) > 0$ при $x^2 + y^2 \neq 0$; функция $f_2(x, y)$ в точке O не имеет экстремума; в самом деле, на прямой $x = 0$ имеем $f_2(x, y) > 0$, если $y > 0$ и $f_2(x, y) < 0$, если $y < 0$.

При отыскании экстремумов функции двух аргументов, имеющей непрерывные производные второго порядка, обычно руководствуются следующим правилом:

Правило. *Для отыскания экстремумов функции $f(x, y)$ следует:*

1° *найти стационарные точки. Для этого надо решить систему уравнений*

$$f'_x(x, y) = f'_y(x, y) = 0;$$

2° *вычислить значения вторых производных и* $\Delta = f''_{xx}f''_{yy} - (f''_{xy})^2$ *в стационарных точках;*

3° *в стационарных точках, в которых* $\Delta > 0$, *имеет место экстремум; точки, в которых* $f''_{xx} > 0$, *суть точки локального минимума (строгого), а точки, в которых* $f''_{xx} < 0$, *суть точки локального максимума (строгого);*

4° *в стационарных точках, в которых* $\Delta < 0$, *экстремум не имеет места;*

5° *в точках, в которых* $\Delta = 0$, *имеет место сомнительный случай.*

Примечание. Если заранее известно, что функция $f(X)$ в некоторой внутренней точке области G имеет экстремум, и если в области G существует единственная стационарная точка, то эта точка и есть точка экстремума, и применение общего правила становится излишним.

Теорема, выражающая достаточные условия экстремума, справедлива для функций с любым числом аргументов. В общем случае второй дифференциал

$$d^2f(X, A) = p_{11}h_1^2 + p_{22}h_2^2 + \ldots + 2p_{12}h_1h_2 + \ldots = \sum p_{ij}h_ih_j$$

есть квадратичная форма от n приращений $h_1, h_2, \ldots, h_n$.

На данном луче

$$h_1 = \rho\cos\alpha_1, \quad h_2 = \rho\cos\alpha_2, \quad \ldots, \quad h_n = \rho\cos\alpha_n$$

имеем

$$d^2f = \rho^2 \sum p_{ij}\cos\alpha_i\cos\alpha_j = \rho^2 Q(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n),$$

точка $(\cos\alpha_1, \cos\alpha_2, \ldots, \cos\alpha_n)$ лежит на единичной сфере, так как всегда

$$\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 + \ldots + \cos^2\alpha_n = 1.$$

Все рассуждения остаются в силе, надо лишь единичную окружность заменить единичной сферой, а функцию $Q(\varphi)$ функцией $Q(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ (т. е. рассматривать d^2f на единичной сфере).

Критерии, позволяющие судить о характере квадратичной формы по ее коэффициентам, излагаются в высшей алгебре. На практике всегда возможно элементарными средствами определить характер квадратичной формы, не прибегая к общим критериям. Это разъяснено ниже на конкретных примерах (см. пример 3).

Примеры.

1. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x, y) = \cos x \cos y \cos(x + y)$$

в замкнутом квадрате

$$0 \leqslant x \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant y \leqslant \pi. \qquad (\bar{Q})$$

Находим стационарные точки, содержащиеся внутри Q. Для удобства дифференцирования представим данную функцию в виде суммы тригонометрических функций:

$$f(x, y) = \frac{1}{4}[1 + \cos(2x + 2y) + \cos 2x + \cos 2y].$$

Составляем систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= -\frac{1}{2}[\sin(2x + 2y) + \sin 2x] = 0; \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= -\frac{1}{2}[\sin(2x + 2y) + \sin 2y] = 0. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Откуда $\sin 2x = \sin 2y$. Так как $0 \leqslant 2x \leqslant 2\pi$ и $0 \leqslant 2y \leqslant 2\pi$, то возможны лишь следующие случаи:

$$2x = 2y, \quad \text{откуда} \quad x = y; \quad (2)$$

$$2x + 2y = \pi, \quad \text{откуда} \quad y = \frac{\pi}{2} - x; \quad (3)$$

$$2x + 2y = 3\pi, \quad \text{откуда} \quad y = \frac{3}{2}\pi - x. \quad (4)$$

При условии (2) уравнения (1) принимают вид: $\sin 4x + \sin 2x = 0$, откуда находим стационарные точки:

$$\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right), \left(\frac{2}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi\right), (0, 0), (\pi, \pi).$$

При условиях (3) и (4) уравнения (1) примут вид: $\sin 2x = 0$, откуда находим стационарные точки:

$$\left(0, \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{\pi}{2}, 0\right), \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \left(\pi, \frac{\pi}{2}\right).$$

Из найденных стационарных точек внутри $(\overline{Q})$ лежат точки $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ и $\left(\frac{2}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi\right)$. Исследуем эти три точки.

Вычисляем вторые производные:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\cos(2x + 2y) - \cos 2x; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\cos(2x + 2y).$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\cos(2x + 2y) - \cos 2y.$$

В точке $x = y = \frac{\pi}{2}$ имеем $f''_{xx} = f''_{yy} = 0$ и $f''_{xy} = -1$, $\Delta = -1 < 0$. Экстремума нет (в этом можно убедиться и непосредственно).

В точке $x = y = \frac{\pi}{3}$, а также в точке $x = y = \frac{2}{3}\pi$ получим $f''_{xx} = 1$, $f''_{xy} = \frac{1}{2}$, $f''_{yy} = 1$, $\Delta = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} > 0$.

В этих точках имеет место минимум:

$$f\left(\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{3}\pi\right) = f\left(\frac{2}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi\right) = -\frac{1}{8}.$$

Для отыскания наибольшего и наименьшего значений функции в замкнутом квадрате надо исследовать функцию на границе $\overline{Q}$.

На горизонтальных сторонах $y = 0$ и $y = \pi$ имеем $f(x, 0) = f(x, \pi) = \cos^2 x$. Наибольшее значение суть 1 и 0.

На вертикальных сторонах получим те же наибольшее и наименьшее значения.

Следовательно, для всего квадрата $\bar{Q}$ имеем $\max f = 1$ (в вершинах квадрата) и $\min f = -\frac{1}{8}$ (в стационарных точках).

2. Найти экстремум функции

$$f(x, y, z) = \frac{x^3 + y^3 + z^3}{xyz}$$

в первом октанте: $0 < x$, $0 < y$, $0 < z$.

Функция $f(x, y, z)$ однородная, нулевой степени, она постоянна на произвольном луче l

$$\frac{x}{z} = \xi, \quad \frac{y}{z} = \eta \tag{l}$$

(при данных $\xi > 0$ и $\eta > 0$), проходящем через начало координат:

$$f(x, y, z) = \frac{\xi^3 + \eta^3 + 1}{\xi\eta} = \frac{\xi^2}{\eta} + \frac{\eta^2}{\xi} + \frac{1}{\xi\eta} = \Phi(\xi, \eta).$$

Из всех лучей l надо найти те лучи, для которых функция $\Phi(\xi, \eta)$ имеет экстремум в области $\xi > 0$, $\eta > 0$.

Отыскиваем стационарные точки функции $\Phi(\xi, \eta)$:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} = \frac{2\xi}{\eta} - \frac{\eta^2}{\xi^2} - \frac{1}{\eta\xi^2} = 0;$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = \frac{2\eta}{\xi} - \frac{\xi^2}{\eta^2} - \frac{1}{\eta^2\xi} = 0,$$

откуда $\xi = \eta = 1$.

Вычисляем вторые производные:

$$\Phi''_{\xi\xi}(\xi, \eta) = \frac{2}{\eta} + \frac{2\eta^2}{\xi^3} + \frac{2}{\xi^3\eta}; \quad \Phi''_{\xi\eta}(\xi, \eta) = -\frac{2\xi}{\eta^2} - \frac{2\eta}{\xi^2} + \frac{1}{\xi^2\eta^2};$$

$$\Phi''_{\eta\eta}(\xi, \eta) = \frac{2}{\xi} + \frac{2\xi^2}{\eta^3} + \frac{2}{\eta^3\xi}.$$

В точке $\xi = \eta = 1$ имеем $\Phi''_{\xi\xi} = \Phi''_{\eta\eta} = 6 > 0$, $\Phi''_{\xi\eta} = -3$ и $\Delta = \Phi''_{\xi\xi}\Phi''_{\eta\eta} - \left(\Phi''_{\xi\eta}\right)^2 = 27 > 0$. Следовательно, $\xi = \eta = 1$ есть точка минимума. Итак, на луче $x = y = z$ функция $f(x, y, z)$ имеет минимум (нестрогий), равный $f(x, x, x) = 3$.

3. Определить характер стационарной точки A функции трех аргументов $f(x, y, z)$, имеющей в точке A непрерывные производные второго порядка, если известен второй дифференциал

$$d^2 f(X, A) = 3h^2 + k^2 + 4l^2 + 2hk - 4hl + kl,$$

где h, k и l — приращения аргументов.

Сгруппируем члены, содержащие один из аргументов, например k, и применим к ним преобразование выделения полного квадрата:

$$\left(k^2 + 2kh + 2k\frac{l}{2} + h^2 + \frac{l^2}{4} + 2h\frac{l}{2}\right) - h^2 - \frac{l^2}{4} - hl =$$

$$= \left(k + h + \frac{1}{2}l\right)^2 - h^2 - \frac{1}{4}l^2 - hl.$$

Следовательно,

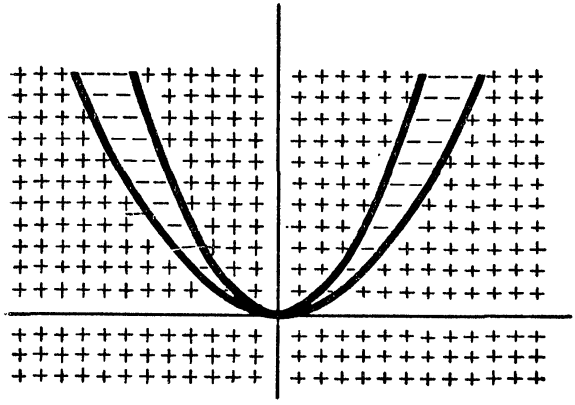
$$d^2f(X, A) = \left(k + h + \frac{1}{2}l\right)^2 + 2h^2 + \frac{15}{4}l^2 - 5hl.$$

Применив снова выделение полного квадрата, получим:

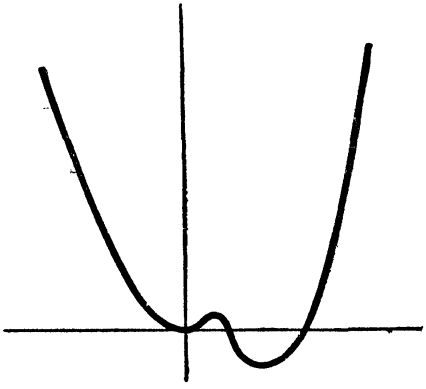
$$2h^2 - 5hl + \frac{15}{4}l^2 = \frac{1}{2}\left(2h - \frac{5}{2}l\right)^2 + \frac{5}{8}l^2.$$

Второй дифференциал

$$d^2f = \left(k + h + \frac{1}{2}l\right)^2 + \frac{1}{2}\left(2h - \frac{5}{2}l\right)^2 + \frac{5}{8}l^2$$



Черт. 110.



Черт. 111.

есть положительно определенная форма, так как он равен сумме трех неотрицательных слагаемых, причем $d^2f = 0$ лишь когда каждое слагаемое обращается в нуль:

$$k + h + \frac{1}{2}l = 2h - \frac{5}{2}l = l = 0,$$

что возможно только при условии $l = h = k = 0$. Следовательно, A есть точка минимума.

Решим аналогичную задачу, если

$$d^2f(X, A) = h^2 + 3hk + kl.$$

Экстремума нет, так как в точках $h = 0$, $k = 1$, $l = 1$ и $h = 0$, $k = 1$, $l = -1$ значения d^2f противоположны по знаку.

Если

$$d^2f(X, A) = 2h^2 + 9k^2 + 3l^2 - 8hk + 4hl - 6lk,$$

то, применив преобразование выделения полного квадрата, получим:

$$d^2f = 2(h - 2k + l)^2 + (k + l)^2.$$

Имеем сомнительный случай, так как $d^2f \geqslant 0$ и обращается в нуль на прямой

$$\left.\begin{aligned} h - 2k + l &= 0, \\ k + l &= 0. \end{aligned}\right\}$$

4. Рассмотрим функцию $f(x, y)$, непрерывную в плоскости (x, y) и обладающую следующими свойствами: на двух параболах, касающихся оси OX и

обращенных ветвями вверх, $f(x, y) = 0$, в областях двух «серпов», образованных параболами, $f(x, y) < 0$, а во всех прочих точках плоскости $f(x, y) > 0$ (черт. 110).

Поверхность $z = f(x, y)$ пересекает плоскость (x, y), по паре парабол «спускается» под плоскость (x, y) в областях двух серпов и простирается над плоскостью (x, y) в двух других областях, отмеченных на чертеже 110 значками $+$. Любая прямая плоскости XOY (кроме $y = 0$), проходящая через начало координат, пересекает серп по отрезку, не содержащему точки O. В достаточно малой окрестности точки O на данной прямой l имеем $f(x, y) > 0$, если $(x, y) \neq (0, 0)$ и $f(0, 0) = 0$.

На чертеже 111 изображена форма сечения поверхности вертикальной плоскостью, проходящей через ось OZ. Следовательно, функция $f(x, y)$ на любой прямой l, проходящей через начало координат, имеет минимум (строгий) в точке O. Однако ясно, что функция $f(x, y)$ не имеет экстремума в точке O.

Аналитически функцию $f(x, y)$ можно задать, например, таким уравнением: $z = (y - x^2)(y - 2x^2)$.

Границами серпов служат параболы $y = x^2$ и $y = 2x^2$.

Вычисления (предоставляем их читателю) показывают, что точка O является стационарной, причем в ней имеет место сомнительный случай. Отсутствие экстремума легко установить, если рассматривать функцию $f(x, y)$ на параболах $y = kx^2$:

$$f(x, kx^2) = x^4 (k - 1)(k - 2).$$

При $k < 1$ или $k > 2$ на соответствующих параболах имеем $f(x, kx^2) > 0$, где $x \neq 0$; при $1 < k < 2$ на соответствующих параболах имеем $f(x, kx^2) < 0$.

ГЛАВА IV

НЕЯВНЫЕ ФУНКЦИИ, ОТОБРАЖЕНИЯ

§ 34. Регулярные отображения

Система m функций

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ y_2 &= f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m &= f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{aligned}\right\} \qquad (f)$$

от n аргументов $x_1, x_2, \ldots, x_n$, рассматриваемых совместно на данном множестве $\mathfrak{M}_X$ пространства $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, ставит в соответствие всякой точке $X \in \mathfrak{M}_X$ некоторую определенную точку Y пространства $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$. Это соответствие будем называть отображением, в котором точка $X(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ является прообразом, а точка $Y(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ — образом.

Множеству точек $\mathfrak{M}_X$ соответствует в пространстве $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ некоторое множество точек $\mathfrak{M}_Y$ — образ множества $\mathfrak{M}_X$.

Выше рассматривались различные частные виды отображений, например:

1° функция $y = f(x)$ одного аргумента $(m = 1, n = 1)$ определяет отображение множества точек одной прямой на некоторое множество точек другой прямой;

2° параметрическое задание линии в пространстве

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \qquad (n = 1, m = 3)$$

есть отображение, в котором прообразы суть значения параметра (точки прямой линии), а образы — точки пространства;

3° параметрическое задание поверхности

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v)$$

есть отображение, в котором прообразы суть точки плоскости (u, v), а образы — точки пространства.

Две различные точки X_1 и X_2 множества $\mathfrak{M}_X$ могут отображаться в одну и ту же точку Y, и, в общем случае, данный образ (точка Y) имеет некоторое множество (конечное или бесконечное) прообра-

зов. Однако может оказаться, что всяким двум различным прообразам $X_1 \in \mathfrak{M}_X$ и $X_2 \in \mathfrak{M}_X$ соответствуют два различные образа: $Y_1 \neq Y_2$, если $X_1 \neq X_2$.

В этом случае отображение называется взаимно однозначным на множестве $\mathfrak{M}_X$. *Во взаимно однозначном отображении всякий образ имеет один единственный прообраз.*

Определение. *Если отображение (f) взаимно однозначно на множестве $\mathfrak{M}_X$, то отображение $(\bar{f})$, в котором всякой точке $Y \in \mathfrak{M}_Y$ ставится в соответствие ее прообраз $X \in \mathfrak{M}_X$, называется обратным отображением относительно (f) на множестве $\mathfrak{M}_X$.*

Пусть $A(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ — данная и $X(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — произвольные точки множества $\mathfrak{M}_X$, а $B(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ и $Y(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ — их (соответственные) образы.

Расстояние

$$\rho(Y, B) = \sqrt{(y_1 - b_1)^2 + \ldots + (y_m - b_m)^2} =$$
$$= \sqrt{[f_1(X) - f_1(A)]^2 + \ldots + [f_m(X) - f_m(A)]^2}$$

есть функция точки X.

Определение. *Отображение (f) называется непрерывным в точке $X = A$, если расстояние $\rho(Y, B)$ между образами точек X и A имеет предел в точке A, равный нулю:*

$$\lim_{X \to A} \rho(Y, B) = 0.$$

Значит, для отображения, непрерывного в точке A, будет выполняться неравенство

$$\rho(Y, B) = \sqrt{[f_1(X) - f_1(A)]^2 + \ldots + [f_m(X) - f_m(A)]^2} < \varepsilon$$

в некоторой достаточно малой окрестности U_A точки A.

При соблюдении этого неравенства будем иметь и подавно

$$|f_1(X) - f_1(A)| < \varepsilon, \ \ldots, \ |f_m(X) - f_m(A)| < \varepsilon.$$

Следовательно, каждая из функций системы (f) непрерывна в точке A. Обратно, если каждая из функций системы (f) непрерывна в точке A, то отображение непрерывно в этой точке. В самом деле, в этом случае

$$\lim_{X \to A} \rho(Y, B) = \lim_{X \to A} \sqrt{\sum [f_k(X) - f_k(A)]^2} = 0.$$

Если отображение непрерывно в каждой точке множества $\mathfrak{M}_X$, то оно называется непрерывным на этом множестве.

Теорема. *Если отображение (f) взаимно однозначно и непрерывно в области G, то образом всякой простой дуги, содержащейся в этой области, также является простая дуга.*

Доказательство. В самом деле, на простой дуге координаты точки X являются непрерывными функциями параметра на некотором

сегменте. В силу непрерывности сложной функции координаты точки G (образа) также являются непрерывными функциями параметра t. Двум различным значениям параметра t_1 и t_2 соответствуют две различные точки X_1 и X_2, а этим последним точкам соответствуют две различные точки Y_1 и Y_2. Следовательно, образом простой дуги также является простая дуга, ч. т. д.

Простая замкнутая линия отображается на простую замкнутую линию.

Аналогично доказывается, что взаимно однозначным и непрерывным образом простого куска поверхности служит также простой кусок поверхности.

Определение. *Отображение*

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ y_2 &= f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n &= f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{aligned}\right\}, \qquad (f)$$

в котором число функций равно числу аргументов, называется регулярным в области G пространства $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, если

1° *функции $f_1, f_2, \ldots, f_n$ имеют (каждая) в области G непрерывные производные по всем аргументам;*

2° *детерминант*

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

отличен от нуля в области G.

Детерминант D называется детерминантом Якоби, или якобианом, данного отображения.

Якобиан обозначается символом

$$\frac{D(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}.$$

В частности, для функции одного аргумента $y = f(x)$ якобиан равен производной:

$$\frac{D(f)}{D(x)} = f'(x).$$

Следствие I. *Отображение (f), регулярное в области G, является непрерывным.*

В самом деле, каждая из функций f_i имеет непрерывные производные, а потому дифференцируема и, следовательно, непрерывна в области G.

Следствие II. *Якобиан регулярного отображения есть знакопостоянная (т. е. положительная или отрицательная) функция в области G.*

В самом деле, в силу непрерывности производных якобиан также есть функция, непрерывная в области G. Ни в каких двух точках области G значения якобиана не могут быть числами, противоположными по знаку, так как в противном случае (по теореме о промежуточном значении) якобиан обратился бы в нуль хотя бы в одной точке области G, что противоречит условию 2°.

Примеры.

1. Функция $z = f(x, y)$ определяет отображение, в котором точке (x, y) плоскости ставится в соответствие точка z прямой линии.

В общем случае это отображение не является взаимно однозначным. Всякая линия уровня, на которой $f(x, y) = C$, отображается в одну точку $z = C$.

Так, например, функция $z = x^2 + y^2$ отображает окружность $x^2 + y^2 = r^2$ в точку $z = r^2$. Вся плоскость (x, y) отображается на луч $z \geqslant 0$.

2. Аффинное отображение

$$\left.\begin{aligned} x &= a_{11}u + a_{12}v + b_1 \\ y &= a_{21}u + a_{22}v + b_2 \end{aligned}\right\} \qquad (A)$$

есть регулярное отображение, так как производные x'_u, y'_u, x'_v, y'_v, будучи константами, непрерывны и

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

в силу определения аффинного отображения. Аффинное отображение является взаимно однозначным. В самом деле, при произвольных данных значениях x и y система уравнений (A) имеет единственное решение относительно u и v. Следовательно, аффинное отображение устанавливает взаимно однозначное соответствие между точками плоскостей (u, v) и (x, y).

3. Отображение

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi$$

ставит в соответствие точке плоскости (φ, ρ) точку плоскости (x, y). Это отображение не является взаимно однозначным во всей плоскости (φ, ρ).

В самом деле, если $\varphi_1 = \varphi + 2k\pi$ (где $k \neq 0$ — целое число), то точкам (φ, ρ) и (φ_1, ρ) соответствует одна и та же точка плоскости (x, y) (черт. 112).

Прямая $\rho = a$ при $a \neq 0$ отображается на окружность $x^2 + y^2 = a^2$, прямая $\rho = 0$ (ось $O\varphi$) отображается в точку $x = y = 0$. Прямая $\varphi = \alpha$ (= const) отображается на прямую

$$y = x \operatorname{tg} \alpha.$$

На чертеже 113 показано отображение полуполосы

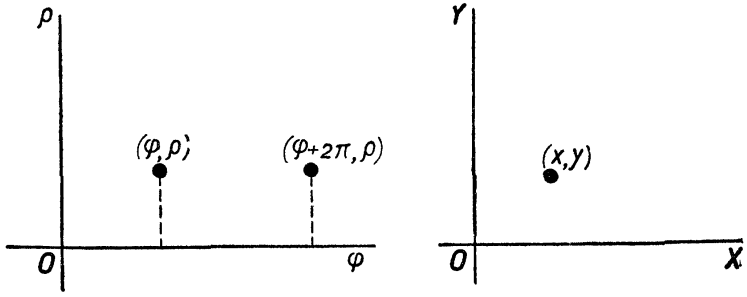
$$0 < \rho < +\infty, \quad 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}.$$

Этой полуполосе в плоскости (x, y) соответствует множество точек внутри первого квадранта.

Вычислим якобиан отображения:

$$\frac{D(x, y)}{D(\varphi, \rho)} = \begin{vmatrix} -\rho \sin\varphi & \cos\varphi \\ \rho\cos\varphi & \sin\varphi \end{vmatrix} = -\rho.$$

Следовательно, отображение регулярно в любой области плоскости (φ, ρ), не содержащей точек оси $\rho = 0$.

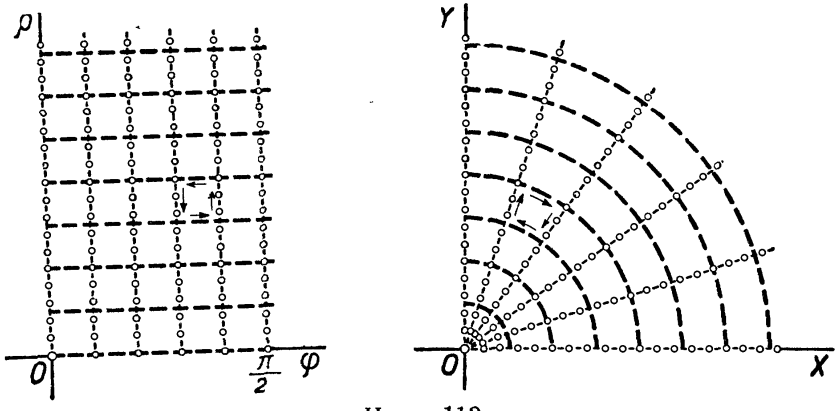


Черт. 112.

4. Отображение

$$x = uv, \quad y = \frac{v}{u} \tag{1}$$

регулярно в первом квадранте $u > 0$, $v > 0$, так как реализующие его функции



Черт. 113.

имеют (в первом квадранте) непрерывные производные и якобиан, отличный от нуля:

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} v & u \\ -\dfrac{v}{u^2} & \dfrac{1}{u} \end{vmatrix} = 2\frac{v}{u}.$$

Всякая точка (u, v), где $u > 0$, $v > 0$, имеет единственный прообраз

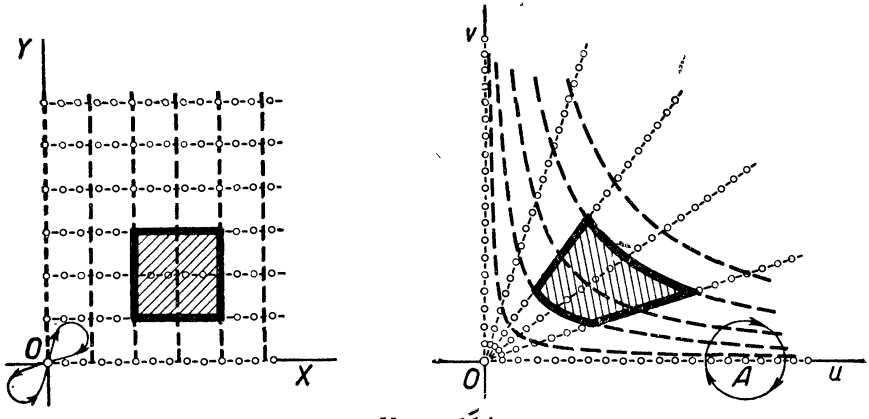
$$u = \sqrt{\frac{x}{y}}, \quad v = \sqrt{xy}.$$

Этими функциями определяется обратное отображение. Первый квадрант плоскости (u, v) взаимно однозначно отображается на первый квадрант плоскости (x, y), полупрямая $x = a$ отображается на ветвь гиперболы $uv = a$, а полупрямая $y = k$ — на луч $v = ku$.

Прямоугольник $a \leqslant x \leqslant a_1, \quad k \leqslant y \leqslant k_1$

отображается на криволинейный четырехугольник, представленный на чертеже 114.

Отображение (1) непрерывно (но не регулярно) в полуплоскости $u > 0$. Рассмотрим IV квадрант $u > 0$, $v < 0$, тогда $x < 0$, $y < 0$.



Черт. 114.

Следовательно, IV квадрант отображается в плоскости (x, y) на III квадрант. Для обратного отображения в IV квадранте получим:

$$u = \sqrt{\frac{x}{y}}, \quad v = -\sqrt{xy}.$$

Ось $v = 0$, на которой якобиан обращается в нуль (а потому нарушается регулярность), отображается в точку $x = y = 0$.

На чертеже 114 представлен кружок с центром A на оси OU и его образ в плоскости (x, y). Горизонтальному диаметру круга соответствует точка O, и взаимная однозначность отображения нарушается.

5. Отображение

$$x = u + v, \quad y = (u + v)^2$$

непрерывно, но не регулярно ни в какой области, так как его якобиан тождественно равен нулю:

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2(u+v) & 2(u+v) \end{vmatrix} = 0.$$

Образ любой точки (u, v) лежит на параболе

$$y = x^2.$$

Прямая $u + v = C$ отображается в точку (c, c^2).

6. Отображение

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = \xi$$

имеет якобиан

$$\frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \varphi, \xi)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho.$$

Это отображение регулярно в любой области пространства (φ, ρ, ξ), не содержащей точек плоскости $\rho = 0$.

Теорема. *Если отображение (f) регулярно в области G, то оно является взаимно однозначным в достаточно малой окрестности любой точки $X_0 \in G$.*

Доказательство. Во избежание громоздких обозначений проведем доказательство для отображения, заданного системой двух функций:

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v).$$

В этом отображении всякой точке (u, v) некоторой области G_{uv} на плоскости UOV ставится в соответствие точка (x, y) плоскости XOY.

Пусть $(u_0, v_0) \in G_{uv}$ — данная точка; докажем, что всяким двум различным точкам (u, v) и $(\bar{u}, \bar{v})$ в некоторой достаточно малой окрестности точки (u_0, v_0) на плоскости (x, y) соответствуют две различные точки (x, y) и $(\bar{x}, \bar{y})$.

Рассмотрим детерминант

$$\Delta(u_1, v_1; u_2, v_2) = \begin{vmatrix} x'_u(u_1, v_1) & x'_v(u_1, v_1) \\ y'_u(u_2, v_2) & y'_v(u_2, v_2) \end{vmatrix}. \qquad (\Delta)$$

В силу предположенной непрерывности производных x'_u, x'_v, y'_u, y'_v данного регулярного отображения детерминант $\Delta(u_1, v_1; u_2, v_2)$ есть непрерывная функция координат точек $(u_1, v_1) \in G_{uv}$ и $(u_2, v_2) \in G_{uv}$.

Если точки (u_1, v_1) и (u_2, v_2) совпадают, то $\Delta(u_1, v_1; u_2, v_2)$ обращается в якобиан

$$\Delta(u, v, u, v) = \begin{vmatrix} x'_u(u, v) & x'_v(u, v) \\ y'_u(u, v) & y'_v(u, v) \end{vmatrix} = \frac{D(x, y)}{D(u, v)}.$$

В силу регулярности отображения, в любой точке области G_{uv}, и в частности в точке (u_0, v_0), значение якобиана отлично от нуля: $\Delta(u_0, v_0, u_0, v_0) \neq 0$.

Следовательно (в силу непрерывности Δ), существует достаточно малая окрестность K точки (u_0, v_0) такая, что $\Delta(u_1, v_1; u_2, v_2) \neq 0$, если $(u_1, v_1) \in K$ и $(u_2, v_2) \in K$.

Докажем, что если точки $(u, v) \in K$ и $(\bar{u}, \bar{v}) \in K$ различны, то различны и их образы (x, y) и $(\bar{x}, \bar{y})$ на плоскости XOY.

Имеем:

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v);$$
$$\bar{x} = x(\bar{u}, \bar{v}), \quad \bar{y} = y(\bar{u}, \bar{v}).$$

В силу формулы Лагранжа получим:

$$x - \bar{x} = x(u, v) - x(\bar{u}, \bar{v}) = x'_u(u_1, v_1)(u - \bar{u}) + x'_v(u_1, v_1)(v - \bar{v});$$
$$y - \bar{y} = y(u, v) - y(\bar{u}, \bar{v}) = y'_u(u_2, v_2)(u - \bar{u}) + y'_v(u_2, v_2)(v - \bar{v}),$$

где

$$u_1 = \bar{u} + \theta(u - \bar{u}), \quad v_1 = \bar{v} + \theta(v - \bar{v});$$
$$u_2 = \bar{u} + \theta_1(u - \bar{u}), \quad v_2 = \bar{v} + \theta_1(v - \bar{v}).$$

Если образы совпадают: $x = \bar{x}$, $y = \bar{y}$, то $x - \bar{x} = y - \bar{y} = 0$, и значит, разности $u - \bar{u}$ и $v - \bar{v}$ должны удовлетворять системе двух линейных однородных уравнений с детерминантом $\Delta(u_1, v_1, u_2, v_2)$, отличным от нуля; это возможно лишь, если $u - \bar{u} = v - \bar{v} = 0$, т. е. прообразы также должны совпадать: $u = \bar{u}$, $v = \bar{v}$, ч. т. д.

Примечание I. Для отображения, заданного (в общем виде) системой n функций, доказательство остается в силе, при этом Δ является (по числу аргументов) детерминантом n-го порядка. Так, для отображения

$$x = x(u, v, w), \quad y = y(u, v, w), \quad z = z(u, v, w)$$

следует положить

$$\Delta(u_1, v_1, w_1; u_2, v_2, w_2; u_3, v_3, w_3) =$$
$$= \begin{vmatrix} x'_u(u_1, v_1, w_1) & x'_v(u_1, v_1, w_1) & x'_w(u_1, v_1, w_1) \\ y'_u(u_2, v_2, w_2) & y'_v(u_2, v_2, w_2) & y'_w(u_2, v_2, w_2) \\ z'_u(u_3, v_3, w_3) & z'_v(u_3, v_3, w_3) & z'_w(u_3, v_3, w_3) \end{vmatrix}.$$

Примечание II. По доказанному, отображение, регулярное в области, является локально взаимно однозначным, однако оно может не быть взаимно однозначным во всей области.

Пример.

Отображение

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi$$

регулярно в полуплоскости $\rho > 0$, но не является взаимно однозначным в этой полуплоскости. В самом деле, точки $(\varphi + 2k\pi, \rho)$ при любом целом k имеют в плоскости (x, y) один и тот же образ.

Регулярность является достаточным, но не необходимым условием локальной взаимной однозначности отображения. Так, на-

пример, отображение

$$x = u^3, \quad y = v^3$$

взаимно однозначно: $u = \sqrt[3]{x}$, $v = \sqrt[3]{y}$,
но не регулярно в плоскости (u, v): якобиан

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = 9u^2v^2$$

обращается в нуль на осях OU и OV.

§ 35. Неявные функции

Определение. *Система функций*

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_m), \quad y_2 = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_m), \ldots \\ \ldots, \quad y_n = f_n(x_1, x_2, \ldots, x_m), \end{array}\right\} \quad (f)$$

рассматриваемых совместно на некотором множестве точек $\mathfrak{M}_X$, *называется решением системы уравнений*

$$\left.\begin{array}{l} F_1(x_1, x_2, \ldots, x_m; y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0, \ldots \\ \ldots, \quad F_k(x_1, x_2, \ldots, x_m; y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0 \end{array}\right\} \quad (F)$$

на множестве $\mathfrak{M}_X$, *если при подстановке вместо аргументов* y_i *соответствующих функций* $f_i(X)$ *левые части уравнений* (F) *обратятся в нуль тождественно на множестве* $\mathfrak{M}_X$.

Геометрическая интерпретация. Рассмотрим простейший случай одного уравнения:

$$F(x, y) = 0.$$

Пусть $\mathfrak{M}$ есть множество точек, по которому плоскость $z = 0$ пересекает график функции $z = F(x, y)$, а $\mathfrak{M}_x$ — проекция этого множества на ось Ox. Если всякому данному значению $x \in \mathfrak{M}_x$ поставить в соответствие ординату y одной из точек множества $\mathfrak{M}$, проектирующихся на ось OX в точку $(x, 0)$, то получим функцию $y = f(x)$, удовлетворяющую данному уравнению. Здесь могут представиться разные случаи: плоскость $z = 0$ может пересекать график по одной, нескольким или по бесконечному множеству линий, может иметь с графиком отдельные изолированные общие точки или общие куски плоскости и т. п.; наконец, плоскость $z = 0$ может не пересекать графика, в последнем случае не существует ни одной функции, удовлетворяющей данному уравнению.

Во многих случаях возможно отыскать единственную функцию (или систему функций), удовлетворяющую на данном множестве данному уравнению (или системе уравнений) и некоторым заранее поставленным дополнительным условиям, и тогда задание уравнения (или системы) можно рассматривать как один из способов задания функции (или системы функций).

Определение. *Функции, задаваемые посредством уравнений (или систем уравнений), называются функциями, заданными неявно, или, кратко, неявными функциями.*

Примеры.

1. Функция $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ удовлетворяет уравнению $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ в круге $x^2 + y^2 \leqslant 1$, так как в этом круге

$$x^2 + y^2 + (\sqrt{1 - x^2 - y^2})^2 = 1.$$

Этому же уравнению удовлетворяет система функций

$$y = kx, \quad z = \sqrt{1 - x^2(k^2 + 1)}$$

на сегменте $\dfrac{-1}{\sqrt{k^2+1}} \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{k^2+1}}$, где k — данное действительное число.

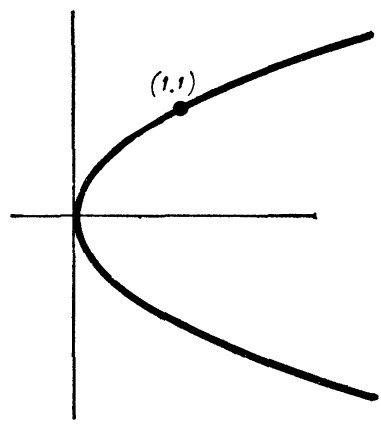
2. Система функций $y = 1 + \dfrac{x}{3}$, $z = \dfrac{2}{3}x$ удовлетворяет системе уравнений $\begin{matrix} x + y + 2z = 1, \\ x - y + z = -1 \end{matrix}$ в интервале $-\infty < x < +\infty$.

3. Не существует ни одной функции (действительной), удовлетворяющей уравнению $x^2 + y^2 + 1 = 0$, так как левая часть положительна во всей плоскости (x, y). Параболоид $z = x^2 + y^2 + 1$ расположен выше этой плоскости.

4. Уравнению $x^2 + y^2 = 0$ удовлетворяет единственная функция $y = 0$, рассматриваемая на множестве, состоящем лишь из одной точки $x = 0$. Параболоид $z = x^2 + y^2$ имеет только одну общую точку с плоскостью $z = 0$.

5. Рассмотрим уравнение $x - y^2 = 0$. При всяком данном значении $x > 0$ этому уравнению удовлетворяют два различные числа: $y = \pm\sqrt{x}$.

Существует бесконечное множество функций, удовлетворяющих данному уравнению на полусегменте $0 \leqslant x < +\infty$. В самом деле, разобьем полусегмент $[0, +\infty)$ на любые две части; на первой части положим $y = \sqrt{x}$, а на второй $y = -\sqrt{x}$; всякая такая функция удовлетворяет данному уравнению. Примером может служить функция:



Черт. 115.

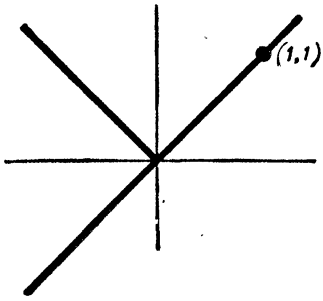
$$y = \begin{cases} \sqrt{x} \text{ (если } x \text{ — рациональное число),} \\ -\sqrt{x} \text{ (если } x \text{ — иррациональное число).} \end{cases}$$

Поставим следующее условие: искомая функция должна быть непрерывной на полусегменте $[0, +\infty)$, тогда получим только две различные функции: $y = \sqrt{x}$ и $y = -\sqrt{x}$ (черт. 115).

Если поставить следующие условия: искомая функция непрерывна и имеет значение, равное 1, при $x = 1$, тогда получим одну единственную функцию

$y = \sqrt{x}$. Геометрически ищется линия $y = f(x)$, проходящая через данную начальную точку (1, 1). Начальную точку нельзя выбирать произвольно, она должна лежать на параболе $y^2 = x$. Если в качестве начальной точки взять точку (0, 0), то получим две непрерывные функции $y = \sqrt{x}$ и $y = -\sqrt{x}$, удовлетворяющие данному уравнению; в этой точке соединяются две ветви параболы $y^2 = x$.

6. Будем искать всевозможные непрерывные в интервале $(-\infty, +\infty)$ функции $y = f(x)$, удовлетворяющие уравнению $y^2 - x^2 = 0$.



Черт. 116.

Данное уравнение эквивалентно уравнению $|y| = |x|$.

Следовательно, существуют четыре искомые функции:

$$y = x, \quad y = -x, \quad y = |x|, \quad y = -|x|.$$

Дополнительное задание начальной точки (1,1) определяет две различные непрерывные функции:

$$y = x \quad \text{и} \quad y = |x|,$$

на полусегменте $[0, +\infty)$ эти функции равны (черт. 116).

7. Рассмотрим уравнение

$$(\sqrt{x^2} + x)(y^3 - x) = 0.$$

Имеем:

$$\sqrt{x^2} + x \begin{cases} = 0 & (\text{при } x \leqslant 0), \\ = 2x \neq 0 & (\text{при } x > 0). \end{cases}$$

Следовательно, левая часть данного уравнения равна нулю во всей левой полуплоскости $x \leqslant 0$ и на кубической параболе $y^3 = x$ в правой полуплоскости $x \geqslant 0$.

Любая функция

$$y = \begin{cases} \sqrt[3]{x} & (\text{если } x > 0), \\ f(x) & (\text{если } x \leqslant 0), \end{cases}$$

где $f(x)$ — произвольная функция, на полусегменте $(-\infty, 0]$, удовлетворяет данному уравнению.

Теорема существования и единственности неявных функций.

Если система уравнений

$$\left.\begin{aligned} &F_1(x_1, x_2, \ldots, x_m; \; y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0 \\ &F_2(x_1, x_2, \ldots, x_m; \; y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &F_n(x_1, x_2, \ldots, x_m; \; y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (F)$$

в некоторой области G, содержащей начальную точку

$$\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)}; y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}\right),$$

удовлетворяет следующим условиям:

1° *функции F_i непрерывны и имеют непрерывные производные по аргументам $y_1, y_2, \ldots, y_n$;*

2° *значение якобиана* $\dfrac{D(F_1, F_2, \ldots, F_n)}{D\left(y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_m^{(0)}\right)}$ *по аргументам $y_1, y_2, \ldots, y_n$ в начальной точке отлично от нуля;*

3° *начальная точка удовлетворяет системе уравнений (F):*

$$F_i\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)}; y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}\right) = 0;$$

где $i = 1, 2, \ldots, n$;

то в достаточно малой окрестности точки $X_0\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)}\right)$ существует единственная система непрерывных функций

$$y_1 = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_m), \quad y_2 = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_m), \ldots,$$
$$y_n = f_n(x_1, x_2, \ldots, x_m),$$

удовлетворяющая системе уравнений (F) и начальным условиям

$$y_1^{(0)} = f_1(X_0), \quad y_2^{(0)} = f_2(X_0), \ldots, y_n^{(0)} = f_n(X_0).$$

Доказательство. Во избежание громоздких выкладок проведем доказательство для системы двух уравнений

$$F(x, y, z) = 0, \quad \Phi(x, y, z) = 0,$$

удовлетворяющей условиям:

1° функции F, Φ, F'_y, F'_z, Φ'_y, Φ'_z непрерывны в области, содержащей начальную точку (x_0, y_0, z_0);

2° $$\begin{vmatrix} F'_y(x_0, y_0, z_0) & F'_z(x_0, y_0, z_0) \\ \Phi'_y(x_0, y_0, z_0) & \Phi'_z(x_0, y_0, z_0) \end{vmatrix} \neq 0;$$

3° $F(x_0, y_0, z_0) = \Phi(x_0, y_0, z_0) = 0$.

Требуется доказать, что в окрестности точки x_0 существует единственная система непрерывных функций

$$y = y(x) \quad \text{и} \quad z = z(x),$$

удовлетворяющая данным уравнениям:

$$F(x, y(x), z(x)) = 0, \quad \Phi(x, y(x), z(x)) = 0,$$

и начальным условиям $y_0 = y(x_0)$, $z_0 = z(x_0)$.

Рассмотрим систему функций:

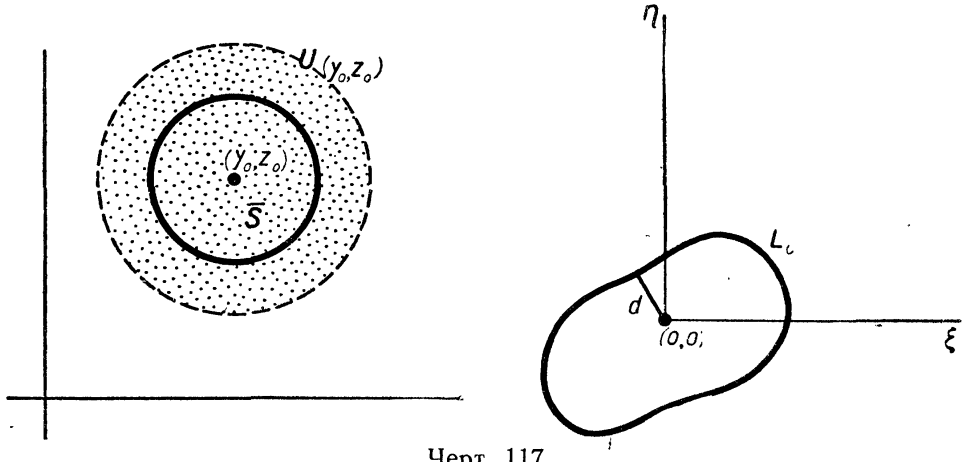
$$\xi = F(x, y, z), \quad \eta = \Phi(x, y, z). \qquad (T_x)$$

Так как якобиан $\frac{D(F, \Phi)}{D(y, z)}$ отличен от нуля в начальной точке, то в силу непрерывности производных он отличен от нуля в некоторой области, содержащей начальную точку. Будем рассматривать функции F и Φ в этой области. При всяком данном значении x система (T_x) определяет регулярное отображение, в котором точке (y, z) ставится в соответствие точка (ξ, η).

Докажем, что существуют окрестность $U_{(y_0, z_0)}$ точки (y_0, z_0) и окрестность U_{x_0} точки x_0 такие, что отображение (T_x) является взаимно однозначным в окрестности $U_{(y_0, z_0)}$ при любом данном значении $x \in U_{x_0}$. В самом деле, как доказано в § 34 (стр. 160), регулярное отображение (T_x) является локально взаимно однозначным в любой окрестности точки (y_0, z_0), в которой детерминант

$$\Delta(x, y, z, \bar{y}, \bar{z}) = \begin{vmatrix} F'_y(x, y, z) & F'_z(x, y, z) \\ \Phi'_y(x, \bar{y}, \bar{z}) & \Phi'_z(x, \bar{y}, \bar{z}) \end{vmatrix}$$

отличен от нуля (при данном значении x).



Черт. 117.

Детерминант $\Delta(x, y, z, \bar{y}, \bar{z})$ есть непрерывная функция, причем

$$\Delta(x_0, y_0, z_0, y_0, z_0) = \frac{D(F, \Phi)}{D(y_0, z_0)} \neq 0.$$

Следовательно, существуют такие достаточно малые окрестности $U_{(y_0, z_0)}$ и U_{x_0}, что $\Delta(x, y, z, \bar{y}, \bar{z}) \neq 0$, если $x \in \overline{U}_{x_0}$, $(y, z) \in \overline{U}_{(y_0, z_0)}$, $(\bar{y}, \bar{z}) \in \overline{U}_{(y_0, z_0)}$, где $\overline{U}_{(y_0, z_0)}$ и $\overline{U}_{x_0}$ — соответствующие замкнутые окрестности. Значит, отображение (T_x) взаимно однозначно

в окрестности $U_{(y_0,\ z_0)}$ при любом $x \in U_{x_0}$. Значению $x = x_0$ соответствует начальное отображение

$$\xi = F(x_0,\ y,\ z), \quad \eta = \Phi(x_0,\ y,\ z), \qquad (T_0)$$

в котором точка $y = y_0$, $z = z_0$ отображается в начало координат $\xi = \eta = 0$ плоскости $(\xi,\ \eta)$, так как в силу условия 3°

$$F(x_0,\ y_0,\ z_0) = \Phi(x_0,\ y_0,\ z_0) = 0.$$

Рассмотрим любой круг $\overline{S}$ с центром в точке $(y_0,\ z_0)$, содержащийся в окрестности $U_{(y_0,\ z_0)}$. Окружность круга $\overline{S}$ посредством начального отображения переходит в некоторую простую замкнутую линию L_0. Линия L_0 не проходит через точку $\xi = \eta = 0$; в самом деле, в силу локальной взаимной однозначности отображения ни одна точка $(y,\ z)$, кроме $(y_0,\ z_0)$, окрестности $U_{(y_0,\ z_0)}$ не может отобразиться в начало координат $\xi = \eta = 0$.

Обозначим через d расстояние от линии L_0 до начала координат (в плоскости $\xi O \eta$, черт. 117 *).

Пусть $x \neq x_0$ — какая-либо точка окрестности U_{x_0}. Образы одной и той же точки $(y,\ z)$ в отображениях (T_0) и (T_x), вообще говоря, различны.

Расстояние

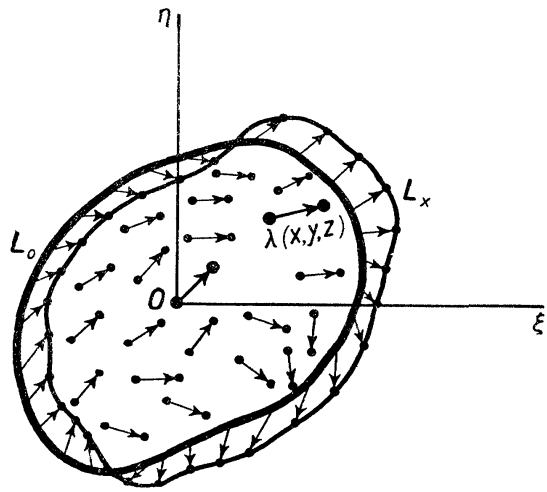
$$\lambda(x,\ y,\ z) = \sqrt{[F(x,\ y,\ z) - F(x_0,\ y,\ z)]^2 + [\Phi(x,\ y,\ z) - \Phi(x_0,\ y,\ z)]^2}$$

между образами одной и той же точки $(y,\ z)$ в отображениях (T_0) и (T_x) будем называть смещением образа при переходе от отображения (T_0) к отображению (T_x) (черт. 118).

Смещение образа есть непрерывная неотрицательная функция аргументов $x,\ y,\ z$, причем $\lambda(x_0,\ y,\ z) = 0$. В силу равномерной непрерывности функции $\lambda(x,\ y,\ z)$ на множестве точек $(y,\ z) \in \overline{U}_{(y_0,\ z_0)}$, $x \in \overline{U}_{x_0}$ существует такая δ-окрестность U_δ точки x_0, что

$$|\lambda(x,\ y,\ z) - \lambda(x_0,\ y,\ z)| = \lambda(x,\ y,\ z) < \frac{d}{3},$$

если $x \in U_\delta$ в любой точке $(y,\ z) \in \overline{U}_{(y_0,\ z_0)}$.



Черт. 118.

* Аналитически d есть наименьшее значение непрерывной функции $\sqrt{F^2(x_0,\ y,\ z) + \Phi^2(x_0,\ y,\ z)}$ на окружности круга $\overline{S}$.

Значит, при переходе от отображения (T_0) к отображению (T_x) все образы точек $(y, z) \in \overline{U}_{(y_0, z_0)}$ смещаются на расстояние, меньшее $\frac{d}{3}$, при условии, что $|x - x_0| < \delta$. В частности, все точки линии L_0 сместятся (каждая) на расстояние, меньшее $\frac{d}{3}$, а потому смещенный образ L_x окружности круга S (в плоскости $\xi O \eta$) будет находиться от начала координат на расстоянии, большем чем $\frac{2}{3}d$. Смещенный образ начальной точки (y_0, z_0) будет находиться от точки $\xi = \eta = 0$ на расстоянии, меньшем, чем $\frac{d}{3}$ (черт. 119).

Докажем, что при всяком данном значении x, где $|x - x_0| < \delta$, в соответствующем отображении (T_x) существует единственная точка круга S, отображающаяся в начало координат плоскости (ξ, η).

В самом деле, расстояние точки $\xi = F(x, y, z)$, $\eta = \Phi(x, y, z)$ до точки $\xi = 0$, $\eta = 0$:

$$r(y, z) = \sqrt{F^2(x, y, z) + \Phi^2(x, y, z)}$$

при данном $x \in U_\delta$ есть функция (аргументов y и z), непрерывная в замкнутом круге $\overline{S}$; следовательно, $r(y, z)$ имеет в этом круге наименьшее значение. Наименьшее значение расстояния не может быть реализовано ни в какой точке окружности круга $\overline{S}$, так как образ окружности (линия L_x) отстоит от начала координат на расстояние, большее $\frac{2}{3}d$, тогда как образ внутренней точки — центра круга (y_0, z_0) — отстоит от начала координат на расстояние, меньшее $\frac{d}{3}$. Следовательно, минимум реализуется в некоторой точке (y, z) внутри S. Так как

$$r^2 = \xi^2 + \eta^2 = F^2(x, y, z) + \Phi^2(x, y, z)$$

есть дифференцируемая функция аргументов y и z (при данном x), то в точке минимума ее производные должны обращаться в нуль:

$$\frac{\partial r^2}{\partial y} = 2FF'_y(x, y, z) + 2\Phi\Phi'_y(x, y, z) = 0;$$

$$\frac{\partial r^2}{\partial z} = 2FF'_z(x, y, z) + 2\Phi\Phi'_z(x, y, z) = 0;$$

но

$$\begin{vmatrix} F'_y & \Phi'_y \\ F'_z & \Phi'_z \end{vmatrix} = \frac{D(F, \Phi)}{D(y, z)} \neq 0,$$

а потому

$$F(x, y, z) = \Phi(x, y, z) = 0.$$

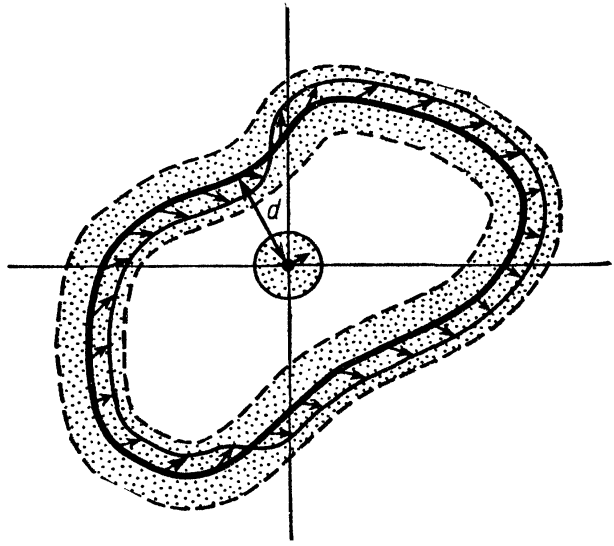
Следовательно, $\min r = 0$ и соответствующая точка отображается в начало координат $\xi = \eta = 0$. В силу локальной взаимной однозначности отображения всякая другая точка круга $\bar{S}$ отобразится в точку, отличную от начала координат.

Итак, любому значению x в интервале $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ соответствует в круге S единственная точка (y, z), отображающаяся в точку $\xi = \eta = 0$, т. е. удовлетворяющая системе уравнений

$$F(x, y, z) = 0,$$
$$\Phi(x, y, z) = 0.$$

Следовательно, координаты точки (y, z) суть функции аргумента x:

$$y = y(x), \quad z = z(x),$$



Черт. 119.

определенные в δ-окрестности точки x_0. Эти функции удовлетворяют начальным условиям

$$y_0 = y(x_0), \quad z_0 = z(x_0),$$

так как при отображении (T_0), соответствующим значению $x = x_0$, точка (y_0, z_0) является единственной точкой круга S, отображающейся в точку $\xi = \eta = 0$:

$$F(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad \Phi(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

Докажем, что функции $y(x)$ и $z(x)$ непрерывны в окрестности точки x_0.

1°. Функции $y(x)$ и $z(x)$ непрерывны в точке x_0. В самом деле, радиус круга S может быть взят меньшим заданного числа $\varepsilon > 0$. Согласно доказанному, по заданному кругу S определяется δ-окрестность точки x_0 такая, что точка $(y(x), z(x))$, удовлетворяющая системе уравнений

$$F(x, y, z) = 0, \quad \Phi(x, y, z) = 0,$$

лежит в круге S, если $|x - x_0| < \delta$, но тогда

$$|y(x) - y_0| < \varepsilon \text{ и } |z(x) - z_0| < \varepsilon,$$

т. е. функции $y(x)$ и $z(x)$ непрерывны в точке x_0.

2°. Функции $y(x)$, $z(x)$ непрерывны в любой точке x_1 из достаточно малой окрестности точки x_0.

В самом деле, значение x_1 (где $x_1 \in U_\delta$) и соответствующие значения $y_1 = y(x_1)$; $z_1 = z(x_1)$ определяют точку (x_1, y_1, z_1), удовлетворяющую уравнениям

$$F(x_1, y_1, z_1) = \Phi(x_1, y_1, z_1) = 0$$

и принадлежащую области, в которой выполнены условия теоремы. Следовательно, точка (x_1, y_1, z_1) может быть взята за начальную. Эта начальная точка определит (в силу единственности) те же функции $y(x)$, $z(x)$, что и начальная точка (x_0, y_0, z_0). Следовательно, функции $y(x)$ и $z(x)$ непрерывны в точке x_1, ч. т. д.

В частном случае одного уравнения

$$F(x, y) = 0$$

условия теоремы существования неявной функции формулируются так.

В некоторой области, содержащей начальную точку:

1° *функции* $F(x, y)$ и $F'_y(x, y)$ *непрерывны*,

2° $\dfrac{D(F)}{D(y)} = F'_y(x, y) \neq 0$,

3° $F(x_0, y_0) = 0$.

При этих условиях в некоторой окрестности точки x_0 *существует единственная функция* $y = f(x)$, *удовлетворяющая данному уравнению* $F(x, f(x)) = 0$ *и начальному условию* $y_0 = f(x_0)$.

Условия теоремы и ее доказательство имеют нижеследующую интерпретацию:

В силу 2° и 3° в некоторой окрестности начальной точки $F'_y(x, y) > 0$ или $F'_y(x, y) < 0$; в первом случае $F(x, y)$ есть возрастающая, а во втором — убывающая функция аргумента y.

Пусть, например, $F'_y > 0$. Так как функция $F(x_0, y)$ возрастает и равна нулю в начальной точке, то при достаточно малом ε имеем $F(x_0, y - \varepsilon) < 0$ и $F(x_0, y + \varepsilon) > 0$.

В силу непрерывности неравенства $F < 0$ и $F > 0$ выполняются на нижней и верхней (соответственно) сторонах достаточно малого прямоугольника

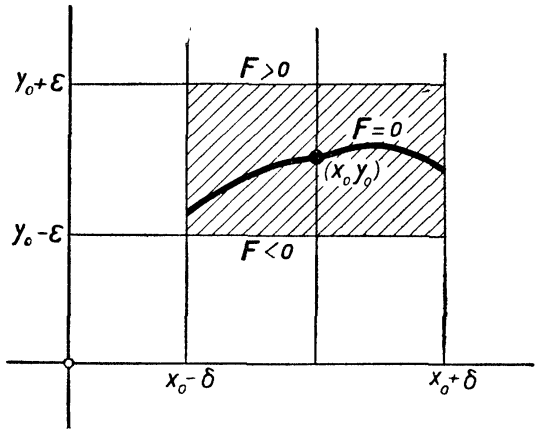
$$y_0 - \varepsilon \leqslant y \leqslant y_0 + \varepsilon, \quad x_0 - \delta \leqslant x \leqslant x_0 + \delta$$ (черт. 120).

Но тогда при всяком данном x (где $|x - x_0| < \delta$) существует единственное (в силу монотонности) значение y (где $y_0 - \varepsilon < y < y_0 + \varepsilon$), при котором $F(x, y) = 0$.

Примечание. Доказательство теоремы существования неявных функций применимо для системы уравнений с любым числом неизвестных.

В предыдущих рассуждениях следует лишь вместо круга $\bar{S}$ и его окружности рассматривать сферу и соответствующую сферическую поверхность с центром в точке $\left(y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}\right)$, а вместо интервала $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ рассматривать сферическую δ-окрестность точки $X_0\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)}\right)$.

Доказанная теорема дает достаточные, но не необходимые условия существования и единственности неявных функций.



Черт. 120.

Примеры.

1. Для уравнения $y^2 - x = 0$ в начальной точке (0,0) не выполнено условие 2°: $\frac{\partial F}{\partial y} = 2y = 0$. В этом примере существуют две непрерывные функции $y = \sqrt{x}$ и $y = -\sqrt{x}$, удовлетворяющие уравнению и начальным условиям:

2. Для уравнения $y^3 - x = 0$ в точке (0, 0) также не выполнено условие 2°, $\frac{\partial F}{\partial y} = 3y^2 = 0$. Однако в этом случае существует единственная функция $y = \sqrt[3]{x}$, удовлетворяющая уравнению и начальным условиям.

§ 36. Дифференцируемость неявных функций

Теорема. *Если при соблюдении всех условий теоремы существования неявных функций:*

1° *каждая из левых частей системы уравнений*

$$\left.\begin{aligned} &F_1(x_1, x_2, \ldots, x_m; y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0 \\ &F_2(x_1, x_2, \ldots, x_m; y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &F_n(x_1, x_2, \ldots, x_m; y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (F)$$

дифференцируема в точке $\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}\right)$, *то каждая из функций*

$$y_1 = f_1(X), \quad y_2 = f_2(X), \quad \ldots, \quad y_n = f_n(X), \qquad (f)$$

определяемых системой уравнений (F) *и начальными условиями, дифференцируема в точке* $X_0\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right)$;

2° *если функции* $F_i(X, Y)$ *дифференцируемы (каждая) в некоторой окрестности начальной точки, то функции* (f) *дифференцируемы (каждая) в окрестности точки* X_0;

3° *если функции* $F_i(X, Y)$ *имеют (каждая) в окрестности начальной точки непрерывные производные* k*-го порядка (по всем аргументам* x_i *и* y_i*), то функции* (f) *также имеют (каждая) в окрестности точки* X_0 *непрерывные производные* k*-го порядка.*

Во избежание громоздких обозначений проведем доказательство для случая функций $y = y(x)$ и $z = z(x)$, заданных неявно системой двух уравнений:

$$F(x, y, z) = 0, \quad \Phi(x, y, z) = 0. \tag{I}$$

Доказательство 1°. В силу предположенной дифференцируемости функции $F(x, y, z)$ в точке (x_0, y_0, z_0) имеем:

$$F(x, y, z) = F(x, y, z) - F(x_0, y_0, z_0) =$$
$$= [F'_{x_0} + \eta_1](x - x_0) + [F'_{y_0} + \eta_2](y - y_0) + [F'_{z_0} + \eta_3](z - z_0).$$

Аналогичное равенство имеет место для функций Ф:

$$\Phi(x, y, z) = [\Phi'_x + \xi_1](x - x_0) + [\Phi'_{y_0} + \xi_2](y - y_0) + [\Phi'_{z_0} + \xi_3](z - z_0).$$

Здесь F'_{x_0}, Φ'_{x_0}, ... и т. д. суть значения производных в начальной точке (x_0, y_0, z_0), а η_1, ξ_1 и т. д. — функции аргументов x, y, z, непрерывные в начальной точке и обращающиеся в нуль в этой точке.

Следовательно, данная система уравнений может быть записана так:

$$\left.\begin{aligned} [F'_{x_0} + \eta_1](x - x_0) + [F'_{y_0} + \eta_2](y - y_0) + [F'_{z_0} + \eta_3](z - z_0) = 0, \\ [\Phi'_{x_0} + \xi_1](x - x_0) + [\Phi'_{y_0} + \xi_2](y - y_0) + [\Phi'_{z_0} + \xi_3](z - z_0) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{I'}$$

Этой системе уравнения удовлетворяют числа x, $y(x)$ и $z(x)$ при любом значении x в некоторой окрестности точки x_0.

Иными словами, при подстановке $y = y(x)$, $z = z(x)$ левые части обоих уравнений (I′) тождественно (относительно x) обращаются в нуль в некоторой окрестности точки x_0.

По теореме о непрерывности сложной функции имеем:

$$\lim_{x \to x_0} \eta_1(x, y(x), z(x)) = \eta_1(x_0, y_0, z_0) = 0, \text{ так как}$$

$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0 \\ z \to z_0}} \eta_1(x, y, z) = \eta_1(x_0, y_0, z_0) = 0$ и (в силу непрерывности неявных функций) $\lim\limits_{x \to x_0} y(x) = y(x_0) = y_0$ и $\lim\limits_{x \to x_0} z(x) = z(x_0) = z_0$. Аналогичное утверждение имеет место относительно прочих дополнительных слагаемых ξ_1, η_2, ξ_2, η_3 и ξ_3. Будем рассматривать (I′) как систему линейных уравнений относительно приращений $y - y_0$, $z - z_0$ (где $y = y(x)$, $z = z(x)$).

Детерминант этой системы

$$\Delta(x)=\begin{vmatrix} F'_{y_0}+\eta_2 & F'_{z_0}+\eta_3 \\ \Phi'_{y_0}+\xi_2 & \Phi'_{z_0}+\xi_3 \end{vmatrix}$$

в точке x_0 имеет предел, отличный от нуля, равный значению якобиана $\frac{D(F,\Phi)}{D(y,z)}$ в начальной точке, поэтому:

$$\Delta(x)=\frac{D(F,\Phi)}{D(y_0,z_0)}+\omega(x), \quad \text{где} \lim_{x\to x_0}\omega(x)=0.$$

Следовательно, $\Delta(x)\neq 0$ в некоторой окрестности U_{x_0} точки x_0, а поэтому из системы (I′) получим:

$$y-y_0=-\frac{\begin{vmatrix} F'_{x_0}+\eta_1 & F'_{z_0}+\eta_3 \\ \Phi'_{x_0}+\xi_1 & \Phi'_{z_0}+\xi_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F'_{y_0}+\eta_2 & F'_{z_0}+\eta_3 \\ \Phi'_{y_0}+\xi_2 & \Phi'_{z_0}+\xi_3 \end{vmatrix}}(x-x_0)=$$

$$=-\frac{\begin{vmatrix} F'_{x_0} & F'_{z_0} \\ \Phi'_{x_0} & \Phi'_{z_0} \end{vmatrix}+\omega_1}{\begin{vmatrix} F'_{y_0} & F'_{z_0} \\ \Phi'_{y_0} & \Phi'_{z_0} \end{vmatrix}+\omega}(x-x_0),$$

где $\lim \omega_1=0$, откуда находим:

$$y-y_0=-\frac{\frac{D(F,\Phi)}{D(x_0,z_0)}}{\frac{D(F,\Phi)}{D(y_0,z_0)}}(x-x_0)+(x-x_0)\alpha(x),$$

где $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$.

Следовательно, функция $y(x)$ дифференцируема в точке x_0 и

$$y'(x_0)=-\frac{\begin{vmatrix} F'_{x_0} & F'_{z_0} \\ \Phi'_{x_0} & \Phi'_{z_0} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F'_{y_0} & F'_{z_0} \\ \Phi'_{y_0} & \Phi'_{z_0} \end{vmatrix}}.$$

Аналогично устанавливается дифференцируемость функции $z(x)$ в точке x_0, и равенство

$$z'(x_0)=-\frac{\begin{vmatrix} F'_{y_0} & F'_{x_0} \\ \Phi'_{y_0} & \Phi'_{x_0} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F'_{y_0} & F'_{z_0} \\ \Phi'_{y_0} & \Phi'_{z_0} \end{vmatrix}}, \quad \text{ч. т. д.}$$

Доказательство 2°. Предположим, что функции $F(x, y, z)$ и $\Phi(x, y, z)$ дифференцируемы в некоторой окрестности точки (x_0, y_0, z_0). Примем в качестве начальной точки точку (x, y, z), где $y = y(x)$, $z = z(x)$, а x — произвольное значение в некоторой достаточно малой окрестности U_{x_0} точки x_0.

Окрестность U_{x_0} выбирается так, чтобы в ней были определены неявные функции и в точке (x, y, z) функции F и Φ были дифференцируемы. Согласно доказанному в предыдущем пункте 1° функции $y(x)$ и $z(x)$ дифференцируемы в точке x и

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{D(F, \Phi)}{D(x, z)}}{\dfrac{D(F, \Phi)}{D(y, z)}} \quad \text{и} \quad \frac{dz}{dx} = -\frac{\dfrac{D(F, \Phi)}{D(y, x)}}{\dfrac{D(F, \Phi)}{D(y, z)}}, \tag{2}$$

ч. т. д.

Доказательство 3°. Равенства (2) дают выражения производных $y'(x)$ и $z'(x)$ в виде рациональных функций от частных производных F'_x, Φ'_x и т. д. с знаменателем, отличным от нуля, при этом аргументы y и z следует рассматривать как промежуточные:

$$y = y(x), \quad z = z(x).$$

Если все частные производные функций $F(x, y, z)$ и $\Phi(x, y, z)$ непрерывны, то по теореме о непрерывности сложной функции производные y' и z' также являются непрерывными функциями аргумента x.

Если частные производные функций F и Φ дифференцируемы, то по теореме о дифференцируемости сложной функции $y'(x)$ и $z'(x)$ также являются дифференцируемыми функциями.

Выполняя дифференцирование равенств (2) по правилу дифференцирования сложной функции, получим формулы, выражающие $y''(x)$ и $z''(x)$ через частные производные первого и второго порядков от функции F и Φ, и производные $y'(x)$ и $z'(x)$ *.

Если вторые производные функции F и Φ непрерывны в окрестности начальной точки, то (теорема о непрерывности сложной функции) $y''(x)$ и $z''(x)$ непрерывны в окрестности точки x_0. Эти же рассуждения применимы к последующим производным, откуда приходим к следующему заключению: *если функции F и Φ имеют дифференцируемые производные порядка $k-1$, то функции $y(x)$ и $z(x)$ имеют производные k-го порядка; эти производные непрерывны, если k-е частные производные функций F и Φ непрерывны*, ч. т. д.

---

* Заметим, что $y'(x)$ и $z'(x)$ можно в силу (2) считать выраженными через x, y и z.

Примечание. Доказательство применимо в общем случае к неявным функциям любого числа аргументов, заданным при помощи системы с любым числом уравнений. В соответствующих рассуждениях вместо детерминантов второго порядка будут фигурировать в общем случае детерминанты n-го порядка.

Техника дифференцирования неявных функций. Ниже будут установлены правила практического вычисления производных и дифференциалов от неявных функций. Мы будем считать выполненными все те достаточные условия, при которых доказаны теоремы существования и дифференцируемости неявных функций. При этих условиях можно применять общие правила дифференцирования функций.

Пусть функции

$$\left.\begin{aligned} y_1 = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_m),\quad y_2 = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_m), \ldots,\\ \ldots,\ y_n = f_n(x_1, x_2, \ldots, x_m) \end{aligned}\right\} \quad (f)$$

заданы неявно системой уравнений

$$\left.\begin{aligned} F_1(x_1, x_2, \ldots, x_m; y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0,\\ F_2(x_1, x_2, \ldots, x_m; y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ F_n(x_1, x_2, \ldots, x_m; y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0. \end{aligned}\right\} \quad (F)$$

Подставив каждую из функций $y_1, y_2, \ldots, y_n$ в левые части уравнений (F), получим сложные функции:

$$F_i\big(x_1, x_2, \ldots, x_m; y_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, y_n(x_1, \ldots, x_m)\big) \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

каждая из которых есть константа, равная нулю в окрестности точки $X_0\big(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\big)$. Производные от этих сложных функций по аргументам $x_1, x_2, \ldots, x_m$ суть также константы, равные нулю. Для вычисления производных по аргументу x_k от функций (f) дифференцируем каждую из функций $F_1, F_2, \ldots, F_n$ по аргументу x_k по правилу дифференцирования сложной функции, тогда получим следующие n тождеств (относительно аргументов $x_1, x_2, \ldots, x_m$):

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial x_k} + \frac{\partial F_1}{\partial y_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_k} + \frac{\partial F_1}{\partial y_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_k} + \ldots + \frac{\partial F_1}{\partial y_n}\frac{\partial f_n}{\partial x_k} = 0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \frac{\partial F_n}{\partial x_k} + \frac{\partial F_n}{\partial y_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_k} + \frac{\partial F_n}{\partial y_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_k} + \ldots + \frac{\partial F_n}{\partial y_n}\frac{\partial f_n}{\partial x_k} = 0. \end{aligned}\right\} \quad (F'_{x_k})$$

Переход от системы (F) к системе тождеств (F'_{x_k}) будем кратко называть дифференцированием уравнений (F) по аргументу x_k. Тожде-

ства $\left(F'_{x_k}\right)$ можно рассматривать как систему линейных уравнений относительно искомых производных $\frac{\partial f_1}{\partial x_k}, \frac{\partial f_2}{\partial x_k}, \ldots, \frac{\partial f_n}{\partial x_k}$. Детерминант этой системы есть якобиан $\frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_n)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}$, отличный от нуля (в силу условий теоремы существования неявных функций), поэтому искомые производные могут быть найдены из системы $\left(F'_{x_k}\right)$.

Дифференцируя уравнения $\left(F'_{x_k}\right)$ по аргументу x_l, получим систему линейных уравнений $\left(F''_{x_k x_l}\right)$ относительно вторых производных $\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_k \partial x_l}$ *.

Дальнейшие дифференцирования дадут систему уравнений относительно третьих производных и так далее. Этот процесс последовательного дифференцирования уравнений дает возможность вычислить производные любого порядка от неявных функций.

Так, например, для функции $y = f(x)$, заданной неявно уравнением

$$F(x, y) = 0, \tag{F}$$

процесс последовательного дифференцирования приводит к тождествам:

$$F'_x + F'_y \frac{dy}{dx} = 0; \tag{F'}$$

$$\frac{d}{dx}\left(F'_x + F'_y \frac{dy}{dx}\right) = \left(F''_{xx} + F''_{xy} \frac{dy}{dx}\right) + \left(F''_{yx} + F''_{yy} \frac{dy}{dx}\right) \frac{dy}{dx} + F'_y \frac{d^2y}{dx^2} = 0;$$

или после упрощений:

$$F''_{xx} + 2F''_{xy} \frac{dy}{dx} + F''_{yy}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + F'_y \frac{d^2y}{dx^2} = 0, \tag{F''}$$

и так далее. Из (F') находим:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y} \tag{f'}$$

(по условию $F'_y \neq 0$). Подставив $\frac{dy}{dx}$ в (F''), получим:

$$F''_{xx}(F'_y)^2 - 2F''_{xy}F'_xF'_y + F''_{yy}(F'_x)^2 + (F'_y)^3 \frac{d^2y}{dx^2} = 0,$$

откуда

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{F''_{xx}(F'_y)^2 - 2F''_{xy}F'_xF'_y + F''_{yy}(F'_x)^2}{(F'_y)^3}; \tag{f''}$$

и так далее.

---

* Как нетрудно проверить, детерминант этой системы также равен якобиану

$$\frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_n)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}.$$

Выражение для $\frac{d^2y}{dx^2}$ можно получить непосредственным дифференцированием (f'):

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{F'_y \frac{d}{dx} F'_x - F'_x \frac{dF'_y}{dx}}{(F'_y)^2} =$$

$$= -\frac{F'_y\left(F''_{xx} + F''_{xy}\frac{dy}{dx}\right) - F'_x\left(F''_{xy} + F''_{yy}\frac{dy}{dx}\right)}{(F'_y)^2};$$

подставив из (f') выражение для $\frac{dy}{dx}$, получим формулу (f'').

Примечание. Общие формулы для производных от неявных функций громоздки и неудобны для запоминания, поэтому на практике обычно производят вычисления не по готовым формулам, а непосредственно путем последовательного дифференцирования. В каждом конкретном случае в процессе последовательного дифференцирования возможны упрощения, обусловленные специфическими свойствами данных уравнений.

Для нахождения дифференциалов от неявных функций можно поступать следующим образом: сложные функции

$$F_i(x_1, x_2, \ldots, x_m; y_1, y_2, \ldots, y_n),$$

где $y_1 = f_1(X)$, $y_2 = f_2(X)$, $\ldots$, $y_n = f_n(X)$

суть функции, определяемые системой уравнений (F), тождественно равны нулю; поэтому

$$dF_1 = dF_2 = \ldots = dF_n = 0$$

(в окрестности точки $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$), или в развернутом виде:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial F_1}{\partial x_1}dx_1 + \ldots + \frac{\partial F_1}{\partial x_m}dx_m + \frac{\partial F_1}{\partial y_1}dy_1 + \ldots + \frac{\partial F_1}{\partial y_n}dy_n = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\frac{\partial F_n}{\partial x_1}dx_1 + \ldots + \frac{\partial F_n}{\partial x_m}dx_m + \frac{\partial F_n}{\partial y_1}dy_1 + \ldots + \frac{\partial F_n}{\partial y_n}dy_n = 0. \end{aligned}\right\} (dF)$$

Эти тождества (относительно $x_1, x_2, \ldots, x_m$) можно рассматривать как систему линейных уравнений относительно дифференциалов неявных функций, из которой и определятся выражения для dy_1, dy_2, $\ldots$, dy_n. Коэффициентами при dx_1, dx_2, $\ldots$, dx_m в этих выражениях служат соответственные частные производные от неявных функций.

Примечание. Систему (F), содержащую n уравнений с $n+m$ аргументами $x_1, x_2, \ldots, x_m; y_1, y_2, \ldots, y_n$, можно решить (при данной начальной

точке) относительно любых n аргументов, т. е. рассматривать эти аргументы как неявные функции от прочих m аргументов. Для этого достаточно, чтобы соответствующий якобиан был (в окрестности начальной точки) отличен от нуля. В силу инвариантности формулы дифференциала система (dF) остается одной и той же, какие бы m аргументов ни были приняты за непосредственные. Таким образом, этой инвариантной формой записи не предрешается выбор непосредственных аргументов.

Нижеследующие примеры преследуют цель показать лишь технику дифференцирования неявных функций, условия же законности соответствующих операций должны явиться предметом специального исследования, которого мы в этих примерах касаться не будем.

Примеры.

1. Найти значения производных y', z', y'' и z'' в точке $(1, 1, -2)$ от функций y и z, определяемых системой уравнений:

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=0,\\ x^3+y^3-z^3&=10. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Решение. Точка $(1, 1, -2)$ удовлетворяет данным уравнениям. Примем эту точку за начальную. Дифференцируя данные уравнения по аргументу x, получим (по сокращении на числовые множители):

$$\left.\begin{aligned} 1+y'+z'&=0,\\ x^2+y^2y'-z^2z'&=0. \end{aligned}\right\} \tag{1'}$$

Полагая $x=1$, $y=1$, $z=-2$, получим:

$$\left.\begin{aligned} y'+z'&=-1,\\ y'-4z'&=-1, \end{aligned}\right\}$$

откуда найдем $y'=-1$, $z'=0$.

Дифференцируя равенства (1'), получим:

$$z''+y''=0,$$
$$2x+y^2y''+2yy'^2-z^2z''-2zz'^2=0.$$

Полагаем $x=1$, $y=1$, $z=-2$, $y'=-1$, $z'=0$:

$$\left.\begin{aligned} y''+z''&=0,\\ y''-4z''&=-4, \end{aligned}\right\}$$

откуда $y''=-\frac{4}{5}$, $z''=\frac{4}{5}$.

2. Найти выражение для $\frac{d^2y}{dx^2}$ от функции $y(x)$, определяемой уравнением:

$$y^3+x^3-3axy=0. \tag{2}$$

Решение. Дифференцируя (2) (по сокращении на 3), получим:

$$y^2y'+x^2-axy'-ay=0, \tag{2'}$$

откуда

$$y' = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax}. \tag{3}$$

Дифференцируя (2'), получим:

$$2yy'^2 + y^2y'' + 2x - ay' - axy'' - ay' = 0,$$

откуда

$$y''(y^2 - ax) = 2ay' - 2yy'^2 - 2x; \tag{4}$$

подставив в правую часть выражение для y', после преобразований получим:

$$2ay' - 2yy'^2 - 2x = \frac{-2a^3xy - 2xy(x^3 + y^3 - 3axy)}{(y^2 - ax)^2}.$$

В силу (2):

$$y'' = -\frac{2a^3xy}{(y^2 - ax)^3}.$$

3. Доказать, что для функции $y(x)$, определяемой уравнением

$$\arccos y = n \ln x, \tag{5}$$

имеет место равенство:

$$x^2y^{(n+2)} + (2n+1)xy^{(n+1)} + 2n^2y^{(n)} = 0. \tag{6}$$

Решение. Дифференцируя (5), получим:

$$-\frac{y'}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{n}{x}, \tag{7}$$

откуда

$$y'x = -n\sqrt{1-y^2}. \tag{8}$$

Дифференцируем (8):

$$xy'' + y' = \frac{ny'y}{\sqrt{1-y^2}},$$

или в силу (7):

$$x^2y'' + xy' + n^2y = 0.$$

Дифференцируя n раз это уравнение (по формуле Лейбница), получим:
$(x^2y^{(n+2)} + 2ny^{(n+1)}x + n(n-1)y^{(n)}) + (xy^{(n+1)} + ny^{(n)}) + n^2y^{(n)} = 0.$

После упрощений получим (6).

4. Доказать, что при

$$x^2y^2 + x^2 + y^2 - 1 = 0 \tag{9}$$

имеет место равенство:

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^4}} = 0. \tag{10}$$

Решение. Дифференцируя (9), получим:

$$xy^2\,dx + yx^2\,dy + x\,dx + y\,dy = 0,$$

откуда

$$\frac{x\,dx}{1+x^2} = -\frac{y\,dy}{1+y^2}. \tag{11}$$

В силу (9) имеем:

$$x\sqrt{1+y^2} = \sqrt{1-y^2} \tag{12}$$

и

$$\sqrt{1-x^2} = y\sqrt{1+x^2}. \tag{13}$$

Разделив почленно (11) на (12) и (13), по сокращении получим (10). Соотношением (10) не предрешается, какая из координат y или x принимается за аргумент.

5. Найти $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$ от функции $z(x, y)$, определяемой уравнением

$$xy + xz + yz = 1. \tag{14}$$

Решение. Дифференцируя по x и по y, имеем:

$$\left.\begin{aligned} y + x\frac{\partial z}{\partial x} + z + y\frac{\partial z}{\partial x} &= 0, \\ x + x\frac{\partial z}{\partial y} + z + y\frac{\partial z}{\partial y} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Дифференцируем первое тождество (15) по y:

$$1 + x\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial z}{\partial y} + y\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial z}{\partial x} = 0,$$

откуда

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = -\frac{1 + \dfrac{\partial z}{\partial y} + \dfrac{\partial z}{\partial x}}{x+y} = \frac{2z}{(x+y)^2} \quad \text{(в силу (15))}.$$

6. Доказать, что функция $z(x, y)$, определяемая неявно из уравнения

$$\frac{x-a}{z-c} = \varphi\left(\frac{y-b}{z-c}\right)$$

(где φ — произвольная, дважды дифференцируемая функция), удовлетворяет соотношению

$$z''_{xx}z''_{yy} - (z''_{xy})^2 = 0.$$

Решение. Дифференцируем уравнение по x и по y, рассматривая z как функцию этих аргументов:

$$\frac{(z-c) - (x-a)\,z'_x}{(z-c)^2} = -\varphi'\left(\frac{y-b}{z-c}\right)\cdot\frac{(y-b)\,z'_x}{(z-c)^2};$$

$$-\frac{(x-a)\,z'_y}{(z-c)^2} = \varphi'\left(\frac{y-b}{z-c}\right)\cdot\frac{(z-c) - (y-b)\,z'_y}{(z-c)^2}.$$

Делим почленно первое на второе и исключаем $\varphi'\left(\dfrac{y-b}{z-c}\right)$:

$$\frac{(z-c) - (x-a)\,z'_x}{(x-a)\,z'_y} = \frac{(y-b)\,z'_x}{(z-c) - (y-b)\,z'_y},$$

откуда $z - c = (x-a)\,z'_x + (y-b)\,z'_y$; дифференцируя последнее равенство по x и по y, получим:

$$z'_x = z'_x + (x-a)\,z''_{xx} + (y-b)\,z''_{yx},$$

$$z'_y = (x-a)\,z''_{xy} + z'_y + (y-b)\,z''_{yy},$$

откуда

$$(x-a)\,z''_{xx}+(y-b)\,z''_{xy}=0,$$
$$(x-a)\,z''_{xy}+(y-b)\,z''_{yy}=0.$$

Получилась система однородных уравнений относительно $x-a$ и $y-b$. Аргументам x и y можно приписывать произвольные значения, вообще говоря, отличные от a и b; $x-a\neq 0$ и $y-b\neq 0$, поэтому

$$\begin{vmatrix} z''_{xx} & z''_{xy} \\ z''_{xy} & z''_{yy} \end{vmatrix}=0.$$

7. Преобразовать выражение

$$Q=\frac{1}{x^2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\frac{1}{y^2}\frac{\partial z}{\partial y}-e^z,$$

принимая за «новые аргументы» v и t и рассматривая u как функцию от v и t при условии, что x, y, z, u, v и t связаны соотношениями

$$u=x^2+y^2, \tag{16}$$
$$v=x^2-y^2, \tag{17}$$
$$\ln\frac{t}{2}=z. \tag{18}$$

Решение. Имеем две пары аргументов: «старые» x и y и «новые» t и v, причем можно рассматривать старые аргументы как функции новых, и наоборот, новые аргументы как функции старых.

Дифференцируя (18) по x, получим:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{t}\frac{\partial t}{\partial x}. \tag{19}$$

Дифференцируем (16) и (17) по x, считая u функцией от v и t, а v и t — функциями от x и y:

$$\frac{\partial u}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x}=2x; \qquad \frac{\partial v}{\partial x}=2x; \tag{20}$$

из (19) и (20) найдем $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{2x\left(1-\dfrac{\partial u}{\partial v}\right)}{t\dfrac{\partial u}{\partial t}}$.

Аналогично дифференцируя по y, найдем:

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y\left(1+\dfrac{\partial u}{\partial v}\right)}{t\dfrac{\partial u}{\partial t}}.$$

Выполнив подстановку и преобразования, получим:

$$Q=\frac{1}{2t^2\left(\dfrac{\partial u}{\partial t}\right)^2}\left[16\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)^2-t^3\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+16\right].$$

§ 37. Об исследовании неявных функций

Задача исследования неявных функций заключается в изучении свойств неявных функций непосредственно по уравнениям, при помощи которых задаются эти функции. Исследование неявных функций непосредственно по уравнениям имеет значение в тех случаях, когда выражение этих функций при помощи формул или неизвестно, или чрезмерно громоздко.

Если левая часть данного уравнения $F(x, y)=0$ является элементарной функцией, то функция $y=f(x)$, определяемая неявно этим уравнением, может не быть элементарной.

Так, например, функция $y(x)$ определяется неявно уравнением

$$x-y-\sin y=0,$$

будучи обратной относительно непрерывной возрастающей функции

$$x=y+\sin y,$$

непрерывна и возрастает в интервале $(-\infty, +\infty)$; однако (как можно доказать) в элементарных функциях выражена быть не может.

Как известно, функция $y=f(x)$, определяемая неявно уравнением

$$F(x, y)=0,$$

где $F(x, y)$ — многочлен с двумя аргументами, называется алгебраической. Однако лишь в сравнительно редких случаях (для уравнений степени не выше 4-й относительно y либо для отдельных частных видов уравнений высших степеней) алгебраическая функция может быть выражена (явно) при помощи элементарных функций.

Для иллюстрации методов исследования неявных функций рассмотрим способ отыскания экстремумов. Если дифференцируемая функция $y=f(x)$ задана неявно уравнением

$$F(x, y)=0, \qquad (F)$$

где $F(x, y)$ — функция, имеющая непрерывные производные в данной области и $F'_y \neq 0$ в этой области, то для отыскания стационарных точек имеем условие:

$$f'(x)=-\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}=0.$$

Следовательно, точки, в которых возможен экстремум, должны удовлетворять системе уравнений:

$$F(x, y)=0, \qquad F'_x(x, y)=0.$$

Пусть $A(a, b)$ — одно из решений этой системы. В силу теоремы существования неявных функций начальная точка $A(a, b)$ определяет единственную функцию $y=f(x)$, для которой $x=a$ является стационарной точкой.

Для исследования характера этой точки можно вычислить (при выполнении соответствующих условий) значение второй производной $f''(a)$. Выражение $\frac{d^2y}{dx^2}$ [см. предыдущий § 36, формула (f'')] при условии $F'_x(a, b) = 0$ принимает вид:

$$f''(a) = -\frac{F''_{xx}(a, b)}{F'_y(a, b)}.$$

Если $F''_{xx}(a, b) \neq 0$, то в точке $x = a$ имеет место экстремум, характер которого определяется знаком $f''(a)$.

Промежутки монотонности неявной функции можно отыскивать посредством исследования знака производной

$$f'(x) = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)},$$

о котором можно судить по знакам $F'_x(x, y)$ и $F'_y(x, y)$. Если в некоторой области $F'_x \neq 0$, то аналогично можно исследовать функцию $x = \varphi(y)$, определяемую уравнением (F).

Примечание. Стационарные точки функции $F(x, y)$

$$F'_x(a, b) = F'_y(a, b) = 0$$

рассматриваются как особые точки уравнения (F). Если заданная начальная точка $A(a, b)$ является особой, то вопрос о существовании единственности и свойствах функции, удовлетворяющей уравнению (F) и начальным условиям, требует специального исследования. В геометрической форме исследование проводится в курсе дифференциальной геометрии.

Пример.

Рассмотрим уравнение (декартов лист):

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0, \quad \text{где} \quad a > 0.$$

Имеем

$$F(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy, \quad F'_x = 3(x^2 - ay), \quad F'_y = 3(y^2 - ax).$$

Для отыскания экстремумов функций $y = f(x)$, определяемых уравнением (F), решаем систему уравнений:

$$F(x, y) = F'_x(x, y) = 0,$$

из которой найдем две точки: $O(0, 0)$ и $A\left(a\sqrt[3]{2}, a\sqrt[3]{4}\right)$.

Точка O является особой, так как $F'_y(0, 0) = 0$ (в данном примере точка самопересечения линии).

Так как $F'_y\left(a\sqrt[3]{2}, a\sqrt[3]{4}\right) = 3a^2\sqrt[3]{2} > 0$ и $F''_{xx}\left(a\sqrt[3]{2}, a\sqrt[3]{4}\right) = 6a\sqrt[3]{2}$, то функция $y = f(x)$, определяемая уравнением (F) и начальной точкой A, имеет в точке $x = a\sqrt[3]{2}$ максимум, равный $a\sqrt[3]{4}$.

В самом деле,

$$f''\left(a\sqrt[3]{2}\right)=-\frac{F''_{xx}\left(a\sqrt[3]{2},\ a\sqrt[3]{4}\right)}{F'_y\left(a\sqrt[3]{2},\ a\sqrt[3]{4}\right)}=-\frac{2}{a}<0.$$

Точка A есть наивысшая точка петли декартова листа.

В силу симметрии уравнения относительно x и y точка $B\left(a\sqrt[3]{4},\ a\sqrt[3]{2}\right)$ является самой правой точкой петли. В этой точке соответствующая неявная функция $x=\varphi(y)$ имеет максимум.

Нетрудно доказать, что ветви декартова листа, содержащиеся во II и IV квадрантах, являются графиками убывающих функций. Так, например, рассмотрим функцию $F(x, y)=x^3+y^3-3axy$ во II квадранте.

Так как $F'_y>0$ (при $x<0$), то функция $F(x, y)$ возрастает на любой параллели оси OY.

Так как $F(x, 0)=x^3<0$ и $\lim\limits_{y\to+\infty}F(x, y)=+\infty>0$, где $x<0$, то при всяком данном $x<0$ существует единственное значение $y=f(x)$, при котором $F(x, y)=0$. Значит, в интервале $-\infty<x<0$ существует единственная функция, удовлетворяющая уравнению (F). Эта функция убывает. В самом деле,

$$f'(x)=-\frac{F'_x}{F'_y}=-\frac{x^2-ay}{y^2-ax},$$

и так как на линии (в силу уравнения (F)) $y=\dfrac{x^3+y^3}{3ax}$,

то

$$f'(x)=\frac{y^3-2x^3}{9x(y^2-ax)}<0 \quad (\text{при } x<0,\ y>0).$$

Третий квадрант не содержит точек декартова листа, так как $F(x, y)<0$ при $x<0$, $y<0$.

§ 38. Основные свойства регулярных отображений

Рассмотрим для определенности отображение

$$x=x(u, v), \qquad y=y(u, v), \tag{T}$$

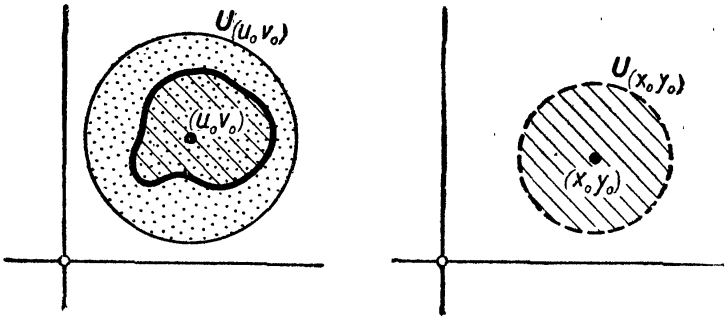
регулярное в некоторой области G_{uv}. По условию функции $x(u, v)$ и $y(u, v)$ имеют в области G_{uv} плоскости (u, v) непрерывные производные и

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\neq 0.$$

Пусть (u_0, v_0) — данная точка области G_{uv} и (x_0, y_0) — ее образ в плоскости (x, y). Будем называть (u_0, v_0) начальной точкой в плоскости (u, v), а (x_0, y_0) — начальной точкой в плоскости (x, y). В силу регулярности (см. стр. 156) отображение (T) взаимно однозначно в окрестности точки (u_0, v_0), а потому всякому образу в достаточно малой окрестности точки (x_0, y_0) соответствует единственный прообраз в окрестности точки (u_0, v_0).

Теорема. *Существует окрестность (достаточно малая) точки* (x_0, y_0), *каждая точка которой* (x, y) *является образом единственной точки* (u, v) *из некоторой окрестности точки* (u_0, v_0).

Теорема утверждает, что если в регулярном отображении точка (x_0, y_0) служит образом точки (u_0, v_0), то некоторая окрестность точки (x_0, y_0) оказывается заполненной образами точек, лежащих в окрестности точки (u_0, v_0) (черт. 121).



Черт. 121.

Доказательство. Соотношения (T) можно записать в следующей эквивалентной форме:

$$F(x, y; u, v) = x - x(u, v) = 0; \quad \Phi(x, y; u, v) = y - y(u, v) = 0. \quad (F)$$

Этим уравнениям удовлетворяют координаты точки-образа и точки-прообраза. В частности, им удовлетворяют начальные координаты x_0, y_0, u_0, v_0. Якобиан $\dfrac{D(F, \Phi)}{D(u, v)} = \dfrac{D(x, y)}{D(u, v)} \neq 0$; следовательно, существует единственная система непрерывных функций

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y), \qquad (T^{-1})$$

определенных в некоторой окрестности $U_{(x_0, y_0)}$ точки (x_0, y_0), удовлетворяющая системе уравнений (F) и начальным условиям

$$u_0 = u(x_0, y_0), \qquad v_0 = v(x_0, y_0).$$

Всякая точка $(x, y) \in U_{(x_0, y_0)}$ является образом единственной точки (u, v), определяемой по формулам (T^{-1}) в некоторой окрестности точки (u_0, v_0), ч. т. д.

Отображения (T) и (T^{-1}) являются взаимно обратными отображениями, определенными (каждое) в некоторой окрестности соответствующей начальной точки. В соответствующих окрестностях имеют место тождества:

$$x = x\big(u(x, y), v(x, y)\big), \qquad y = y\big(u(x, y), v(x, y)\big)$$

и

$$u = u\big(x(u, v), y(u, v)\big), \qquad v = v\big(x(u, v), y(u, v)\big).$$

Примечание. Теорема о существовании обратного отображения имеет локальный характер. Обратное отображение для всей области G_{uv} может не существовать, так как различные точки (u_1, v_1) и (u_2, v_2) могут иметь один и тот же образ.

Пример.

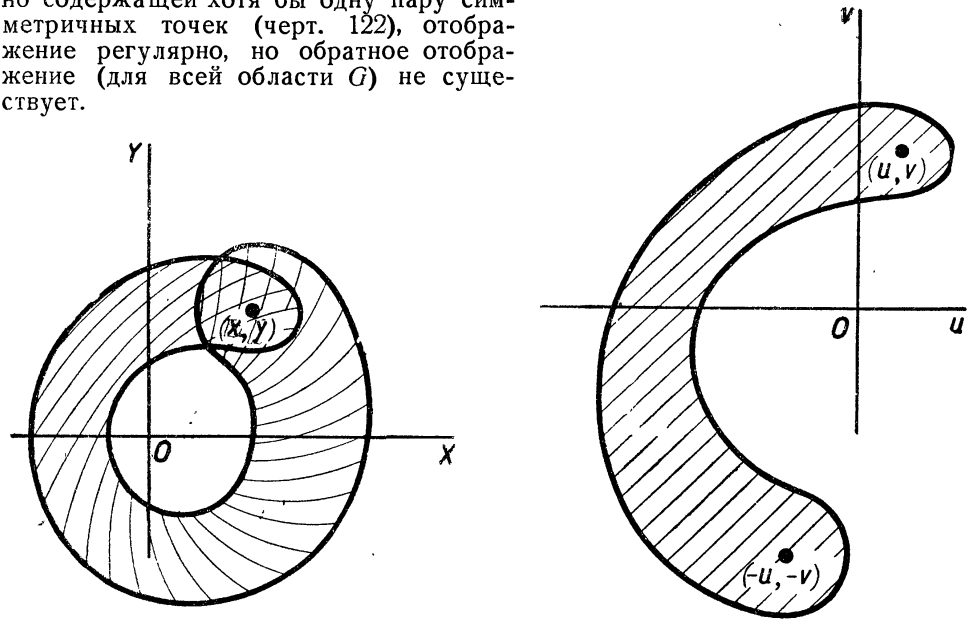
Отображение

$$x = u^2 - v^2, \qquad y = 2uv \tag{1}$$

регулярно в любой области, не содержащей точку $u = v = 0$, так как

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = 4(u^2 + v^2).$$

Симметричные точки (u, v) и $(-u, -v)$ отображаются в одну и ту же точку плоскости (x, y). В любой области G, не содержащей точку $u = v = 0$ но содержащей хотя бы одну пару симметричных точек (черт. 122), отображение регулярно, но обратное отображение (для всей области G) не существует.



Черт. 122.

Точки, являющиеся прообразами данной точки (x, y), можно найти, решив уравнения (1) относительно u и v. Из этих уравнений найдем:

$$(u^2 + v^2)^2 = x^2 + y^2, \quad \text{откуда} \quad u^2 + v^2 = \sqrt{x^2 + y^2}$$

и, следовательно,

$$u = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{x^2 + y^2} + x}{2}}, \qquad v = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{2}}. \tag{2}$$

Условие $y = 2uv$ показывает, что перед радикалами следует взять одинаковые знаки, если $y > 0$, и различные знаки, если $y < 0$. Возьмем, например, в качестве начальной точки плоскости (x, y) точку (1,1); эта точка имеет два

прообраза:

$$\left(\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}},\ \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\right) \text{ и } \left(-\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}},\ -\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\right).$$

Обратное отображение в окрестности первой точки получим, взяв в формулах (2) перед обоими радикалами знак $+$. Обратное отображение в окрестности второй точки получим, взяв в этих формулах перед обоими радикалами знак $-$. Возьмем в качестве начальной точки плоскости (u, v) точку $u = a$, $v = 0$, где для определенности будем считать $a > 0$. В плоскости (x, y) соответствующая начальная точка есть $x = a^2$, $y = 0$, окрестность начальной точки $(a^2, 0)$ делится осью OX на две части: верхнюю, в которой $y > 0$, и нижнюю, в которой $y < 0$. Обратное отображение, локально определяемое данными начальными точками, выражается следующими формулами:

$$u = \sqrt{\frac{\sqrt{x^2+y^2}+x}{2}},$$

$$v = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{2}}, & \text{(если } y \geqslant 0\text{)}, \\ -\sqrt{\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{2}}, & \text{(если } y < 0\text{)}. \end{cases}$$

Теорема. 1°. *Отображение* (T^{-1}), *локально обратное относительно регулярного отображения* (T), *является регулярным в окрестности начальной точки* (x_0, y_0); *при этом значения якобианов отображений* (T) *и* (T^{-1}) *в соответствующих точках суть взаимно обратные числа*:

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \frac{1}{\dfrac{D(u, v)}{D(x, y)}}.$$

2°. *Если функции* $x(u, v)$, $y(u, v)$ *в окрестности начальной точки имеют непрерывные производные* k*-го порядка, то функции* $u(x, y)$ *и* $v(x, y)$ *также имеют в окрестности точки* (x_0, y_0) *непрерывные производные* k*-го порядка.*

Доказательство 1°. Функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$, определяемые неявно системой уравнений

$$F(x, y; u, v) = x - x(u, v) = 0, \quad \Phi(x, y; u, v) = y - y(u, v) = 0, \ (F),$$

имеют непрерывные производные, так как производные функции F и Φ:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial u} = -x'_u \text{ и т. д. непрерывны.}$$

Для вычисления якобиана обратного отображения дифференцируем уравнения

$$x = x(u, v), \qquad y = y(u, v);$$

имеем:

$$dx = x'_u\,du + x'_v\,dv, \qquad dy = y'_u\,du + y'_v\,dv. \tag{3}$$

В силу инвариантности формулы дифференциала эти соотношения останутся, если принять за непосредственные аргументы x и y:

$$u = u(x, y), \qquad v = v(x, y). \tag{4}$$

Дифференциалы du и dv можно найти, решив уравнения (3), линейные относительно этих дифференциалов. С другой стороны, в силу (4) имеем:

$$du = u'_x dx + u'_y dy, \qquad dv = v'_x dx + v'_y dy. \tag{3'}$$

Следовательно, равенства (3) и (3') можно толковать как взаимно обратные линейные преобразования дифференциалов du, dv и dx, dy друг в друга. Как известно, детерминанты взаимно обратных линейных преобразований обратны по величине:

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \frac{1}{\dfrac{D(u, v)}{D(x, y)}}.$$

Так как $\dfrac{D(x, y)}{D(u, v)} \neq 0$, то и $\dfrac{D(u, v)}{D(x, y)} \neq 0$. Следовательно, отображение (T^{-1}) также является регулярным, ч. т. д.

Доказательство 2°. Если функции $x(u, v)$ и $y(u, v)$ имеют в окрестности точки (u_0, v_0) непрерывные производные k-го порядка, то функции $F = x - x(u, v)$ и $\Phi = y - y(u, v)$ также имеют в окрестности точки (x_0, y_0, u_0, v_0) непрерывные производные k-го порядка, но тогда и функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$, определяемые уравнениями $F = 0$ и $\Phi = 0$, имеют в окрестности точки (x_0, y_0) непрерывные производные k-го порядка, ч. т. д.

Для вычисления производных от функций, реализующих обратное отображение, можно применить правила дифференцирования неявных функций.

Пример.

$$x = \rho \cos \varphi, \qquad y = \rho \sin \varphi.$$

Вычислим производные $\dfrac{\partial \rho}{\partial x}, \dfrac{\partial \rho}{\partial y}, \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}, \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}$.

Дифференцируя данные уравнения по x, получим:

$$1 = \rho'_x \cos \varphi - \rho \sin \varphi \varphi'_x,$$

$$0 = \rho'_x \sin \varphi + \rho \cos \varphi \varphi'_x,$$

откуда

$$\rho'_x = \cos \varphi, \qquad \varphi'_x = -\frac{\sin \varphi}{\rho}.$$

Аналогично дифференцируя данные уравнения по y, получим:

$$\rho'_y = \sin \varphi, \qquad \varphi'_y = \frac{\cos \varphi}{\rho}.$$

Пусть даны два отображения

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v) \tag{T_1}$$

и

$$\xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y), \tag{T_2}$$

где первое отображение рассматривается в некоторой области G_{uv} плоскости (u, v), а второе — в некоторой области G_{xy} плоскости (x, y), причем образ области G_{uv} содержится в области G_{xy}.

Определение. *Отображение, являющееся результатом последовательного выполнения отображений T_1, а затем T_2, будем называть произведением T_2T_1 данных отображений.*

Произведение T_2T_1 реализуется системой сложных функций:

$$\xi = \xi\big(x(u, v), y(u, v)\big); \quad \eta = \eta\big(x(u, v), y(u, v)\big).$$

Теорема. *Произведение T_2T_1 регулярных отображений есть регулярное отображение. Якобиан произведения T_2T_1 равен произведению якобианов данных отображений:*

$$\frac{D(\xi, \eta)}{D(u, v)} = \frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)} \cdot \frac{D(x, y)}{D(u, v)}.$$

Доказательство. Производные функций, реализующих отображение T_2T_1, вычисляются по теореме о дифференцировании сложных функций. Так, например, имеем:

$$\frac{\partial \xi}{\partial u} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}.$$

Эти производные непрерывны в силу непрерывности производных, реализующих данные отображения T_1 и T_2.

Якобиан отображения T_2 есть детерминант, составленный из коэффициентов при дифференциалах dx и dy:

$$\left.\begin{aligned} d\xi &= \frac{\partial \xi}{\partial x} dx + \frac{\partial \xi}{\partial y} dy, \\ d\eta &= \frac{\partial \eta}{\partial x} dx + \frac{\partial \eta}{\partial y} dy, \end{aligned}\right\} \tag{dT_2}$$

а якобиан отображения T_1 есть детерминант из коэффициентов при du и dv:

$$\left.\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv, \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv. \end{aligned}\right\} \tag{dT_1}$$

Для получения дифференциалов функций, реализующих отображение T_2T_1, достаточно (в силу инвариантности формулы дифференциала) выражения dx и dy из (dT_1) подставить в формулы (dT_2).

Таким образом, над дифференциалами du и dv последовательно выполняются два линейные однородные преобразования. Как известно из алгебры, при последовательном выполнении двух линейных преобразований детерминанты преобразований перемножаются:

$$\frac{D(\xi, \eta)}{D(u, v)} = \frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)} \cdot \frac{D(x, y)}{D(u, v)}.$$

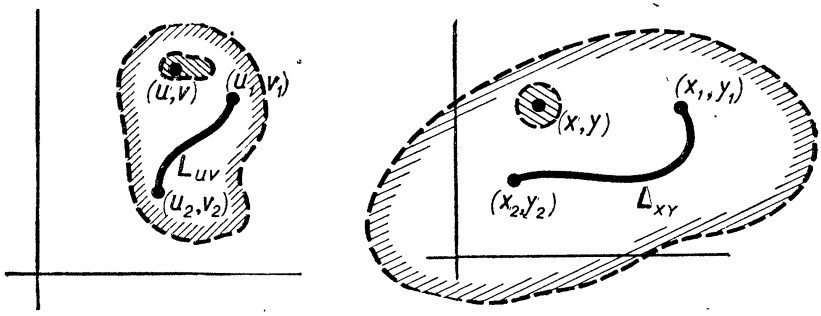
В этом можно убедиться также и непосредственным вычислением.

Якобиан $\frac{D(\xi, \eta)}{D(u, v)} \neq 0$, так как в силу регулярности отображений T_1 и T_2 имеем $\frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)} \neq 0$ и $\frac{D(x, y)}{D(u, v)} \neq 0$. Следовательно, $T_2 T_1$ есть регулярное отображение, ч. т. д.

Рассмотрим случай, когда регулярное отображение

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v) \qquad (T)$$

является взаимно однозначным в области G_{uv}. Как известно, всякое регулярное отображение является взаимно однозначным, если его



Черт. 123.

рассматривать в достаточно малой окрестности любой данной точки (теорема § 34, стр. 160).

Теорема (о сохранении области). *Образом области G_{uv} при регулярном взаимно однозначном отображении является некоторая область G_{xy} в плоскости (x, y)*.*

Доказательство. 1°. Образ G_{xy} области G_{uv} есть открытое множество. В самом деле, если точка (x, y) есть образ точки (u, v), то (стр. 185) образы точек, содержащихся в окрестности точки (u, v), заполняют некоторую окрестность точки (x, y) (черт. 123). Следовательно, всякая точка (x, y) является внутренней точкой.

---

* Заметим, что теорему о сохранении области можно доказать не только для тотально взаимно однозначного, но и для всякого регулярного отображения.

2°. Образ области G_{uv} обладает свойством связности. В самом деле, пусть (x_1, y_1) и (x_2, y_2) — две произвольные точки множества G_{xy}, а (u_1, v_1) и (u_2, v_2) — их прообразы в области G_{uv}. Любая простая дуга $L_{uv} \in G_n$ с концами в точках (u_1, v_1) и (u_2, v_2) отображается на простую дугу $L_{xy} \in G_{xy}$, соединяющую соответствующие точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2).

Итак, G_{xy} есть открытое множество, обладающее свойством связности, т. е. G_{xy} есть о б л а с т ь, ч. т. д.

При тотальной взаимной однозначности отображения

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \tag{T}$$

регулярного в области G_{uv}, обратное отображение

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y) \tag{T^{-1}}$$

также является регулярным в соответствующей области G_{xy}, и отображения (T) и (T^{-1}) устанавливают взаимно однозначное и непрерывное соответствие точек областей G_{uv} и G_{xy}.

Примечание. Теоремы о свойствах регулярных отображений и их доказательства остаются в силе для отображений в пространстве с любым числом измерений. В общем виде следует рассматривать систему n функций от n аргументов, имеющих непрерывные производные и якобиан, отличный от нуля.

§ 39. Зависимость между функциями

Пусть

$$f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad \ldots, \quad f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

и $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — функции, рассматриваемые совместно в некоторой области G пространства $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Определение. *Функция $f(X)$ выражается в области G через функции $f_1, f_2, \ldots, f_m$, если существует такая функция $\Phi(y_1, y_2, \ldots, y_m)$, что имеет место тождество в области G:*

$$f(X) = \Phi(f_1(X), f_2(X), \ldots, f_m(X)).$$

Примечание I. В частности, функция $\Phi(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ может быть константой относительно некоторых аргументов, и тогда функция $f(X)$ выражается через часть функций данной системы.

Примечание II. Если $f(X) = \text{const} = C$, то она выражается через любые функции $f_1, f_2, \ldots, f_m$ в данной области. В самом деле, достаточно положить

$$\Phi(y_1, y_2, \ldots, y_m) = \text{const} = C.$$

Примеры.

1. Рассмотрим функцию $y = f(x)$, имеющую в некотором интервале (a, b) производную, отличную от нуля. Следовательно, данная функция строго монотонна в (a, b), а потому имеет обратную функцию: $x = f(y)$.

Докажем, что всякая функция $y_1 = \varphi(x)$, определенная в интервале (a, b), выражается через $f(x)$.

В самом деле, имеем: $y_1 = \varphi(f(y))$, где $y = f(x)$, а потому $y_1 = \Phi(y)$, где $\Phi(y) = \varphi(f(y))$.

Положим, например, в интервале $(0,1)$ $y = \ln x$, $y_1 = x^3$, тогда имеем:

$$y_1 = e^{3y}.$$

2. Положим $y = x^2$, $y_1 = x^3$ в интервале $-\infty < x < +\infty$. Имеем:

$$x = \begin{cases} \sqrt{y} \text{ на полусегменте } 0 \leqslant x < +\infty, \\ -\sqrt{y} \text{ в полуинтервале } -\infty < x \leqslant 0, \end{cases}$$

откуда

$$y_1 = (\sqrt{y})^3 \text{ на полусегменте } 0 \leqslant x < +\infty,$$
$$y_1 = -(\sqrt{y})^3 \text{ в полуинтервале } -\infty < x < 0.$$

Для всего интервала $-\infty < x < +\infty$ в целом невозможно выразить y_1 через y, но можно выразить y через y_1:

$$y = \sqrt[3]{y_1^2}.$$

3. Положим

$$X = x^2 + y^2 + z^2, \quad Y = x + y + z, \quad Z = xy + yz + xz.$$

Во всем пространстве имеем тождество: $Z = \frac{1}{2}(Y^2 - X)$.

Значит, третья функция выражается через первые две. Пространство (x, y, z) отображается на множество точек, расположенных в пространстве (X, Y, Z) на поверхности параболического цилиндра $Y^2 - X - 2Z = 0$.

4. Дана система функций:

$$x = f(u, v), \quad y = \varphi(u, v), \tag{I}$$

причем в области G_{uv} функция φ выражается через функцию f:

$$\varphi = \Phi(f).$$

В отображении (I) любой точке $(u, v) \in G_{uv}$ в плоскости (x, y) соответствует точка, лежащая на линии

$$y = \Phi(x). \tag{L}$$

Если $f(u, v) = C$ есть линия уровня функции f, то на (L)

$$\varphi = \Phi(C) = \text{const},$$

т. е. (L) есть линия уровня и для функции φ. Итак, при отображении (L) линия (L) отображается в одну точку $(C, \Phi(C))$ плоскости XOY.

Рассмотрим отображение

$$y_1 = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad \ldots, \quad y_m = f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

определяемое данной системой функций, рассматриваемых в некоторой области G.

Теорема. *Если хотя бы одна из функций $f_1, f_2, \ldots, f_m$ в области G выражается через другие, то образ области G не содержит в пространстве $y_1, y_2, \ldots, y_m$ ни одной внутренней точки.*

Доказательство. Рассмотрим для определенности систему трех функций:

$$x = f_1(u, v, \ldots, w), \quad y = f_2(u, v, \ldots, w), \quad z = f_3(u, v, \ldots, w)$$

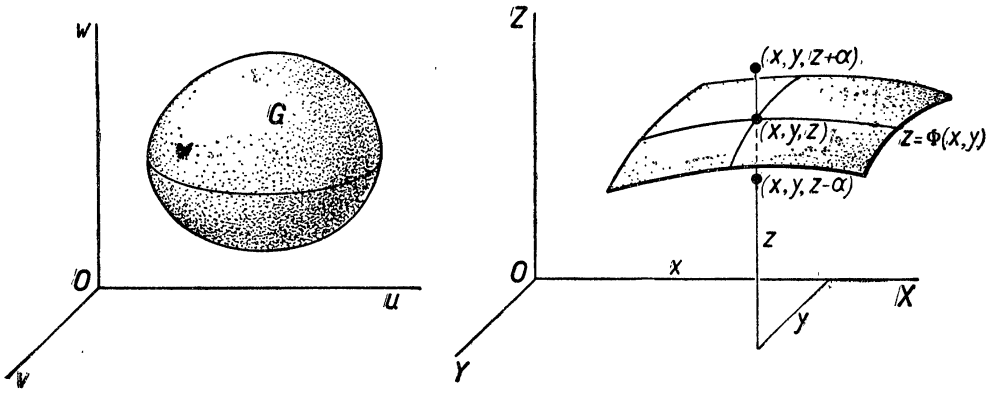
с любым числом аргументов. Предположим, например, что третья функция выражается через две первые:

$$f_3 = \Phi(f_1, f_2); \tag{I}$$

покажем, что образы точек $(u, v, \ldots, w)$ не могут заполнить в пространстве (x, y, z) никакой сферы. В самом деле, координаты x, y и z точек-образов удовлетворяют уравнению:

$$z = \Phi(x, y),$$

но тогда ни при каком $\alpha \neq 0$ точка $(x, y, z + \alpha)$ не удовлетворяет этому уравнению, а потому не является образом никакой точки $(u, v, \ldots, w)$.



Черт. 124.

Следовательно, любая окрестность точки-образа при достаточно малом $|\alpha| \neq 0$ содержит точки, не являющиеся образами в данном отображении, ч. т. д.

Геометрическая интерпретация. Рассмотрим график функции $z = \Phi(x, y)$, в простейшем случае это есть поверхность. Наличие соотношения (I) показывает, что все точки-образы лежат на поверхности $z = \Phi(x, y)$, а потому не могут заполнить никакой пространственной области (черт. 124).

Если бы две функции, например f_2 и f_3, выражались через одну

$$f_2 = \Phi_1(f_1) \quad \text{и} \quad f_3 = \Phi_2(f_1),$$

то точки образа принадлежали бы пространственной линии

$$y = \Phi_1(x), \quad z = \Phi_2(x).$$

Определение I. *Функции $f_1, f_2, \ldots, f_n$ называются независимыми в области G, если в любой окрестности произвольной точки области G никакая из данных функций не может быть выражена через остальные.*

Определение II. 1°. *Система функций*

$$f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad \ldots, \quad f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

имеющих непрерывные производные в области G, называется гладкой системой в этой области.

2°. *Матрица*

$$\left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{matrix} \right\|,$$

составленная из производных гладкой системы функций, называется матрицей Якоби данной системы.

Теорема. *Если в области G ранг матрицы Якоби гладкой системы функций равен числу функций, то данные функции независимы в области G.*

Доказательство. Согласно условию ранг матрицы Якоби равен m (следовательно, $m \leqslant n$); докажем, что ни в какой окрестности любой точки $A \in G$ ни одна из функций системы не может быть выражена через остальные. Допустим противное; тогда существует такая точка $A \in G$, что в некоторой окрестности U_A хотя бы одна из функций может быть выражена через остальные функции. Следовательно, при отображении

$$y_1 = f_1, \quad y_2 = f_2, \quad \ldots, \quad y_m = f_m$$

образ окрестности U_A не может содержать в пространстве $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ ни одной внутренней точки.

С другой стороны, допустим для определенности, что минор $\dfrac{D(f_1, f_2, \ldots, f_m)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_m)}$ отличен от нуля в точке A, а следовательно, и в некоторой ее окрестности. Рассмотрим функции $f_1, f_2, \ldots, f_m$ при данных значениях аргументов:

$$x_{m+1} = a_{m+1}, \quad x_{m+2} = a_{m+2}, \quad \ldots, \quad x_n = a_n;$$

тогда получим систему m функций от m аргументов:

$$y_1 = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_m, a_{m+1}, \ldots, a_n), \ldots,$$
$$y_m = f_m(x_1, x_2, \ldots, x_m, a_{m+1}, \ldots, a_n),$$

имеющую в окрестности точки A якобиан, отличный от нуля, и реализующую регулярное отображение достаточно малой m-мерной окрестности начальной точки $A'(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ на некоторую область (теорема о сохранении области) в пространстве $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$.

Полученное противоречие доказывает теорему.

Следствие. *Функции, реализующие регулярное отображение области, независимы в этой области.*

В самом деле, для системы функций, реализующих регулярное отображение, число аргументов равно числу функций и равно рангу матрицы Якоби.

Теорема. *Если ранг матрицы Якоби гладкой системы функций (f) ка ждой точке области G равен s, то в окрестности каждой точки $X \in G$:*

1° *система (f) содержит s независимых функций;*

2° *при $s < m$ каждая из $m - s$ прочих функций может быть выражена через s функций, независимых в окрестности точки X.*

Доказательство 1°. Допустим для определенности, что в данной точке $A(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in G$ значение минора порядка s

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_s} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_s}{\partial x_1} & \frac{\partial f_s}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_s}{\partial x_s} \end{vmatrix} = \frac{D(f_1, f_2, \ldots, f_s)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_s)}$$

отлично от нуля. В силу непрерывности производных этот минор отличен от нуля в некоторой окрестности U_A точки A. Но тогда (в силу предыдущей теоремы) функции $f_1, f_2, \ldots, f_s$ независимы в окрестности U_A.

Доказательство 2°. Во избежание громоздких обозначений предположим, что дана система функций

$$f_1(x_1, x_2, x_3, x_4), \quad f_2(x_1, x_2, x_3, x_4), \quad f_3(x_1, x_2, x_3, x_4), \ldots$$

и что ранг матрицы Якоби равен 2. Если, например, в окрестности точки $A(a_1, a_2, a_3, a_4)$ минор $\frac{D(f_1, f_2)}{D(x_1, x_2)} \neq 0$, то, по доказанному, в пункте 1° функции f_1 и f_2 независимы в окрестности точки A. Докажем, что всякая другая функция данной системы, например f_3, может быть в окрестности точки A выражена через f_1 и f_2.

Рассмотрим систему уравнений

$$y_1 = f_1(x_1, x_2, x_3, x_4), \quad y_2 = f_2(x_1, x_2, x_3, x_4) \tag{1}$$

при начальных условиях

$$x_1 = a_1, \quad x_2 = a_2, \quad x_3 = a_3, \quad x_4 = a_4, \quad y_1 = b_1, \quad y_2 = b_2,$$

где $b_1 = f_1(A)$, $b_2 = f_2(A)$.

Так как якобиан функций f_1 и f_2 по аргументам x_1 и x_2 отличен от нуля, то (по теореме о неявных функциях) система (1) определяет при данных начальных условиях единственную гладкую систему функций

$$x_1 = \varphi_1(y_1, y_2, x_3, x_4), \quad x_2 = \varphi_2(y_1, y_2, x_3, x_4) \tag{2}$$

в окрестности точки (b_1, b_2, a_3, a_4).

Присоединим одну из остальных функций, например f_3, и рассмотрим матрицу Якоби функций f_1, f_2, f_3:

$$\begin{Vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \frac{\partial f_1}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & \frac{\partial f_2}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} & \frac{\partial f_3}{\partial x_4} \end{Vmatrix}.$$

Эта матрица (по предположению) имеет ранг 2. Следовательно, во всякой точке X в окрестности точки A последняя строка есть линейная комбинация первых двух, т. е. может быть получена умножением первых двух строк на

некоторые множители $K_1(x_1, x_2, x_3, x_4)$, $K_2(x_1, x_2, x_3, x_4)$ и сложением (по столбцам):

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_1} = K_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + K_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_1}; \quad \frac{\partial f_3}{\partial x_2} = K_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + K_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \quad \text{и т. д.}$$

Следовательно, умножив равенства

$$dy_1 = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} dx_3 + \frac{\partial f_1}{\partial x_4} dx_4,$$

$$dy_2 = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f_2}{\partial x_3} dx_3 + \frac{\partial f_2}{\partial x_4} dx_4,$$

на K_1 и K_2 и сложив, получим:

$$K_1 dy_1 + K_2 dy_2 = \frac{\partial f_3}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_3}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} dx_3 + \frac{\partial f_3}{\partial x_4} dx_4,$$

т. е.

$$df_3 = K_1 dy_1 + K_2 dy_2. \tag{3}$$

Соотношения (2) позволяют принять y_1, y_2, x_3, x_4 за непосредственные а x_1 и x_2 — за промежуточные аргументы.

В силу свойства инвариантности, формулы для дифференциалов и в новых аргументах сохраняют свой вид. Из выражения (3) следует, что

$$\frac{\partial f_3}{\partial y_1} = K_1, \quad \frac{\partial f_3}{\partial y_2} = K_2, \quad \frac{\partial f_3}{\partial x_3} = \frac{\partial f_3}{\partial x_4} = 0.$$

Следовательно, в некоторой окрестности точки (b_1, b_2, a_3, a_4) функция f_3 постоянна относительно аргументов x_3 и x_4 и может быть представлена в виде:

$$f_3(\varphi_1(y_1, y_2, x_3, x_4), \varphi_2(y_1, y_2, x_3, x_4), x_3, x_4) = \Phi(y_1, y_2).$$

Если перейти к прежним аргументам x_1, x_2, x_3, x_4 (соотношения (1), то получим в окрестности точки A:

$$f_3(x_1, x_2, x_3, x_4) = \Phi(f_1(x_1, x_2, x_3, x_4), f_2(x_1, x_2, x_3, x_4)).$$

Следовательно, f_3 выражается (локально) через f_1 и f_2, ч. т. д.

Примечание I. Функция $\Phi(y_1, y_2)$ имеет в окрестности точки (b_1, b_2) непрерывные производные, так как функции f_1, f_2 и f_3 (по условию), а также $\varphi_1(y_1, y_2, x_3, x_4)$ и $\varphi_2(y_1, y_2, x_3, x_4)$ (по теореме о неявных функциях), имеют непрерывные производные.

Примечание II. Теорема носит локальный характер.

Доказанное соотношение $f_3 = \Phi(f_1, f_2)$ в окрестности данной точки $A \in G$ может не иметь места тотально, если даже во всей области $\dfrac{D(f_1, f_2)}{D(x_1, x_2)} \neq 0$ (см. ниже, пример 3).

Следствие. Если число функций системы $f_1, f_2, \ldots, f_m$, гладкой в области G, больше числа аргументов n, то все эти функции не могут быть независимыми в области G. В самом деле, пусть в некоторой точке $A \in G$ матрица Якоби имеет наивысший ранг $s \leqslant n < m$; тогда тот же ранг (в силу непрерывности производных) имеет матрица Якоби в некоторой окрестности точки A. Следовательно, в окрестности точки A можно выделить $s < m$ независимых функций, через которые может быть выражена каждая из остальных функций.

Примеры.

1. Гладкая система функций (см. пример 3, стр. 192)

$$X = x^2 + y^2 + z^2, \quad Y = x + y + z, \quad Z = xy + yz + xz$$

имеет матрицу Якоби

$$\begin{Vmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \\ y+z & x+z & x+y \end{Vmatrix}.$$

Эти функции не являются независимыми, так как $Z = \frac{1}{2}(Y^2 - X)$.

Единственный минор третьего порядка этой матрицы тождественно равен нулю (в чем легко убедиться вычислением). Первые две функции имеют матрицу Якоби

$$\begin{Vmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix},$$

ранг которой во всех точках, отличных от $O(0, 0, 0)$, равен 2. Следовательно, в любой области каждая из этих двух функций не может быть выражена через другую.

2. Рассмотрим отображение, реализуемое системой линейных функций:

$$\begin{aligned} X &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z, \\ Y &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z, \\ Z &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z. \end{aligned}$$

Если детерминант этой системы (совпадающий с якобианом) отличен от нуля, то отображение является аффинным. В этом случае данные линейные функции независимы. Пространство (x, y, z) взаимно однозначно отображается на все пространство (X, Y, Z) *.

Если ранг матрицы данной системы (совпадающей с матрицей Якоби) равен 2, то система содержит две независимые функции, а третья выражается (в данном случае линейно) через эти две функции. Так, если

$$\frac{D(X, Y)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0,$$

то третья функция линейно выражается через первые две:

$$Z = kX + lY,$$

и образом пространства (x, y, z) является плоскость.

Если ранг матрицы системы равен 1, то две функции выражаются (каждая) линейно через одну. Если, например, $\frac{D(X)}{D(x)} = a_{11} \neq 0$, то $Y = kY$ и $Z = lX$, и образом пространства (x, y, z) является прямая линия.

3. Дана гладкая система функций

$$x = f_1(u, v), \quad y = f_2(u, v), \quad z = f_3(u, v),$$

причем $\frac{D(f_1, f_2)}{D(u, v)} \neq 0$ в области G. Регулярное отображение

$$x = f_1(u, v), \quad y = f_2(u, v)$$

может не быть взаимно однозначным, именно две точки $M_1(u_1, v_1)$ и $M_2(u_2, v_2)$ могут отображаться на одну и ту же точку $P(x_0, y_0)$. Если $f_3(M_1) \neq f_3(M_2)$,

* Как известно из алгебры, при любых данных значениях X, Y и Z система имеет единственное решение относительно x, y и z.

то соотношение $f_3 = \Phi(f_1, f_2)$ не может выполняться тотально во всей области G, так как в противном случае мы имели бы

$$f_3(M_1) = f_3(M_2) = \Phi(f_1(u_1, v_1),\ f_2(u_1, v_1)) =$$
$$= \Phi(f_1(u_2, v_2),\ f_2(u_2, v_2)) = \Phi(x_0, y_0).$$

В окрестности каждой из точек M_1 и M_2 имеют место локальные соотношения:

$$f_3 = \Phi_1(f_1, f_2) \quad \text{и} \quad f_3 = \Phi_2(f_1, f_2).$$

§ 40. Геометрические приложения

В последующих рассуждениях функции будут предполагаться гладкими в некоторой области.

Линия на плоскости. Рассмотрим уравнение

$$F(x, y) = 0. \qquad (F)$$

Если уравнению (F) не удовлетворяет ни одна точка области, то это уравнение не определяет никакого геометрического образа (пустое множество).

Предположим, что существует хотя бы одна точка $A(a, b)$, удовлетворяющая уравнению (F).

Если в точке $A(a, b)$ хотя бы одна из производных F'_x или F'_y отлична от нуля, то точка A называется обыкновенной. В силу теоремы о неявных функциях уравнение (F) и обыкновенная начальная точка A определяют единственную функцию $y = y(x)$, если $F'_y(A) \neq 0$, или функцию $x = x(y)$, если $F'_x(A) \neq 0$.

Если обе производные $F'_x(A)$ и $F'_y(A)$ отличны от нуля, то функции $y(x)$ и $x(y)$ являются взаимно обратными. Следовательно, *в окрестности обыкновенной точки множество точек плоскости, удовлетворяющих уравнению* (F), *есть простая дуга — график функции* $y(x)$ (*или* $x(y)$),

Точки, удовлетворяющие данному уравнению, в которых обе производные обращаются в нуль, называются особыми. Исследование множества точек, удовлетворяющих уравнению (F), в окрестности особых точек относится к дифференциальной геометрии. Обыкновенные и особые точки можно характеризовать следующим признаком: ранг матрицы $\|F'_x\ F'_y\|$ равен 1 в обыкновенной точке и 0 в особой точке.

Если в области G не содержится особых точек, то все множество точек (в целом), удовлетворяющих уравнению (F) в данной области, представляется как соединение простых дуг. В этом смысле говорят, что уравнение (F) определяет линию на плоскости (в данной области G).

Во всякой обыкновенной точке линия имеет касательную, так как функции, определяемые неявно уравнением (F), дифференцируемы в окрестности обыкновенной начальной точки.

Пусть для определенности $F'_y(A) \neq 0$; тогда уравнение касательной в точке $A(a, b)$ имеет вид: $y - b = dy(x, a) = y'(a)(x - a)$.

Для вычисления дифференциала $dy(x, a)$ от функции $y(x)$ в точке a дифференцируем уравнение (F):

$$F'_x(a, b)\,dx + F'_y(a, b)\,dy = 0 \quad (\text{где } dx = x - a).$$

Последнее уравнение можно не решать относительно dy: приняв во внимание, что приращение ординаты касательной $y - b$ равно дифференциалу dy, получим уравнение касательной в виде:

$$F'_x(a, b)(x - a) + F'_y(a, b)(y - b) = 0.$$

В этой симметричной форме не предрешается вопрос о том, какой из аргументов x или y принимается за непосредственный.

Пример. Составить уравнение касательной к линии

$$2x^3 - x^2y^2 - 3x + y + 7 = 0$$

в точке $(1, -2)$. Точка M лежит на линии и является ее обыкновенной точкой:

$F(1, -2) = 0$; $F'_x = 6x^2 - 2xy^2 - 3 = -5$ и $F'_y = -2x^2y + 1 = 5$.

Составляем уравнение касательной:

$$-5(x - 1) + 5(y + 2) = 0 \text{ или } x - y - 3 = 0.$$

Поверхность в пространстве.

Дано уравнение:

$$F(x, y, z) = 0. \qquad (F)$$

Матрица Якоби есть $\|F'_x\, F'_y\, F'_z\|$.

Точка, удовлетворяющая уравнению (F), называется обыкновенной, если хотя бы одна из производных F'_x, F'_y, F'_z отлична от нуля в этой точке (ранг матрицы равен 1), и особой, если все производные обращаются в нуль (ранг матрицы равен 0).

Множество точек, удовлетворяющих уравнению (F) в окрестности обыкновенной точки $A(a, b, c)$, есть простой кусок поверхности.

В самом деле, пусть, например, $F'_z(A) \neq 0$; тогда, по теореме о неявных функциях, уравнение (F) и начальная точка A определяют единственную функцию

$$z = z(x, y),$$

дифференцируемую в окрестности точки (a, b). Множество точек, удовлетворяющих уравнению (F), есть график этой функции.

Если множество точек, удовлетворяющих уравнению (F), в области не пусто и не содержит особых точек, то это множество можно рассматривать как соединение простых кусков поверхности. В этом смысле говорят, что уравнение (F) определяет поверхность.

Уравнение

$$z - c = dz(X, A) = z'_x \cdot (x - a) + z'_y \cdot (y - b)$$

есть уравнение касательной плоскости в обыкновенной точке, в которой $F'_z \neq 0$. Дифференцируя уравнение (F), получим:

$$F'_x(A)\,dx + F'_y(A)\,dy + F'_z(A)\,dz = 0,$$

откуда найдем уравнение касательной плоскости в точке $A(a, b, c)$ в виде (на касательной плоскости $dz = z - c$):

$$F'_x(A)(x-a) + F'_y(A)(y-b) + F'_z(A)(z-c) = 0.$$

Рассмотрим систему параметрических уравнений

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v).$$

Точка (u_0, v_0), принадлежащая области G_{uv}, в которой рассматриваются данные функции, называется обыкновенной, если матрица

$$\begin{Vmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{Vmatrix}$$

имеет в этой точке ранг, равный 2. В противном случае точка (u_0, v_0) называется особой.

Пусть $u = \alpha$, $v = \beta$ — обыкновенная точка; предположим для определенности, что $\begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix} \neq 0$ в точке (α, β) (а следовательно, и в некоторой ее окрестности). Функции

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v)$$

реализуют отображение, регулярное в некоторой окрестности начальной точки (α, β). Следовательно, в достаточно малой окрестности $U_{(a, b)}$ соответствующей точки $x = a$, $y = b$ существует регулярное обратное отображение $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, а потому $z = z(u(x, y), v(x, y)) = f(x, y)$, где функция $f(x, y)$ имеет непрерывные производные в окрестности $U_{(a, b)}$.

В окрестности соответствующей точки $(a, b, f(a, b))$ пространства данная система параметрических уравнений определяет простой кусок поверхности — график функции $z = f(x, y)$.

Итак, *в окрестности каждой обыкновенной точки система определяет простой кусок поверхности.* Если область G_{uv} не содержит особых точек, то соответствующий образ есть поверхность, составленная из простых кусков.

Уравнение касательной плоскости к поверхности в точке $A(a, b, c)$ может быть записано в виде $z - c = df(X, A)$.

Для нахождения $dz = df(X, A)$ в точке A дифференцируем данные уравнения (пользуясь инвариантностью дифференциала):

$$\left.\begin{aligned} dx &= x'_u\,du + x'_v\,dv \\ dy &= y'_u\,du + y'_v\,dv \\ dz &= z'_u\,du + z'_v\,dv \end{aligned}\right\}. \tag{1}$$

Исключив дифференциалы du и dv, получим уравнение, связывающее dz, dx и dy:

$$\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} = 0$$

(значения производных берутся в точке (α, β)).

Примем за непосредственные аргументы координаты x и y; тогда $dx = x - a$, $dy = y - b$ (формулы (1) инвариантны), а на касательной плоскости $z - c = dz$. Следовательно,

$$\begin{vmatrix} x-a & y-b & z-c \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} = 0$$

есть уравнение касательной плоскости к поверхности в точке $A(a, b, c)$.

Заметим, что к тому же уравнению приводит исключение $u - \alpha$ и $v - \beta$ из системы уравнений:

$$x - a = x'_u \cdot (u - \alpha) + x'_v \cdot (v - \beta);$$
$$y - b = y'_u \cdot (u - \alpha) + y'_v \cdot (v - \beta);$$
$$z - c = z'_u \cdot (u - \alpha) + z'_v \cdot (v - \beta);$$

значит, последние уравнения являются параметрическими уравнениями касательной плоскости в точке $A(a, b, c)$.

Линия в пространстве.

Точка $A(a, b, c)$, удовлетворяющая системе уравнений

$$F(x, y, z) = 0, \quad \Phi(x, y, z) = 0, \tag{1}$$

называется обыкновенной точкой, если матрица (в этой точке)

$$\begin{Vmatrix} F'_x & F'_y & F'_z \\ \Phi'_x & \Phi'_y & \Phi'_z \end{Vmatrix}$$

имеет ранг, равный 2, в противном случае точка A называется особой.

Предположим для определенности, что $\begin{vmatrix} F'_y & F'_z \\ \Phi'_y & \Phi'_z \end{vmatrix} \neq 0$;

тогда система уравнений и начальная точка $A(a, b, c)$ (по теореме существования неявных функций) определяют систему функций

$$y = y(x), \quad z = z(x), \tag{2}$$

дифференцируемых в окрестности точки $x = a$. Следовательно, *в окрестности обыкновенной точки A соответствующий геометрический образ есть простая дуга.*

В любой области, не содержащей особых точек, мы получим линию, являющуюся соединением простых дуг.

Каждое из данных уравнений в отдельности есть уравнение поверхности. Следовательно, при их совместном задании линия

рассматривается как пересечение двух поверхностей. Составим уравнения касательной к линии в обыкновенной точке $A(a, b, c)$. Если линия задана параметрически:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t),$$

то уравнения секущей, проходящей через точки (x, y, z) и $(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$, соответствующие значениям параметра t и $t+\Delta t$, представятся в виде:

$$\frac{X-x}{\Delta x} = \frac{Y-y}{\Delta y} = \frac{Z-z}{\Delta z},$$

откуда, разделив знаменатели на Δt и перейдя к пределу, получим уравнения касательной в точке (x, y, z):

$$\frac{X-x}{x'} = \frac{Y-y}{y'} = \frac{Z-z}{z'}.$$

В частности, для линии, заданной уравнениями (2), уравнения касательной примут вид:

$$\frac{X-a}{x'} = \frac{Y-b}{y'} = \frac{Z-c}{z'}.$$

Для нахождения производных дифференцируем по x уравнения (1):

$$F'_x + F'_y y' + F'_z z' = 0,$$
$$\Phi'_x + \Phi'_y y' + \Phi'_z z' = 0.$$

Следовательно, значения производных y' и z' пропорциональны минорам матрицы Якоби, и уравнения касательной запишутся так:

$$\frac{X-a}{\begin{vmatrix} F'_y & F'_z \\ \Phi'_y & \Phi'_z \end{vmatrix}} = \frac{Y-b}{\begin{vmatrix} F'_z & F'_x \\ \Phi'_z & \Phi'_x \end{vmatrix}} = \frac{Z-c}{\begin{vmatrix} F'_x & F'_y \\ \Phi'_x & \Phi'_y \end{vmatrix}}.$$

К тем же уравнениям придем в результате приведения к каноническому виду уравнений прямой, по которой пересекаются касательные плоскости к поверхностям (1):

$$\left.\begin{aligned} F'_x \cdot (x-a) + F'_y \cdot (y-b) + F'_z \cdot (z-c) = 0, \\ \Phi'_x \cdot (x-a) + \Phi'_y \cdot (y-b) + \Phi'_z \cdot (z-c) = 0. \end{aligned}\right\}$$

Следовательно, касательная к линии пересечения поверхностей $F=0$ и $\Phi=0$ есть прямая, по которой пересекаются касательные плоскости к этим поверхностям.

Линии и поверхности уровня.

Рассмотрим функцию $F(x, y)$ (или $F(x, y, z)$), гладкую и не имеющую стационарных точек в области G; тогда в любой точке $A \in D$ хотя бы одна из производных отлична от нуля, и уравнение

$$F(x, y) = F(A) \quad (\text{или } F(x, y, z) = F(A))$$

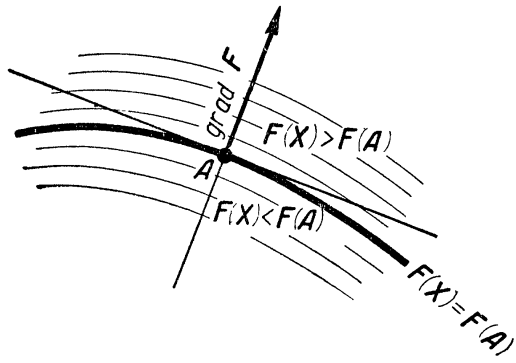
определяет линию (поверхность), на которой данная функция постоянна и равна $F(A)$. Следовательно, это есть уравнение линии (поверхности) уровня, проходящей через точку A. Через каждую точку области G проходит одна единственная линия (поверхность) уровня.

Уравнение

$$F'_x \cdot (x-a) + F'_y \cdot (y-b) = 0 \quad (+ F'_z \cdot (z-c) = 0)$$

есть уравнение касательной (касательной плоскости) в точке A к линии (поверхности) уровня.

Следовательно, значения производных F'_x, F'_y (и F'_z), т. е. проекции градиента, суть проекции нормального вектора. Значит, градиент перпендикулярен касательной (касательной плоскости) к линии (поверхности) уровня, проходящей через данную точку (черт. 125).



Черт. 125.

В направлении градиента производная функции F положительна, а в противоположном — отрицательна. Следовательно, на нормали к линии (поверхности) уровня в точке A в достаточно малой окрестности этой точки в направлении градиента $F(X) > F(A)$, а в противоположном направлении $F(X) < F(A)$. Значит, через точки нормали к линии (поверхности) уровня с одной стороны от точки касания проходят линии (поверхности) уровня, на которых $F(X) < F(A)$, а с другой — линии (поверхности), на которых $F(X) > F(A)$.

Стационарные точки функции F суть особые точки линий (поверхностей) уровня.

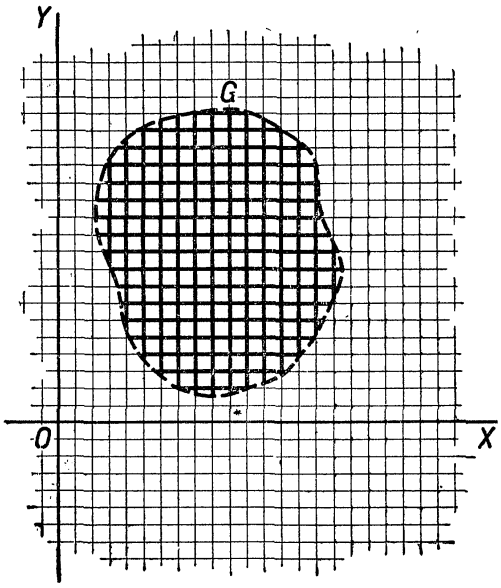
§ 41. Криволинейные координаты

Рассмотрим на координатной плоскости (x, y) два семейства прямых $x = a$ и $y = b$ (где $-\infty < a < +\infty$ и $-\infty < b < +\infty$), параллельных осям координат; множество всех прямых этих двух семейств будем называть декартовой координатной сеткой плоскости (x, y).

Данная область G отсекает на каждой из прямых $x = a$ и $y = b$ некоторую часть *.

* Эта часть может быть пустым множеством, если прямая не пересекает область G, может состоять из одного, нескольких или бесконечного множества отрезков, может состоять из всей прямой.

Эту часть будем называть декартовой координатной линией, а множество всех координатных линий — декартовой координатной сеткой в области G (черт. 126).



Черт. 126.

Предположим, что система функций

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v) \quad (T)$$

реализует взаимно однозначное регулярное отображение области G_{uv} на область G_{xy}. Координатной линии $u = \alpha$ в области G_{uv} соответствует в области G_{xy} линия (в общем случае кривая):

$$x = x(\alpha, v), \quad y = y(\alpha, v)$$

(где v — параметр).

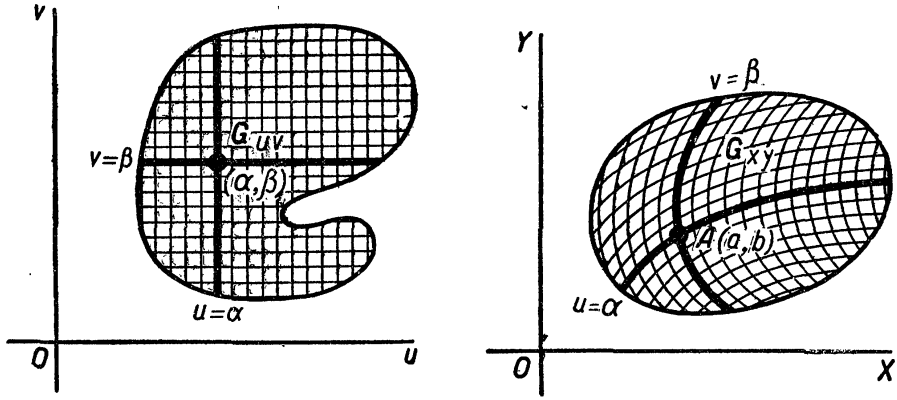
Аналогично координатной линии $v = \beta$ соответствует линия

$$x = x(u, \beta), \quad y = y(u, \beta)$$

(где u — параметр).

Следовательно, координатные линии $u = \alpha$ и $v = \beta$ в области G_{uv} отображаются в области G_{xy} на два семейства линий (черт. 127).

Эти семейства будем называть криволинейной сеткой (при



Черт. 127.

данном отображении) в области G_{xy}. Заданием точки $(\alpha, \beta) \in G_{uv}$ определится соответствующая точка $A(a, b)$:

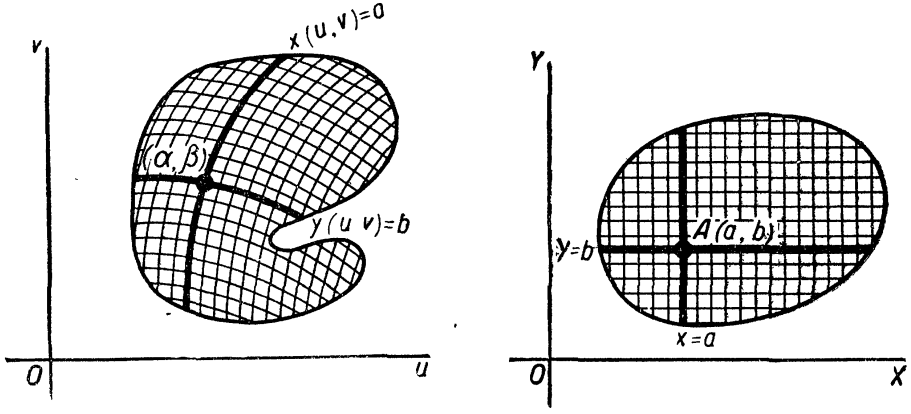
$$a = x(\alpha, \beta), \quad b = y(\alpha, \beta)$$

области G_{xy}, поэтому числа α и β называются криволинейными координатами точки A плоскости (x, y). Точка $A \in G_{xy}$ есть точка

пересечения координатных линий (в общем случае кривых), являющихся образами соответствующих прямолинейных координатных линий области G_{uv}:

$$u = \alpha, \quad v = \beta.$$

Обратное отображение (T^{-1}) отображает прямолинейную декартову сетку в области G_{xy} на криволинейную сетку в области G_{uv} (черт. 128).



Черт. 128.

Декартовым координатным линиям $x = a$ и $y = b$ области G_{xy} соответствуют в области G_{uv} линии уровня функций $x(u, v)$ и $y(u, v)$:

$$x(u, v) = a, \quad y(u, v) = b\ *.$$

Числа a и b являются (при данном отображении) криволинейными координатами соответствующей точки в области G_{uv}.

Все сказанное остается в силе для взаимно однозначных и регулярных отображений в пространстве:

$$x = x(u, v, w), \quad y = y(u, v, w), \quad z = z(u, v, w).$$

В этом случае декартова координатная сетка области G_{uvw}, образованная плоскостями $u = \alpha$, $v = \beta$, $w = \gamma$, переходит в криволинейную сетку, образованную некоторыми поверхностями в области G_{xyz}. Так, например, $u = \alpha$ есть уравнение плоскости, которой в области G_{xyz} соответствует поверхность

$$x = x(\alpha, v, w), \quad y = y(\alpha, v, w), \quad z = z(\alpha, v, w).$$

Координатным плоскостям $x = a$, $y = b$, $z = c$ области G_{xyz} в области G_{uvw} соответствуют координатные поверхности (в общем случае кривые):

$$x(u, v, w) = a, \quad y(u, v, w) = b, \quad z(u, v, w) = c,$$

являющиеся поверхностями уровня соответствующих функций.

* Из условия регулярности следует, что ни в какой точке области G_{uv} обе производные x'_u и x'_v не равны нулю (так как в противном случае якобиан обратился бы в нуль), т. е. что линии уровня $x = a$ не имеют особых точек. Это же относится к линиям $y = b$.

При параметрическом задании простого куска поверхности системой функций

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v)$$

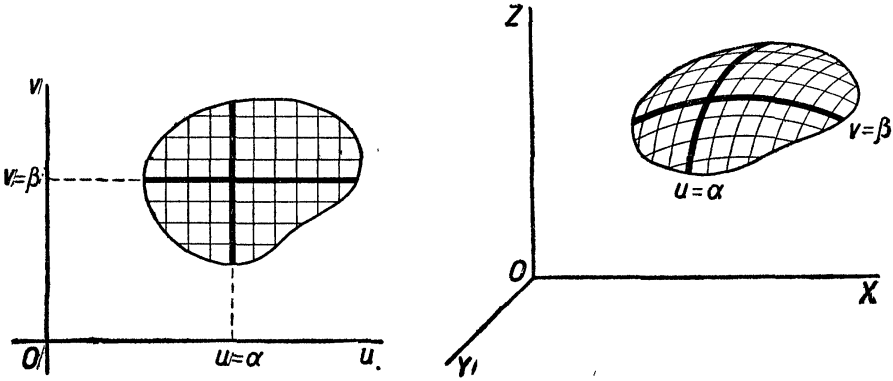
декартовы координатные линии $u = \alpha$ и $v = \beta$ отображаются на линии, расположенные на данном простом куске:

$$x = x(\alpha, v), \quad y = y(\alpha, v), \quad z = z(\alpha, v)$$

и

$$x = x(u, \beta), \quad y = y(u, \beta), \quad z = z(u, \beta)$$ (черт. 129).

Декартова координатная сетка отобразится на криволинейную координатную сетку на поверхности. Задание точки $(u, v) \in G_{uv}$ опреде-



Черт. 129.

ляет на поверхности точку-образ, являющуюся пересечением соответствующих координатных линий, поэтому числа α и β называются криволинейными координатами точки на поверхности.

Примеры систем криволинейных координат

Полярные координаты на плоскости. Формулы преобразования полярных координат в декартовы

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi$$

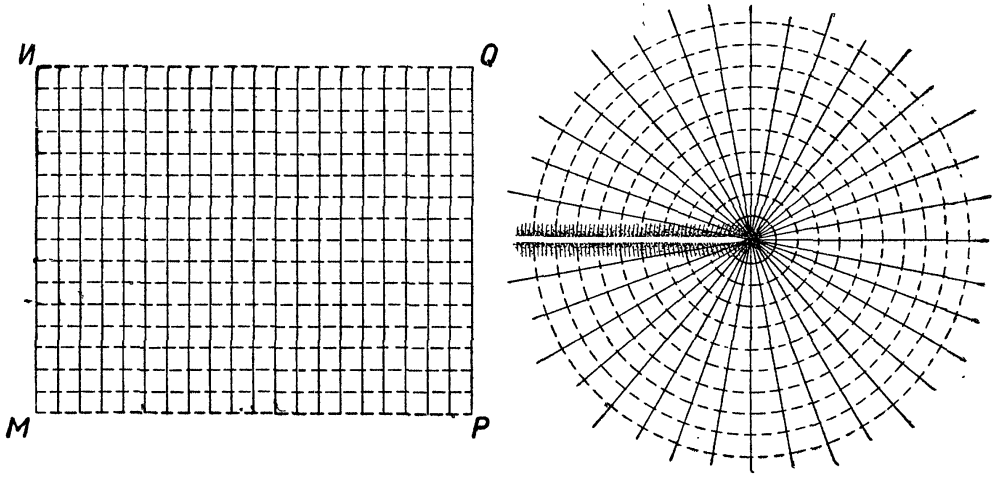
реализуют отображение полуполосы $NMPQ$ (черт. 130)

$$-\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi, \quad \rho \geqslant 0$$

на плоскость (x, y). При этом полупрямые MN и PQ $(\varphi = \pm \pi)$ отображаются на отрицательную часть оси абсцисс (включая точку O), отрезок MP $(\rho = 0)$ отображается в начало координат.

Внутренность полуполосы взаимно однозначно отображается на плоскость (x, y) с исключенной полупрямой $x \leqslant 0$, $y = 0$.

Сетка декартовых координат в плоскости (φ, ρ) соответствует сетке полярных координат в плоскости (x, y).



Черт. 130.

Обобщенные полярные координаты. Преобразование к обобщенным полярным координатам определяется формулами

$$x = a\rho \cos \varphi, \quad y = b\rho \sin \varphi$$

(где $a > 0$ и $b > 0$ — данные числа).

Это преобразование есть результат последовательного выполнения преобразования к полярным координатам

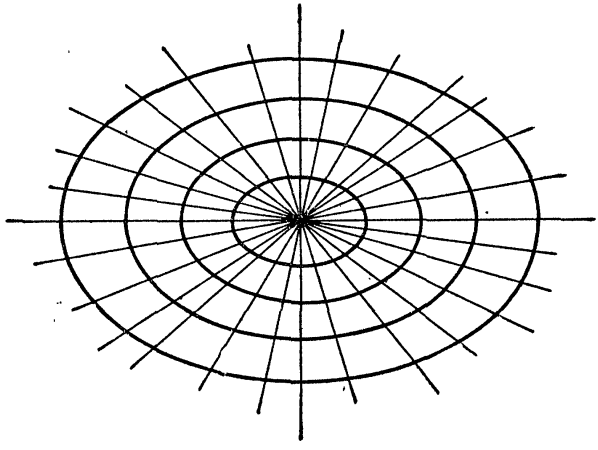
$$\xi = \rho \cos \varphi, \quad \eta = \rho \sin \varphi$$

и аффинного преобразования сжатия к координатным осям с различными (в общем случае) коэффициентами a и b:

$$x = a\xi, \quad y = b\eta.$$

Соответствующее отображение регулярно и взаимно однозначно внутри полуполосы $NMPQ$ (черт. 130) и

$$\frac{D(x, y)}{D(\varphi, \rho)} = \frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} \cdot \frac{D(\xi, \eta)}{D(\varphi, \rho)} = ab\rho.$$



Черт. 131.

Декартова сеть в полуполосе $NMPQ$ отображается на сеть, состоящую из эллипсов и прямолинейных лучей (черт. 131):

$\rho = c$ соответствует эллипс $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = c^2$;

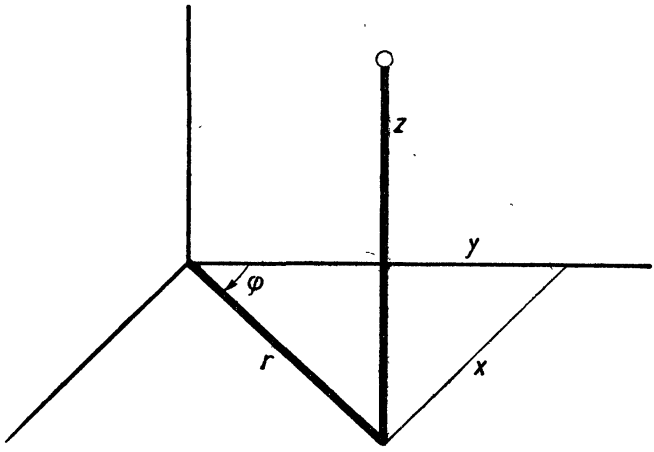
$\varphi = c_1$ соответствует луч $y = x \dfrac{b}{a} \operatorname{tg} c_1$.

Цилиндрические координаты в пространстве. Преобразование к цилиндрическим координатам определяется формулами:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = z.$$

В этих координатах положение точки определяется заданием полярных координат r и φ проекции точки на плоскость (x, y) и аппликаты z (черт. 132); имеем:

$$\frac{D(x, y, z)}{D(r, \varphi, z)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r;$$



Черт. 132.

соответствующее отображение регулярно в любой области пространства (r, φ, z), в которой $r \neq 0$. Отображение взаимно однозначно в области

$$r > 0, \quad -\pi < \varphi < \pi, \quad -\infty < z < +\infty.$$

Координатными поверхностями в пространстве (x, y, z) служат:

1° $r = a$ — цилиндр:

$$x^2 + y^2 = a^2;$$

2° $\varphi = \alpha$ — полуплоскость:

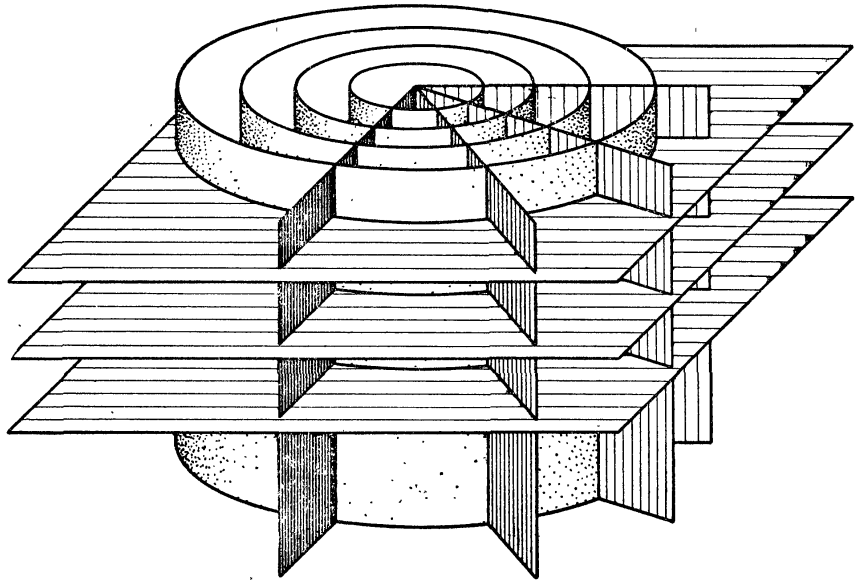
$$y = x\operatorname{tg}\alpha \quad \left(\text{при } \alpha = \frac{\pi}{2}, \ x = 0\right);$$

3° $z = c$ — горизонтальная плоскость (черт. 133).

Сферические (полярные) координаты в пространстве. В сферических координатах положение точки в пространстве определяется заданием расстояния точки $M(x, y, z)$ от начала координат

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

и географическими координатами (см. стр. 62) этой точки на поверхности сферы радиуса $\rho = OM$ с центром в начале координат. Отсчет



Черт. 133.

широты φ и долготы θ показан на чертеже 134.

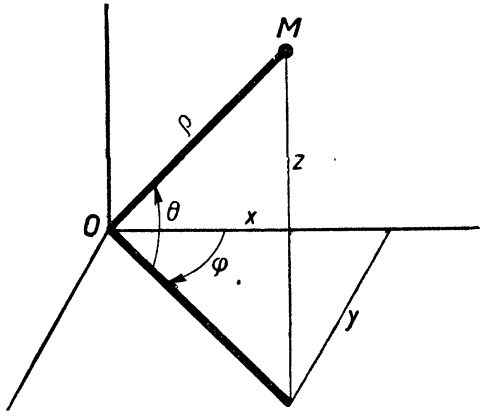
Сферические координаты ρ, φ и θ берутся при условиях

$$\rho \geqslant 0, \quad -\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi,$$

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Формулы, связывающие декартовы и сферические координаты, нетрудно установить из чертежа:

$$x = \rho \cos\varphi \cos\theta,$$
$$y = \rho \sin\varphi \cos\theta,$$
$$z = \rho \sin\theta.$$



Черт. 134.

Имеем:

$$\frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \varphi, \theta)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi\cos\theta & -\rho\sin\varphi\cos\theta & -\rho\cos\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\cos\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta & -\rho\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\theta & 0 & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho^2\cos\theta.$$

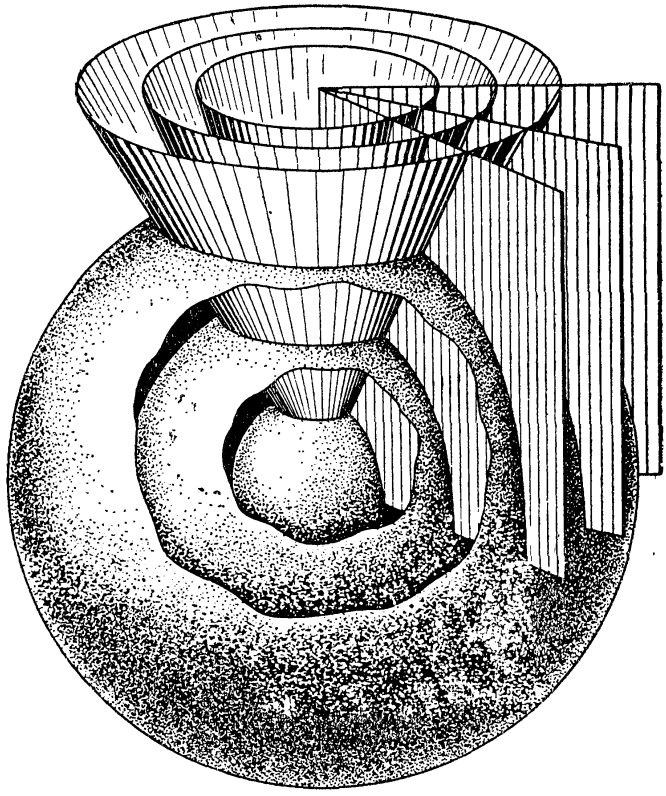
Примечание. Иногда широта θ отсчитывается от оси OZ. Соответствующие формулы можно получить, заменив θ на $\frac{\pi}{2} - \theta$:

$$x = \rho \cos\varphi \sin\theta, \quad y = \rho \sin\varphi \sin\theta, \quad z = \rho \cos\theta \quad \text{и}$$

$$\frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \varphi, \theta)} = \rho^2 \sin\theta.$$

Отображение регулярно и взаимно однозначно в области

$$\rho > 0, \quad -\pi < \varphi < \pi, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}.$$



Черт. 135.

Координатными поверхностями в пространстве (x, y, z) служат

1° $\rho = a$ — сферическая поверхность:

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2;$$

2° $\varphi = \alpha$ — полуплоскость:

$$x = t\cos\alpha, \quad y = t\sin\alpha$$

(где $t = \rho\cos\theta > 0$);

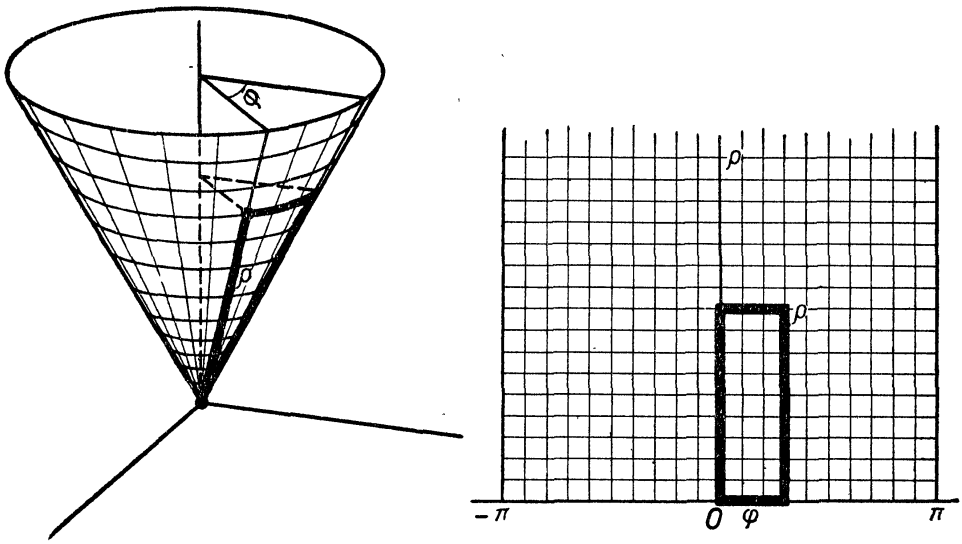
3° $\theta = \beta$ — полость конуса:

$$\sin^2\beta\,(x^2 + y^2) - z^2\cos^2\beta = 0 \quad \text{(черт. 135).}$$

Пользуясь формулами преобразования к полярным координатам, можно установить криволинейные координаты на координатных поверхностях. Так, положив $\rho = a\,(= \text{const})$, получим параметрические уравнения сферы:

$$x = a\cos\varphi\cos\theta, \quad y = a\sin\varphi\cos\theta, \quad z = a\sin\theta;$$

параметры φ и θ суть географические координаты точки на поверхности сферы (см. пример 3, стр. 62). Положив $\theta = \frac{\pi}{2} - \beta$, получим пара-



Черт. 136.

метрические уравнения поверхности полости конуса, образующая которого составляет угол β с осью Z:

$$x = \sin\beta\cdot\rho\cdot\cos\varphi, \quad y = \sin\beta\cdot\rho\cdot\cos\varphi, \quad z = \rho\cos\beta.$$

Геометрический смысл параметров ρ и φ легко усматривается из чертежа 136.

В данной параметризации вся поверхность полости конуса отображается на полуполосу

$$\rho \geqslant 0, \quad -\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi.$$

Декартова сеть в этой полуполосе отображается на сеть, состоящую из образующих и горизонтальных окружностей (черт. 136).

Обобщенные сферические координаты в пространстве определяются следующими формулами преобразования:

$$x = a\rho\cos\varphi\cos\theta, \quad y = b\rho\sin\varphi\cos\theta, \quad z = c\rho\sin\theta.$$

В этой системе координатными поверхностями являются эллипсоиды, эллиптические конусы и плоскости.

§ 42. Понятие о многомерной поверхности

Простым m-мерным куском поверхности в n-мерном пространстве (где $m < n$) называется взаимно однозначный и непрерывный образ m-мерного шара в n-мерном пространстве.

Простейшим примером m-мерного куска поверхности может служить множество точек $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ n-мерного пространства, определяемое уравнениями

$$x_{m+1} = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_m), \quad x_{m+2} = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_m), \ldots,$$
$$x_n = f_{n-m}(x_1, x_2, \ldots, x_m), \tag{I}$$

где непрерывные функции $f_1, f_2, \ldots, f_{n-m}$ заданы совместно в некотором m-мерном шаре $\overline{S}$:

$$(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \ldots + (x_m - a_m)^2 \leqslant r^2. \tag{$\overline{S}$}$$

Всякой точке $(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \overline{S}$ ставится в соответствие единственная точка $(x_1, x_2, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n)$, при этом двум различным точкам шара $\overline{S}$ соответствуют два различные образа.

Рассмотрим множество $\mathfrak{M}$ точек n-мерного пространства, заданное параметрически гладкой системой

$$x_1 = x_1(t_1, t_2, \ldots, t_m), \quad x_2 = x_2(t_1, t_2, \ldots, t_m), \ldots,$$
$$x_n = x_n(t_1, t_2, \ldots, t_m) \quad (\text{где} \quad m < n) \tag{II}$$

в некоторой области G_T. Точка $T_0 \in G_T$ (а также и ее образ) называется обыкновенной, если ранг матрицы Якоби данной системы равен в окрестности точки T_0 числу параметров m. В достаточно малой окрестности всякой обыкновенной точки можно выделить m независимых функций и выразить через них прочие функции. Так, если

$$\frac{D(x_1, x_2, \ldots, x_m)}{D(t_1, t_2, \ldots, t_m)} \neq 0,$$

то первые m функций независимы, а прочие могут быть выражены через них:

$$x_{m+1} = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_m), \ldots, \quad x_n = f_{n-m}(x_1, x_2, \ldots, x_m).$$

Приняв за непосредственные аргументы координаты $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ $\left(\text{что возможно в силу условия } \frac{D(x, x_2, \ldots, x_m)}{D(t_1, t_2, \ldots, t_m)} \neq 0\right)$, получим локальное представление данного множества системой уравнений (I). Следовательно, часть множества $\mathfrak{M}$ в окрестности обыкновенной точки является простым m-мерным куском поверхности. В области, не содержащей особых точек, все множество (m-мерная поверхность) представляется как соединение простых m-мерных кусков поверхности.

Параметры $t_1, t_2, \ldots, t_m$ называются также криволинейными координатами точки на поверхности.

Рассмотрим систему уравнений:

$$F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \ldots, F_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \quad (F)$$

где $k < n$, а функции F_k — гладкие в области G. Пусть $\mathfrak{M}$ есть множество точек, удовлетворяющих системе уравнений (F). Точка $X_0 \in \mathfrak{M}$ называется обыкновенной, если в некоторой ее окрестности ранг матрицы Якоби системы функций $F_1, F_2, \ldots, F_k$ равен их числу k. В окрестности каждой обыкновенной точки (в силу теоремы о неявных функциях) система (F) может быть решена относительно k координат. Так, если

$$\frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_k)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_k)} \neq 0$$

в окрестности обыкновенной точки, то

$$x_1 = f_1(x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n), \quad x_2 = f_2(x_{k+1}, \ldots, x_n), \ldots,$$
$$x_k = f_k(x_{k+1}, \ldots, x_n).$$

Следовательно, в окрестности обыкновенной точки множество $\mathfrak{M}$ представляется в виде простого $n-k$-мерного куска поверхности, а вся поверхность в целом (если множество $\mathfrak{M}$ не пусто) в области, не содержащей особых точек, представляется как соединение простых кусков.

§ 43. Условный экстремум

Пусть $f(X)$ — функция, рассматриваемая в некоторой области G_X, а L — данная поверхность или линия, содержащаяся в этой области.

Определение. *Если функция $f(X)$, рассматриваемая на поверхности (или линии) L, имеет в точке $A \in L$ экстремум, то говорят, что $f(X)$ имеет в точке A данной поверхности (линии) условный экстремум.*

Можно рассматривать локальные и тотальные, строгие и нестрогие условные экстремумы; так, например, строгий локальный условный максимум характеризуется выполнением неравенства

$$f(X) < f(A)$$

в точках данной поверхности (линии), содержащихся в достаточно малой окрестности точки A. Тотальный условный максимум характеризуется выполнением этого неравенства для всех точек данной поверхности (линии).

Простейшие задачи на условный экстремум формулируются следующим образом:

1. *Найти экстремум функции* $f(x, y)$ *на линии, заданной параметрически*:

$$x = x(t), \quad y = y(t),$$

или уравнением

$$F(x, y) = 0.$$

2. *Найти экстремум функции* $f(x, y, z)$ *на поверхности, заданной параметрически*:

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v),$$

или уравнением

$$F(x, y, z) = 0.$$

3. *Найти экстремум функции* $f(x, y, z)$ *на линии, заданной параметрически*:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t),$$

или уравнениями

$$F(x, y, z) = 0, \quad \Phi(x, y, z) = 0.$$

В общем виде задача отыскания условного экстремума формулируется так: *найти экстремум функции* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *на* m*-мерной поверхности, заданной параметрически*:

$$x_1 = x_1(t_1, t_2, \ldots, t_m), \quad x_2 = x_2(t_1, t_2, \ldots, t_m), \ldots,$$
$$x_n = x_n(t_1, t_2, \ldots, t_m),$$

или на $n - k$*-мерной поверхности, заданной уравнениями*

$$\Phi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \ldots, \quad \Phi_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0.$$

Необходимые условия. Все рассматриваемые ниже функции будем предполагать гладкими в некоторой области. Если поверхность (линия) L задана параметрически, то функция $f(X)$ на L есть функция параметров, и задача отыскания условного экстремума сводится к отысканию экстремума (безусловного) от этой функции. Так, например, отыскание условного экстремума функции $f(x, y, z)$ на поверхности

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v)$$

сводится к отысканию экстремума функции двух аргументов

$$\psi(u, v) = f\big(x(u, v), y(u, v), z(u, v)\big).$$

Если в точке $A(a, b, c)$, соответствующей значениям $u = \alpha$ $v = \beta$, имеет место локальный условный экстремум, то $d\psi(u, v; \alpha, \beta) = 0$, или, что то же, $\psi'_u(\alpha, \beta) = \psi'_v(\alpha, \beta) = 0$.

Производные ψ'_u и ψ'_v могут быть вычислены по правилу дифференцирования сложной функции.

Геометрическая интерпретация. Предположим, что точка условного экстремума A не является ни стационарной для функции f, ни особой для поверхности (линии) L. Для простоты ограничимся случаем экстремума функции двух аргументов $f(x, y)$ на линии

$$x = x(t), \quad y = y(t). \tag{L}$$

Необходимое условие экстремума запишется так:

$$\frac{d}{dt} f\big(x(t),\ y(t)\big) = f'_x(A)\, x' + f'_y(A)\, y' = 0. \tag{1}$$

Это условие выражает, что в точке A линия L касается линии уровня функции $f(x, y)$, проходящей через точку A.

В самом деле, достаточно заметить, что

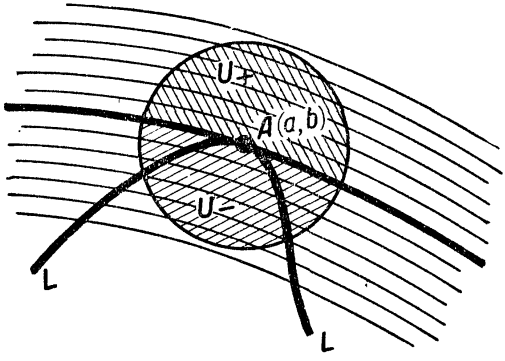
$$f'_x(A)(x - a) + f'_y(A)(y - b) = 0$$

есть уравнение касательной к линии уровня, а

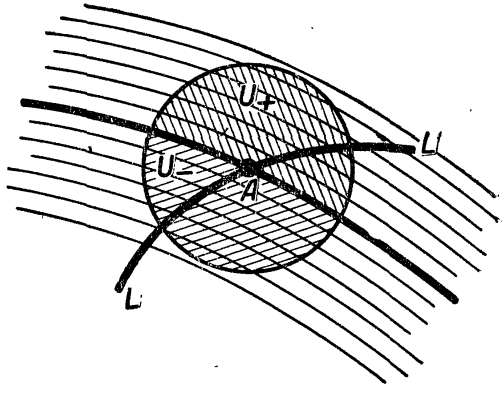
$$x - a = x' \cdot (t - \alpha), \quad y - b = y' \cdot (t - \alpha)$$

суть параметрические уравнения касательной к линии L в точке A.

Аналогично, в пространстве необходимым условием существования экстремума функции $f(x, y, z)$ на данной поверхности (линии)



Черт. 137.



Черт. 138.

является касание в точке экстремума этой поверхности (линии) и поверхности уровня функции f.

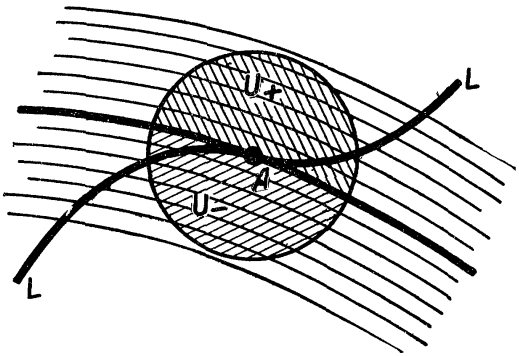
Линия уровня функции $f(x, y)$ в точке A делит окрестность точки A на две части: U_+ и U_-, в которых имеем соответственно: $f(x, y) > f(A)$ и $f(x, y) < f(A)$ (черт. 137).

Допустим, например, что в точке A имеет место строгий условный максимум, тогда на L

$$f(x, y) < f(a, b) \quad \text{при} \quad X(x, y) \neq A(a, b).$$

Следовательно, все точки линии L, кроме точки A, должны лежать в части U_-. Если бы линия L не касалась в точке A линии уровня, то касательные к этим линиям пересекались бы под углом, отличным от нуля, но тогда в окрестности точки A линия L располагалась бы частично в U_+, частично в U_-, и на L существовали бы значения функции как большие, так и меньшие, чем $f(A)$ (черт. 138).

Касание линии L и соответствующей линии уровня является лишь необходимым условием экстремума. На чертеже 139 изображен случай, когда это касание имеет место, а экстремум не существует.



Черт. 139.

Теорема. *Если функция* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *на поверхности, заданной уравнениями*

$$\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \ \ldots \ \ldots, \ \varphi_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

(где $k < n$),

в обыкновенной ее точке A *имеет условный экстремум, то существуют* k *коэффициентов* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, *посредством которых значения производных функций* f *в точке* A *линейно выражаются через значения соответственных производных функций* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{df}{dx_1} &= \lambda_1 \frac{d\varphi_1}{dx_1} + \lambda_2 \frac{d\varphi_2}{dx_1} + \ldots + \lambda_k \frac{d\varphi_k}{dx_1}, \\
\frac{df}{dx_2} &= \lambda_1 \frac{d\varphi_1}{dx_2} + \lambda_2 \frac{d\varphi_2}{dx_2} + \ldots + \lambda_k \frac{d\varphi_k}{dx_2}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\frac{df}{dx_n} &= \lambda_1 \frac{d\varphi_1}{dx_n} + \lambda_2 \frac{d\varphi_2}{dx_n} + \ldots + \lambda_k \frac{d\varphi_k}{dx_n}.
\end{aligned}\right\}$$

Всякая точка $A(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ (обыкновенная для данной поверхности), удовлетворяющая последним уравнениям, называется условно стационарной точкой функции $f(X)$ на данной поверхности, коэффициенты $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ называются множителями Лагранжа.

Доказательство. Во избежание громоздких вычислений рассмотрим функцию $f(x, y, z)$ на линии L:

$$\varphi_1(x, y, z) = 0, \quad \varphi_2(x, y, z) = 0. \qquad (L)$$

Если точка $A(a, b, c)$ — обыкновенная (см. § 40, стр. 201) для линии L, то в окрестности этой точки систему (L) можно решить относительно двух координат, выразив их как функции третьей, и

принять эту последнюю за параметр. Так, например, если $\frac{D(\varphi_1, \varphi_2)}{D(y, z)} \neq 0$, то в окрестности точки A линию L можно представить параметрическими уравнениями:

$$y = y(x), \quad z = z(x) \quad (\text{где } x \text{ — параметр } *).$$

Следовательно, задача сводится к исследованию функции $\psi(x) = f\big(x, y(x), z(x)\big)$ в окрестности точки $x = a$. Если $A(a, b, c)$ есть точка локального условного экстремума, то $d\psi(x, a) = 0$ или (по свойству инвариантности формулы дифференциала):

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy + \frac{\partial f}{\partial z}\,dz = 0. \qquad (df)$$

Для нахождения dy и dz дифференцируем уравнения (L):

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\,dx + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}\,dy + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z}\,dz = 0, \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}\,dx + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}\,dy + \frac{\partial \varphi_2}{\partial z}\,dz = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (d\varphi)$$

Если найти дифференциалы dy и dz из уравнений $(d\varphi)$ (что возможно, так как детерминант из их коэффициентов отличен от нуля) и подставить их в df, то получим дифференциал $d\psi$. Этот дифференциал в точке экстремума должен быть тождественно равен нулю. Значит, уравнение (df) (линейное относительно dx, dy и dz) есть следствие уравнений $(d\varphi)$. Это имеет место, если коэффициенты уравнения (df) являются линейными комбинациями соответственных коэффициентов уравнений $(d\varphi)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}; \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial z},$$

где $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}$, $\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}$ и т. д. — значения производных в точке A, ч. т. д.

Примечание. Окончательные условия симметричны относительно аргументов $x_1, x_2, \ldots, x_n$, поэтому ими не предрешается, какие из этих аргументов приняты за непосредственные.

Геометрическая интерпретация. Доказанное условие есть условие касания в точке экстремума поверхности (линии), на которой рассматривается функция f (X), к поверхности (линии) уровня

* В общем случае из k уравнений $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = 0, \ldots, \varphi_k = 0$ следует выразить k координат в виде функции $n - k$ остальных, приняв последние за параметры.

Это возможно по теореме о неявных функциях, так как матрица Якоби функций $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$ в точке A имеет ранг, равный k (A — обыкновенная точка), и по крайней мере один из ее миноров отличен от нуля. Если, например,

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_k)} \neq 0,$$

то (локально) координаты $x_1, x_2, \ldots, x_k$ можно представить в виде функций от $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n$.

этой функции. Так, например, экстремум функции $f(x, y)$ на линии $\varphi(x, y) = 0$ возможен, если

$$f'_x = \lambda\varphi'_x, \quad f'_y = \lambda\varphi'_y,$$

но тогда касательные в точке A к линии уровня функции $f(x, y)$,

$$f'_x \cdot (x - a) + f'_y \cdot (y - b) = 0,$$

и к линии $\varphi(x, y) = 0$,

$$\varphi'_x \cdot (x - a) + \varphi'_y \cdot (y - b) = 0,$$

совпадают.

Примечание. Если A есть стационарная точка функции f, то $f'_{x_1} = f'_{x_2} = \ldots = f'_{x_n} = 0$; в этом случае $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0$.

Рассмотрим вспомогательную функцию:

$$\Phi(X) = f(X) - \lambda_1\varphi_1(X) - \lambda_2\varphi_2(X) - \ldots - \lambda_k\varphi_k(X),$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ — множители Лагранжа в условно стационарной точке A функции $f(X)$. На данной поверхности (линии) $\varphi_1 = \varphi_2 = \ldots = \varphi_k = 0$, а потому вспомогательная функция (на поверхности) равна функции $f(X)$:

$$f(X) = \Phi(X).$$

Условия

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_i} + \ldots + \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} \quad (\text{при } i = 1, 2, \ldots, n)$$

показывают, что точка A является стационарной точкой функции Φ:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} = \ldots = \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} = 0.$$

Для отыскания условно стационарных точек применяется следующее правило множителей Лагранжа.

Правило. *Для отыскания условно стационарных точек следует:*

1° *составить вспомогательную функцию*

$$\Phi = f - \lambda_1\varphi_1 - \lambda_2\varphi_2 - \ldots - \lambda_k\varphi_k$$

с неопределенными коэффициентами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$;

2° *составить систему* $n + k$ *уравнений*

$$\left.\begin{aligned} &\Phi'_{x_1} = \Phi'_{x_2} = \ldots = \Phi'_{x_n} \\ \text{и} \\ &\varphi_1 = \varphi_2 = \ldots = \varphi_k = 0 \end{aligned}\right\}$$

с $n + k$ *неизвестными* $x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$.

Из этой системы определяются координаты условно стационарных точек и соответствующие множители Лагранжа.

Точки условного экстремума содержатся среди найденных условно стационарных точек.

Особые и краевые точки поверхности (линии) подлежат специальному исследованию.

Примечание. При отыскании экстремума функции f на поверхности

$$\varphi_1 = c_1, \quad \varphi_2 = c_2, \ \ldots, \varphi_k = c_k \qquad (\text{где } c_i \text{ — числа}).$$

Вспомогательную функцию $f - \sum \lambda_i (\varphi_i - c_i)$ можно заменить функцией $f - \sum \lambda_i \varphi_i$, так как производные обеих этих функций одинаковы.

Достаточные условия. Будем предполагать, что данная функция и функции, посредством которых задается поверхность (линия), имеют в исследуемой точке A непрерывные производные второго порядка.

Если поверхность (линия) задана параметрически, то задача сводится к обычному исследованию на безусловный экстремум функции $f(X)$ как функции (сложной) параметров.

Рассмотрим случай, когда точка A является безусловно стационарной точкой функции f. Составим приращение:

$$\Delta f = f(x_1, x_2, \ldots) - f(a_1, a_2, \ldots) = \frac{1}{2} \sum p_{ij} \Delta x_i \Delta x_j + \omega\rho^2,$$

$$\text{где} \quad \sum p_{ij} \Delta x_i \Delta x_j = d^2 f(X, A).$$

На данной поверхности (или линии) координаты $x_1, x_2, \ldots$ суть дифференцируемые функции параметров. Следовательно, имеем:

$$\Delta x_1 = dx_1 + \omega_1 r, \quad \Delta x_2 = dx_2 + \omega_2 r, \ \ldots,$$

где $r = \sqrt{\Delta t_1^2 + \Delta t_2^2 + \ldots + \Delta t_k^2}$, а Δt_i — приращения параметров. Выразив приращения Δx_i через дифференциалы, получим (после несложных преобразований):

$$f(x_1, x_2, \ldots) - f(A) = \frac{1}{2} \sum p_{ij} dx_i dx_j + \eta r^2,$$

где $\lim\limits_{r \to 0} \eta = 0$. Дифференциалы $dx_1, dx_2, \ldots$ суть линейные функции приращений параметров:

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial t_1} \Delta t_1 + \frac{\partial x_i}{\partial t_2} \Delta t_2 + \ldots + \frac{\partial x_i}{\partial t_k} \Delta t_k.$$

Выражение $\sum p_{ij} dx_i dx_j$ есть квадратичная форма относительно приращений параметров. В зависимости от того, будет эта форма определенной, неопределенной или полуопределенной, получим экстремум, отсутствие экстремума либо сомнительный случай.

При исследовании условно стационарной точки функции $f(X)$, заданной на поверхности

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \ \ldots, \ \varphi_k = 0, \qquad (L)$$

можно функцию f заменить вспомогательной функцией $\Phi(X) = f - \sum \lambda_i \varphi_i$, так как $\Phi(X) = f(x)$ на поверхности (линии) L. Точка A есть безусловно стационарная точка функции $\Phi(X)$, поэтому

$$\Delta f = \Delta\Phi = \frac{1}{2}\sum p_{ij}\,dx_i\,dx_j + \eta r^2,$$

где p_{ij} — значения вторых производных вспомогательной функции Φ.

Дифференцируя соотношения $\varphi_i = 0$ в точке A, получим k уравнений, из которых можно выразить линейно дифференциалы k координат через дифференциалы $n - k$ прочих координат, принятых за параметры. Подставив выражения этих дифференциалов в

$$\frac{1}{2}\sum p_{ij}\,dx_i\,dx_j,$$

получим подлежащую исследованию квадратичную форму относительно приращений координат, принятых за параметры.

Принцип взаимности. Предположим, что функции $f(x, y)$ и $\varphi(x, y)$ не имеют стационарных точек в области G, иными словами, линии уровня каждой из этих функций не имеют особых точек. Условия существования экстремума функции $f(x, y)$ на линии $\varphi(x, y) = C$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial f}{\partial y} - \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0,$$

можно записать так:

$$\mu_1\frac{\partial f}{\partial x} + \mu_2\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0; \quad \mu_1\frac{\partial f}{\partial y} + \mu_2\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$$

(где $\mu_1 \neq 0$ и $\mu_2 \neq 0$).

Эти условия представлены в симметричной форме: если искать экстремумы функции φ на линии $f = C$, то придем к тем же уравнениям. Это положение называется принципом взаимности Эйлера.

На чертеже 140 представлены семейства линий уровня функций f и φ; условно стационарные точки функции f при $\varphi = C$, равно как условно стационарные точки функций φ при $f = C$, суть точки касания линий обоих семейств.

Примеры.

1. Найти точки эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, наиболее и наименее удаленные от начала координат. Ищем экстремум квадрата расстояния до начала координат

$$f = x^2 + y^2$$

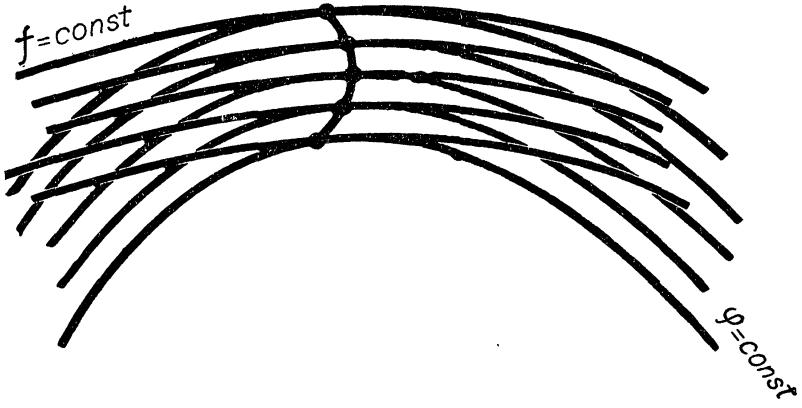
точки, лежащей на эллипсе: $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ (где $a > b$).
На эллипсе

$$f = a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t, \quad f'_t = \sin 2t\,(b^2 - a^2)$$

стационарные значения $t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi$ соответствуют вершинам эллипса

$$(a, 0), (0, b), (-a, 0), (0, -b).$$

Функция $f(x, y) = x^2 + y^2$, непрерывная на замкнутом множестве (на эллипсе), имеет наибольшее и наименьшее значения. В точках $(\pm a, 0)$ имеем



Черт. 140.

$f(\pm a, 0) = a^2$; в точках $(0, \pm b)$ имеем $f(0, \pm b) = b^2$. Так как $a^2 > b^2$, то первые точки суть точки максимума, а вторые — точки минимума.

2. Найти точки эллипсоида:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \text{где } a > b > c,$$

наиболее и наименее удаленные от начала координат. Функция $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, непрерывная на эллипсоиде, имеет наибольшее и наименьшее значения. Эллипсоид есть поверхность, не имеющая особых точек.

1-е решение (методом множителей Лагранжа). Составляем вспомогательную функцию

$$\Phi = (x^2 + y^2 + z^2) - \lambda\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)$$

и систему уравнений:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 2x - 2\frac{\lambda}{a^2}x = 0;$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 2y - 2\frac{\lambda}{b^2}y = 0;$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 2z - 2\frac{\lambda}{c^2}z = 0;$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Решив эту систему уравнений, получим следующие условно стационарные точки:

$$(\pm a, 0, 0),\ \lambda = a^2;\quad (0, \pm b, 0),\ \lambda = b^2;\quad (0, 0, \pm c),\ \lambda = c^2.$$

Так как

$$f(\pm a, 0, 0) > f(0, \pm b, 0) > f(0, 0, \pm c),$$

то в точках $(\pm a, 0, 0)$ имеет место тотальный максимум, равный $f(\pm a, 0, 0) = a^2$, а в точках $(0, 0, \pm c)$ — тотальный минимум, равный c^2.

В точках $(0, \pm b, 0)$ тотальный экстремум не имеет места; докажем, что в этих точках не имеет места и локальный экстремум. Возьмем для определенности точку $B(0, b, 0)$. Составим второй дифференциал в точке B вспомогательной функции:

$$d^2\Phi(x, y, z;\ B) = 2\left(1 - \frac{\lambda^2}{a^2}\right)dx^2 + 2\left(1 - \frac{\lambda^2}{b^2}\right)dy^2 + 2\left(1 - \frac{\lambda^2}{c^2}\right)dz^2,$$

и дифференцируем уравнение эллипсоида:

$$\frac{2x\,dx}{a^2} + \frac{2y\,dy}{b^2} + \frac{2z\,dz}{c^2} = 0.$$

Из последнего уравнения в точке $B(0, b, 0)$ получим $dy = 0$ и, следовательно (полагая $\lambda = b^2$):

$$d^2\Phi = 2\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)dx^2 - 2\left(\frac{b^2}{c^2} - 1\right)dz^2.$$

Так как $d^2\Phi$ — неопределенная форма, то в точке $B(0, b, 0)$ экстремум не существует.

2-е решение. Возьмем параметрические уравнения эллипсоида

$$x = a\cos\varphi\cos\theta,\quad y = b\sin\varphi\cos\theta,\quad z = c\sin\theta.$$

На эллипсоиде

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = a^2\cos^2\varphi\cos^2\theta + b^2\sin^2\varphi\cos^2\theta + c^2\sin^2\theta$$

и

$$\frac{\partial f}{\partial\varphi} = -(a^2 - b^2)\sin 2\varphi\cos^2\theta;$$

$$\frac{\partial f}{\partial\theta} = -\sin 2\theta\,(a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi - c^2).$$

Находим стационарные точки:

$A(\pm a, 0, 0)$ при $\varphi = 0,\ \theta = 0$ и при $\varphi = \pi,\ \theta = 0$;

$B(0, \pm b, 0)$ при $\varphi = \pm\frac{\pi}{2},\ \theta = 0$;

$C(0, 0, \pm c)$ при $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$ (φ — любое число).

Вычисляем вторые производные:

$$f''_{\varphi\varphi} = -2\cos 2\varphi\cos^2\theta\,(a^2 - b^2);\quad f''_{\varphi\theta} = 2(a^2 - b^2)\sin 2\varphi\sin 2\theta;$$

$$f''_{\theta\theta} = -2\cos 2\theta\,(a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi - c^2).$$

В точках $A(\pm a, 0, 0)$ получим: $f''_{\varphi\varphi} = -2(a^2 - b^2)$, $f''_{\varphi\theta} = 0$, $f''_{\theta\theta} = -2(a^2 - c^2)$, $\Delta = 4(a^2 - b^2)(a^2 - c^2) > 0$ и $f''_{\varphi\varphi} < 0$; следовательно, имеем максимум, равный a^2.

В точках $B(0, \pm b, 0)$ получим: $f''_{\varphi\varphi} = 2(a^2 - b^2)$, $f''_{\varphi\theta} = 0$, $f''_{\theta\theta} = -2(b^2 - c^2)$, $\Delta = -4(a^2 - b^2)(b^2 - c^2) < 0$, экстремума нет.

Точки $C(0, 0, \pm c)$ в данной параметризации неудобны для исследования (получим сомнительный случай), так как в полюсах нарушается взаимная однозначность отображения. Можно поменять местами оси координат, заменив в формулах x на z, а z на x, или (что равносильно) можно заменить точки C точками A, но считать $a < b < c$. В этом предположении в точках A получим минимум.

3. Найти площадь эллипса, полученного в пересечении эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{1}$$

плоскостью

$$lx + my + nz = 0. \tag{2}$$

Определим полуоси эллипса, т. е. максимум и минимум расстояния точек эллипса до его центра. Ищем экстремум функции $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ при условиях (1) и (2).

Из геометрических соображений существование максимума и минимума известно заранее. Составляем уравнения:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 2x - 2\lambda \frac{x}{a^2} - \mu l = 0;$$
$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 2y - 2\lambda \frac{y}{b^2} - \mu m = 0;$$
$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 2z - 2\lambda \frac{z}{c^2} - \mu n = 0,$$

где λ и μ — множители Лагранжа. Умножив эти уравнения на x, y и z и сложив, найдем $r^2 = \lambda$; подставив затем значения x, y и z в (2), получим уравнение:

$$\frac{l^2a^2}{a^2 - r^2} + \frac{m^2b^2}{b^2 - r^2} + \frac{n^2c^2}{c^2 - r^2} = 0, \tag{3}$$

квадратное относительно r^2, корнями которого служат квадраты полуосей эллипса r_1^2 и r_2^2. Искомая площадь S равна $\pi r_1 r_2 = \pi \sqrt{r_1^2 r_2^2}$. Но $r_1^2 r_2^2$ есть отношение свободного члена к коэффициенту при r^4 уравнения (3).

Следовательно,

$$S = \frac{\pi abc \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}{\sqrt{a^2l^2 + b^2m^2 + c^2n^2}}.$$

4. Найти экстремум функции

$$S = xy + xz + yz, \quad \text{при условии} \quad xyz = V = \text{const},$$

в области $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$. Составляем вспомогательную функцию

$$\Phi = xy + xz + yz - \lambda xyz$$

и систему уравнений:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = (y + z) - \lambda yz = 0;$$
$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = (x + z) - \lambda xz = 0;$$
$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = (x + y) - \lambda xy = 0.$$

Умножив эти уравнения на x, y и z и сложив, получим:

$$2S - 3\lambda V = 0, \quad \text{откуда } \lambda = \frac{2S}{3V}.$$

Умножив первое уравнение на x, получим $\frac{1}{3} S = yz$, и аналогично из прочих уравнений $xz = xy = \frac{1}{3} S$, откуда

$$x = y = z = \sqrt[3]{V}.$$

Для исследования условно стационарной точки составляем второй дифференциал вспомогательной функции $\Phi = xy + xz + yz - \lambda xyz$ в стационарной точке. Имеем:

$$\Phi''_{xx} = \Phi''_{yy} = \Phi''_{zz} = 0, \quad \Phi''_{xy} = 1 - \lambda z.$$

В стационарной точке $\Phi''_{xy} = -1$

и аналогично $$\Phi''_{yz} = \Phi''_{xz} = -1.$$

Следовательно,

$$d^2\Phi = -(dx\,dy + dy\,dz + dx\,dz).$$

Дифференцируя уравнение $xyz - V = 0$, находим:

$$yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz = 0.$$

В условно стационарной точке

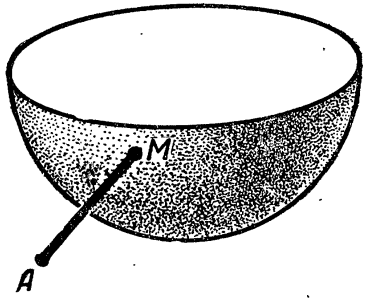
$$dx + dy + dz = 0, \quad \text{откуда} \quad dz = -dx - dy$$

и

$$d^2\Phi = dx^2 + dx\,dy + dy^2.$$

Этот трехчлен положительно определенный, $\Delta = \frac{3}{4} > 0$, следовательно, имеет место минимум.

Геометрическая интерпретация. Пусть x, y и z — ребра прямоугольного параллелепипеда; тогда $2S$ есть полная поверхность, а xyz — объем этого параллелепипеда; таким образом, из всех прямоугольных параллелепипедов данного объема наименьшую полную поверхность имеет куб.



Черт. 141.

Взаимная задача формулируется следующим образом: из всех прямоугольных параллелепипедов с данной полной поверхностью ($S = \text{const}$) найти параллелепипед наибольшего объема. В силу принципа взаимности решение этой задачи также дает куб.

5. Найти условие, при котором обыкновенная точка $M(x, y, z)$ поверхности (или плоской линии) $f(x, y, z) = 0$ (или $f(x, y) = 0$) является наиболее или наименее удаленной от данной точки $A(a, b, c)$, не лежащей на поверхности (линии) (черт. 141).

Ищем экстремум квадрата расстояния:

$$r^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2,$$

при условии $f(x, y, z) = 0$. Из системы уравнений

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 2(x - a) - \lambda f'_x = 0;$$
$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 2(y - b) - \lambda f'_y = 0;$$
$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 2(z - c) - \lambda f'_z = 0$$

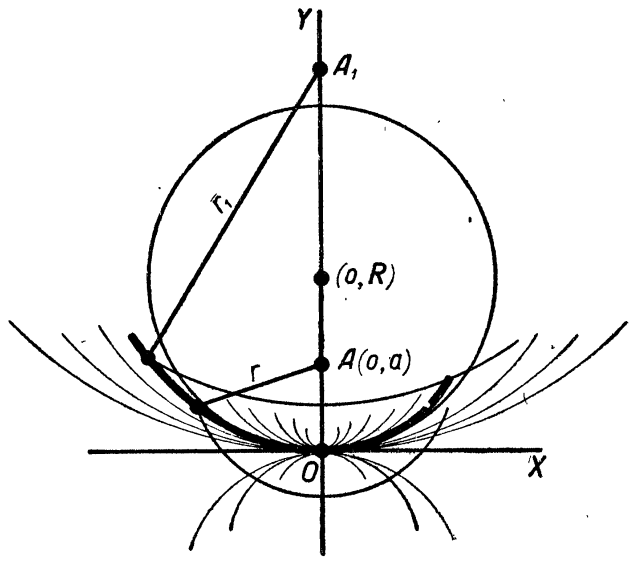
получим:

$$\frac{a - x}{f'_x(x, y, z)} = \frac{b - y}{f'_y(x, y, z)} = \frac{c - z}{f'_z(x, y, z)};$$

следовательно, точка A должна лежать на нормали к поверхности (линии) в точке M, т. е. экстремум расстояния (в обыкновенной точке) может дать лишь отрезок нормали к поверхности (к линии), проходящей через точку A.

Дает ли отрезок нормали экстремум — вопрос, требующий специального исследования.

Пусть $y = \varphi(x)$ — уравнение данной линии; примем исследуемую точку линии за начало координат, а касательную в ней — за ось абсцисс; тогда имеем: $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$ (черт. 142).



Черт. 142.

Если отрезок OA дает экстремум расстояния r от точки A до точки линии, то точка A должна лежать на оси OY. Если $A = (0, a)$, то

$$r^2 = x^2 + (y - a)^2 = x^2 + [\varphi(x) - a]^2.$$

Для функции $f(x) = r^2$ имеем:

$$f(0) = a^2; \quad f'(x) = 2x + 2[\varphi(x) - a]\varphi'(x), \quad f'(0) = 0;$$

$$f''(x) = 2 + 2[\varphi'(x)]^2 + 2[\varphi(x) - a]\varphi''(x) \quad \text{и} \quad f''(0) = 2[1 - a\varphi''(0)].$$

Предположим, что $\varphi''(0) \neq 0$; пусть для определенности $\varphi''(0) > 0$.

Если $1 - a\varphi''(0) > 0$, т. е. $a < \frac{1}{\varphi''(0)}$, то отрезок OA дает минимум, а если $1 - a\varphi''(0) < 0$, т. е. $a > \frac{1}{\varphi''(0)}$, то OA дает максимум расстояния от точки A до линии.

Так как $R = \frac{1}{\varphi''(0)}$ есть величина радиуса кривизны, то центр кривизны можно характеризовать следующим экстремальным свойством: центр кривизны отделяет точки нормали, для которых расстояние до линии имеет минимум, от точек, для которых это расстояние имеет максимум.

6. Доказать неравенство

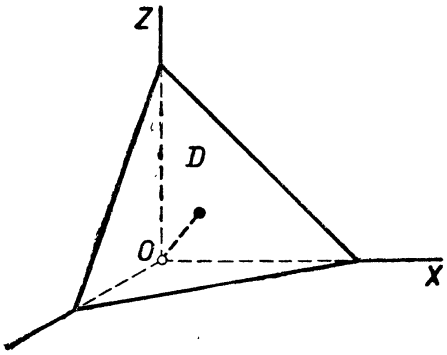
$$\frac{x_1^p+x_2^p+\ldots+x_n^p}{n}\geqslant\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right)^p,\quad\text{где } p>1 \text{ и } x_i\geqslant 0.$$

Проведем доказательство для случая $n=3$:

$$\frac{x^p+y^p+z^p}{3}\geqslant\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^p. \tag{1}$$

Пусть (x, y, z) — произвольно взятая точка первого октанта ($0\leqslant x$, $0\leqslant y$, $0\leqslant z$). Обозначим через C значение суммы $x+y+z$ (очевидно, что $C\geqslant 0$); тогда подлежащее доказательству неравенство перепишется так

$$\frac{x^p+y^p+z^p}{3}\geqslant\left(\frac{C}{3}\right)^p. \tag{2}$$



Черт. 143.

Эту задачу можно толковать следующим образом: доказать, что функция

$$f=\frac{x^p+y^p+z^p}{3}$$ на плоскости $x+y+z=C$ (где $C\geqslant 0$)

в первом октанте ($x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$) имеет наименьшее значение, не меньшее $\left(\frac{C}{3}\right)^p$. Так как через каждую точку пространства проходит плоскость (единственная) $x+y+z=C$, то, доказав справедливость неравенства (2) при любом $C\geqslant 0$, мы тем самым докажем справедливость (1) во всем первом октанте. Ищем экстремум функции

$$f=\frac{x^p+y^p+z^p}{3}$$ на плоскости $x+y+z=C$.

Из системы уравнений

$$\frac{p}{3}x^{p-1}-\lambda=0,\quad\frac{p}{3}y^{p-1}-\lambda=0,\quad\frac{p}{3}z^{p-1}-\lambda=0$$

найдем единственную условно стационарную точку

$$x=y=z=\frac{C}{3},\quad\lambda=\frac{pC^{p-1}}{3^p}.$$

В этой точке $$f\left(\frac{C}{3},\frac{C}{3},\frac{C}{3}\right)=\left(\frac{C}{3}\right)^p.$$

Первый октант высекает на плоскости $x+y+z=C$ (где $C\geqslant 0$) равносторонний треугольник (D), найденная условно стационарная точка есть центр этого треугольника (черт. 143). Экстремум возможен на границе (D), поэтому надо исследовать функцию f на каждой из сторон (D). На стороне D_z, лежащей в плоскости $z=0$, имеем:

$$f(x, y, 0)=\frac{x^p+y^p}{3},\quad\text{где } x+y=C.$$

Отыскиваем условно стационарные точки функции $f(x, y, 0)$ на линии $x + y = C$; получим:

$$x = y = \frac{C}{2} \quad \text{и} \quad f\left(\frac{C}{2}, \frac{C}{2}, 0\right) = \frac{C^p}{3 \cdot 2^{p-1}}.$$

Аналогично, на каждой из прочих двух сторон треугольника существует условно стационарная точка с тем же значением функции. Наконец, следует принять во внимание значения функции f в вершинах (D):

$$f(C, 0, 0) = f(0, C, 0) = f(0, 0, C) = \frac{C^p}{3}.$$

Из значений $\frac{C^p}{3^p}$, $\frac{C^p}{3 \cdot 2^{p-1}}$, $\frac{C^p}{3}$ наименьшим является первое; следовательно, $\min f = \frac{C^p}{3^p}$ на треугольнике (D), ч. т. д.

В общем случае для любого n доказательство аналогичное.

ГЛАВА V

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

§ 44. Понятие ряда, сходящиеся и расходящиеся ряды

Всякой последовательности чисел

$$u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n,\ \ldots \qquad \{u_n\}$$

можно поставить в соответствие другую последовательность чисел:

$$s_1 = u_1,\ s_2 = u_1 + u_2,\ \ldots,\ s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n,\ \ldots, \qquad \{s_n\}$$

n-й член которой равен сумме n первых членов данной последовательности $\{u_n\}$.

Заданием последовательности $\{u_n\}$ *определяется выражение*

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots, \qquad (u)$$

называемое рядом; обратно, заданием выражения (u) *определяется последовательность чисел* $\{u_n\}$. Числа последовательности $\{u_n\}$ называются членами ряда (u), число u_n называется n-м членом ряда. Число s_n называется n-й частной суммой ряда (u), последовательность $\{s_n\}$ называется последовательностью частных сумм данного ряда.

Таким образом, заданием ряда (u) *определяется последовательность* $\{s_n\}$ *его частных сумм.*

Теорема. *Всякой последовательности* $s_1,\ s_2,\ \ldots,\ s_n,\ \ldots$ *соответствует единственный ряд, частные суммы которого равны соответственным членам данной последовательности.*

Доказательство. Из условий

$$s_1 = u_1,\quad s_2 = u_1 + u_2,\quad s_3 = u_1 + u_2 + u_3,\ \ldots,$$
$$s_{n-1} = u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1},\quad s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1} + u_n,\ \ldots$$

найдем

$$u_1 = s_1,\ u_2 = s_2 - s_1,\ u_3 = s_3 - s_2,\ \ldots,\ u_n = s_n - s_{n-1},\ \ldots$$

Ряд

$$s_1 + (s_2 - s_1) + (s_3 - s_2) + \ldots + (s_n - s_{n-1}) + \ldots$$

имеет n-ю частную сумму, равную s_n:

$$s_1 + (s_2 - s_1) + \ldots + (s_n - s_{n-1}) = s_n,\ \text{ч. т. д.}$$

Таким образом, *задание ряда (и) можно рассматривать как способ задания последовательности* $\{s_n\}$, при этом всякая последовательность может быть представлена как последовательность частных сумм некоторого ряда.

Так, например, последовательности чисел

$$u_1 = 1, \quad u_2 = \frac{1}{2}, \quad u_3 = \frac{1}{3}, \ \ldots, \ u_n = \frac{1}{n}, \ \ldots$$

соответствует ряд, называемый гармоническим:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ \ldots \ + \frac{1}{n} + \ \ldots .$$

Этим рядом задается последовательность его частных сумм:

$$s_1 = 1, \ s_2 = 1 + \frac{1}{2}, \ \ldots, \ s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ \ldots \ + \frac{1}{n}.$$

Пусть, например, дана последовательность десятичных приближенных значений числа $\sqrt{2}$:

$$s_1 = 1, \quad s_2 = 1{,}4, \quad s_3 = 1{,}41, \ \ldots, \ s_n = 1{,}41 \ \ldots \ p_n$$

(p_n — n-й десятичный знак).

Эту последовательность можно представить в виде следующего ряда:

$$s_1 + (s_2 - s_1) + \ \ldots \ + (s_n - s_{n-1}) + \ \ldots =$$
$$= 1 + \frac{4}{10} + \frac{1}{100} + \frac{4}{1000} + \ \ldots \ + \frac{p_n}{10^n} + \ \ldots .$$

Член u_n, рассматриваемый как функция индекса n, называется общим членом данного ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$. В частных случаях общий член может быть функцией, заданной формулой; зная формулу общего члена $u_n = f(n)$, можно вычислить значение любого данного члена ряда; сам ряд может быть записан так:

$$f(1) + f(2) + f(3) + \ \ldots \ + f(n) + \ \ldots$$

Примеры.

1. $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ \ldots \ + \frac{1}{n^2} + \ \ldots$ — ряд с общим членом $u_n = \frac{1}{n^2}$.
2. $\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ \ldots \ + \frac{1}{n!} + \ \ldots$ — ряд с общим членом $u_n = \frac{1}{n!}$.
3. $1 + q + q^2 + \ \ldots \ + q^n + \ \ldots$ — ряд с общим членом $u_n = q^n$.
4. Ряд с общим членом $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ запишется так:

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ \ldots \ + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \ \ldots$$

5. Ряд, в котором члены четного номера равны -1 и нечетного $+1$ т. е. ряд

$$1-1+1-1+1-1+\ldots,$$

имеет общий член $u_n=(-1)^{n-1}$.

Определение. 1° *Ряд*

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots \qquad (u)$$

называется сходящимся, если последовательность частных сумм $s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$ *сходится;*

2° *ряд называется расходящимся, если последовательность частных сумм расходится.*

Следовательно, для всякого сходящегося ряда существует конечный предел последовательности его частных сумм:

$$\lim s_n=s.$$

Определение. *Суммой сходящегося ряда называется предел последовательности его частных сумм.*

Сумму сходящегося ряда принято обозначать тем же символом, как и сам данный ряд:

$$s=u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots \text{ или } s=\sum_{n=1}^{+\infty}u_n.$$

Расходящемуся ряду в качестве его суммы не будем приписывать никакого числа.

Если последовательность $\{s_n\}$ *частных сумм расходится к* $+\infty$ (*или к* $-\infty$):

$$\lim s_n=+\infty \quad (\text{или } -\infty),$$

то данный ряд называется расходящимся к $+\infty$ (*или к* $-\infty$).

Условимся сумму ряда, расходящегося к $+\infty$ (или к $-\infty$), считать равной $+\infty$ (или $-\infty$):

$$\sum_{n=1}^{+\infty}u_n=+\infty \quad (\text{или } -\infty).$$

Если последовательность частных сумм не имеет ни конечного, ни бесконечного предела, то ряд называется колеблющимся.

Определение. *n-м остаточным членом сходящегося ряда называется разность между его суммой и n-й частной суммой:*

$$R_n=s-s_n.$$

В силу этого определения имеем:

$$s=s_n+R_n=u_1+u_2+\ldots+u_n+R_n.$$

Следствие. *Последовательность остаточных членов сходящегося ряда сходится к нулю.* В самом деле,

$$\lim R_n = \lim (s - s_n) = s - \lim s_n = 0.$$

Теорема. *Остаточный член R_n равен сумме ряда*

$$R_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+k} + \ldots$$

Доказательство. В самом деле, вычислим (при данном значении n) сумму ряда $u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+k} + \ldots$; имеем (в силу определения суммы ряда)

$$\lim_{k \to +\infty} (u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+k}) = \lim (s_{n+k} - s_n) =$$
$$= \lim s_{n+k} - s_n = s - s_n = R_n,$$

откуда

$$R_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+k} + \ldots, \text{ ч. т. д.}$$

Применительно к расходящимся рядам понятие остаточного члена не имеет смысла.

Сумма сходящегося ряда может быть вычислена с любой степенью точности при помощи частных сумм ряда. Так как (по определению) $\lim s_n = s$, то при всех достаточно больших значениях n сумма n первых членов ряда будет отличаться (по абсолютной величине) от его суммы меньше, чем на произвольно заданное положительное число ε.

Теорема (необходимое условие сходимости ряда). *Если ряд* $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ *сходится, то последовательность его членов сходится к нулю:*

$$\lim u_n = 0.$$

Иными словами, *для сходимости ряда необходимо, чтобы предел его общего члена был равен нулю.*

Доказательство. Имеем: $u_n = s_n - s_{n-1}$, откуда

$$\lim u_n = \lim (s_n - s_{n-1}) = \lim s_n - \lim s_{n-1} = s - s = 0, \text{ ч. т. д.}$$

Доказанное условие не является достаточным: если $\lim u_n = 0$, то отсюда не следует, что ряд $\sum u_n$ сходится. Примером может служить гармонический ряд: $\lim \frac{1}{n} = 0$, тогда как ряд $\sum \frac{1}{n}$ расходится к $+\infty$. В самом деле, как известно (том I, § 20),

$$\lim s_n = \lim \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right) = +\infty.$$

Следствие. Если предел $\lim u_n$ отличен от нуля либо не существует, то ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ расходится.

Определение. *Всякая сумма*

$$s_{n,m} = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+m}$$

называется отрезком ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

Отрезок $s_{n,m}$ равен разности частных сумм

$$s_{n,m} = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+m} = s_{n+m} - s_n.$$

Для всякого сходящегося ряда отрезок $s_{n,m}$, содержащий данное число m членов, имеет предел, равный нулю:

$$\lim_{n\to+\infty} s_{n,m} = \lim s_{n+m} - \lim s_n = s - s = 0 \quad (m \text{ — данное число}).$$

Примеры. 1. Рассмотрим геометрическую прогрессию:

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} + \ldots;$$

имеем:

$$s_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Возможны следующие случаи:

a) $|q| < 1$, тогда

$$\lim s = \lim \frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{1}{1 - q};$$

прогрессия сходится и имеет сумму $\frac{1}{1-q}$.

Для остаточного члена R_n имеем:

$$R_n = \frac{1}{1-q} - \frac{1-q^n}{q-1} = \frac{q^n}{q-1}.$$

b) $|q| > 1$, тогда $\lim |s_n| = \lim \left| \frac{q^n - 1}{q - 1} \right| = +\infty$.

Ряд расходится. При этом, если $q > 0$, то $\lim s_n = +\infty$, т. е. прогрессия расходится к $+\infty$. Если $q < 0$, то прогрессия является колеблющимся рядом.

c) $q = 1$; имеем: $s_n = n$ и $\lim s_n = +\infty$. Ряд расходится к $+\infty$.

d) при $q = -1$ получим:

$$1 - 1 + 1 - 1 + \ldots + (-1)^{n-1} + \ldots.$$

Этот ряд расходится, так как последовательность его частных сумм:

$$s_n = \begin{cases} 0 & (\text{если } n \text{ — четное число}), \\ 1 & (\text{если } n \text{ — нечетное число}) \end{cases}$$

не имеет предела.

Итак, бесконечная геометрическая прогрессия сходится, если ее знаменатель по абсолютной величине меньше 1, и расходится во всех остальных случаях.

2. Для ряда

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots$$

имеем:

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)} = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

и

$$s_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1},$$

откуда $\lim s_n=1$; следовательно, ряд сходится к 1:

$$R_n=s-s_n=\frac{1}{n+1}=\frac{1}{(n+1)(n+2)}+$$
$$+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\ldots+\frac{1}{(n+k)(n+k+1)}+\ldots$$

3. Ряд

$$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{(n-1)!}+\ldots$$

сходится.

В самом деле (том I, § 28),

$$|e-s_{n+1}|=\left|e-\left(2+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}\right)\right|<\frac{1}{n!n}.$$

Значит,

$$\lim s_n=e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{(n-1)!}+\ldots$$

4. Ряд

$$\sin\alpha+\sin 2\alpha+\ldots+\sin n\alpha+\ldots \quad (\text{где } \alpha\neq k\pi)$$

является колеблющимся.

В самом деле,

$$s_n=\sin\alpha+\sin 2\alpha+\ldots+\sin n\alpha=\frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\left[2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\alpha+2\sin\frac{\alpha}{2}\sin 2\alpha+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+2\sin\frac{\alpha}{2}\sin n\alpha\right]=\frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\left[\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{3}{2}\alpha\right)+\left(\cos\frac{3}{2}\alpha-\cos\frac{5}{2}\alpha\right)+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\left(\cos\frac{2n-1}{2}\alpha-\cos\frac{2n+1}{2}\alpha\right)\right]=\frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\left[\cos\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{2n+1}{2}\alpha\right].$$

Следовательно, s_n не имеет ни конечного, ни бесконечного предела.

5. Каждый из нижеследующих рядов расходится, так как ни для которого из них не выполнено необходимое условие сходимости $\lim u_n=0$:

$$1-1+1-1+1-\ldots+(-1)^{n-1}+\ldots;\ \frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{3}{4}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}n}{n+1}+\ldots;$$
$$1-2+3-\ldots+(-1)^{n-1}n+\ldots$$

6. Если $\{u_n\}$ есть возрастающая последовательность положительных чисел, то расходящийся ряд

$$u_1-u_2+u_3-\ldots+(-1)^{n-1}u_n+\ldots$$

является колеблющимся.

В самом деле, частные суммы с нечетным индексом положительны:

$$s_{2n+1}=u_1+(u_3-u_2)+(u_5-u_4)+\ldots+(u_{2n+1}-u_{2n})>0,$$

а частные суммы с четными индексами отрицательны:

$$s_{2n}=(u_1-u_2)+(u_3-u_4)+\ldots+(u_{2n-1}-u_{2n})<0,$$

поэтому $\{s_n\}$ не имеет ни конечного, ни бесконечного предела. Примером может служить ряд:

$$1-2+3-4+\ \ldots\ +(-1)^{n-1}n+\ \ldots.$$

7. Доказать, что ряд

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\ \ldots\ +\frac{1}{n(n+1)(n+2)}+\ \ldots$$

сходится, и вычислить его сумму.

Разложив общий член в сумму элементарных дробей, получим:

$$u_n=\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1}+\frac{C}{n+2}=\frac{1}{2n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2(n+2)}.$$

Полагая последовательно $n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n$ и складывая, получим (после сокращения):

$$s_n=\frac{1}{4}-\frac{1}{2(n+1)}+\frac{1}{2(n+2)},\quad \text{откуда}\quad s=\lim s_n=\frac{1}{4}.$$

§ 45. Критерий Коши

Критерий Коши выражает общее необходимое и достаточное условие существования конечного предела функции (том I, § 30); применительно к рядам критерий Коши формулируется следующим образом:

Для сходимости ряда $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$ *необходимо и достаточно, чтобы неравенство*

$$|u_{n+1}+u_{n+2}+\ \ldots\ +u_{n+m}|<\varepsilon$$

выполнялось при любом значении n, *большем некоторого числа* N (*определяемого заданием* ε), *и при произвольном натуральном* m.

Иными словами, для сходимости ряда необходимо и достаточно, чтобы неравенство

$$|s_{n,\,m}|<\varepsilon$$

выполнялось для любого отрезка ряда, содержащего члены, индексы которых больше числа N (определяемого заданием ε).

В самом деле, для сходимости последовательности $\{s_n\}$ частных сумм необходимо и достаточно, чтобы неравенство

$$|s_p-s_q|<\varepsilon$$

выполнялось для любых значений p и q, больших N; это и означает, что любой отрезок ряда, содержащий члены с индексами, большими N, по абсолютной величине должен быть меньшим ε.

Примеры *.

1. Доказать, что при $p > 1$ ряд

$$\frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \ldots + \frac{1}{n^p} + \ldots$$

сходится.

Положим $f(x) = \frac{1}{x^{p-1}}$ и применим к разности $f(n-1) - f(n)$ формулу Лагранжа:

$f(n-1) - f(n) = -f'(n-\theta)$, т. е. $\frac{1}{(n-1)^{p-1}} - \frac{1}{n^{p-1}} = \frac{p-1}{(n-\theta)^p}$,

откуда получим неравенство

$$\frac{1}{n^p} < \frac{1}{p-1}\left(\frac{1}{(n-1)^{p-1}} - \frac{1}{n^{p-1}}\right).$$

Заменяя в этом неравенстве n на $n+1$, $n+2$, ..., $n+m$ и суммируя, получим:

$$\frac{1}{(n+1)^p} + \frac{1}{(n+2)^p} + \ldots + \frac{1}{(n+m)^p} < \frac{1}{p-1}\left[\left(\frac{1}{n^{p-1}} - \frac{1}{(n+1)^{p-1}}\right) + \left(\frac{1}{(n+1)^{p-1}} - \frac{1}{(n+2)^{p-1}}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{(n+m-1)^{p-1}} - \frac{1}{(n+m)^{p-1}}\right)\right] < \frac{1}{(p-1)\,n^{p-1}}.$$

Следовательно, для любого отрезка ряда будет выполняться неравенство:

$$|s_{n,m}| < \varepsilon, \quad \text{если} \quad \frac{1}{(p-1)\,n^{p-1}} < \varepsilon, \text{ т. е. если } n > \left(\frac{1}{(p-1)\,\varepsilon}\right)^{\frac{1}{p-1}},$$

при любом натуральном m. Итак, критерий Коши выполняется, следовательно, ряд сходится.

В частности, сходится каждый из следующих рядов:

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots; \quad \frac{1}{1\sqrt{1}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{n\sqrt{n}} + \ldots;$$

$$\frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{n^3} + \ldots \text{ и т. п.}$$

2. Пусть

$$d_1 + d_2 + \ldots + d_n + \ldots$$

— ряд с положительными членами, $d_n > 0$, расходящийся к $+\infty$, а s_n — его частная сумма. Докажем, что ряд

$$\frac{d_1}{s_1} + \frac{d_2}{s_2} + \ldots + \frac{d_n}{s_n} + \ldots$$

---

* Простейшие примеры, см. том I, § 30.

расходится. Рассмотрим какой-либо отрезок этого ряда:

$$\frac{d_{n+1}}{s_{n+1}}+\frac{d_{n+2}}{s_{n+2}}+\ldots+\frac{d_{n+m}}{s_{n+m}}>\frac{d_{n+1}+d_{n+2}+\ldots+d_{n+m}}{s_{n+m}}=$$

$$=\frac{s_{n+m}-s_n}{s_{n+m}}=1-\frac{s_n}{s_{n+m}}.$$

Каким бы большим ни было взято число n, имеем $\lim\limits_{m\to+\infty}\left(1-\frac{s_n}{s_{n+m}}\right)=1$, а потому критерий Коши не выполняется и, значит, исследуемый ряд расходится.

Так, в частности, из расходимости ряда $1+1+\ldots+1+\ldots$ следует расходимость гармонического ряда

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots.$$

§ 46. Основные теоремы о рядах

При сопоставлении двух рядов

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots \qquad (u)$$

и

$$v_1+v_2+\ldots+v_n+\ldots \qquad (v)$$

для краткости будем говорить, что оба данные ряда имеют один и тот же характер, если либо оба эти ряда имеют конечную сумму (сходятся), либо оба ряда имеют бесконечную сумму (расходятся к $\pm\infty$), либо оба ряда являются колеблющимися. При рассмотрении двух различных рядов (u) и (v) их n-е частные суммы будем обозначать (соответственно) так: $s(u_n)$ и $s(v_n)$.

Теорема. *Если в ряде*

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots \qquad (u)$$

опустить некоторое число k его первых членов, то получится ряд

$$u_{k+1}+u_{k+2}+\ldots+u_{k+n}+\ldots \qquad (u')$$

того же характера, как и данный ряд.

Доказательство. В самом деле,

$$u_{k+1}+u_{k+2}+\ldots+u_{k+n}=s_{k+n}-s_k.$$

Следовательно, пределы $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{k+1}+u_{k+2}+\ldots+u_{k+n})$ и $\lim\limits_{n\to+\infty}s_{k+n}$ либо оба конечны, либо оба бесконечны, либо ни который из них не существует. Значит, (u) и (u') суть ряды одинакового характера, ч. т. д.

Если ряд (u) сходится, то сумма ряда (u') есть k-й остаточный член ряда (u):

$$u_{k+1}+u_{k+2}+\ldots+u_{k+n}+\ldots=R_k.$$

Следствие. *Два ряда*

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots \qquad (u)$$

и

$$v_1+v_2+\ldots+v_n+\ldots, \qquad (v)$$

отличающихся лишь значениями конечного числа членов, имеют одинаковый характер. В самом деле, если при всех достаточно больших значениях n имеет место равенство $u_n=v_n$, то оба данные ряда имеют тот же характер, что ряд

$$u_n+u_{n+1}+\ldots+u_{n+m}+\ldots.$$

Из сказанного вытекает, что при исследовании характера ряда допустимо изменять, отбрасывать либо добавлять вновь любое конечное число членов.

Теорема. *Если число k отлично от нуля, то ряды*

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots \qquad (u)$$

и

$$ku_1+ku_2+\ldots+ku_n+\ldots \qquad (ku)$$

имеют один и тот же характер.

Доказательство. Частные суммы $s(u_n)$ и $s(ku_n)$ рядов (u) и (ku) связаны соотношением:

$$s(ku_n)=ks(u_n).$$

Следовательно, пределы частных сумм либо оба конечны, либо оба бесконечны, либо ни который из них не существует. Итак, характер ряда не меняется от умножения его членов на один и тот же множитель, отличный от нуля, ч. т. д.

Если ряд (u) сходится, то

$$\lim s(ku_n)=k\lim s(u_n)$$

и, следовательно, сумма ряда (ku) равна ks:

$$ku_1+ku_2+\ldots+ku_n+\ldots=k(u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots),$$

где k — любое число. Это равенство выражает свойство дистрибутивности сходящихся рядов.

Пусть

$$k_1<k_2<k_3<\ldots<k_n<\ldots \qquad \{k_n\}$$

— любая возрастающая последовательность натуральных чисел. Ряд, образованный из данного ряда (u) при помощи следующей группировки членов

$$(u_1+u_2+\ldots+u_{k_1})+(u_{k_1+1}+\ldots+u_{k_2})+\ldots+$$
$$+(u_{k_n+1}+\ldots+u_{k_{n+1}})+\ldots,$$

называется сгруппированным рядом. Сгруппированный ряд определяется заданием последовательности $\{k_n\}$; для различных последовательностей $\{k_n\}$ получаются различные сгруппированные ряды. Членами сгруппированного ряда являются отрезки данного ряда. Последовательность частных сумм сгруппированного ряда образует подпоследовательность (часть)

$$s_{k_1},\ s_{k_2},\ \ldots,\ s_{k_n},\ \ldots \qquad \{s_{k_n}\}$$

последовательности всех частных сумм данного ряда.

Теорема. *Если ряд (и) имеет конечную или бесконечную сумму, то ту же сумму имеет любой сгруппированный ряд.*

Доказательство. В самом деле, если последовательность $\{s_n\}$ частных сумм ряда (*и*) имеет конечный или бесконечный предел, то тот же предел имеет любая ее подпоследовательность

$$\lim_{n\to+\infty} s_{k_n} = \lim s_n, \text{ ч. т. д.}$$

Обратное утверждение не имеет места; в самом деле, из существования предела $\lim s_n$ на множестве $\{k_n\}$ не следует существование предела на множестве всех натуральных чисел, поэтому сгруппированный ряд может быть сходящимся (или расходящимся к $\pm\infty$), а данный ряд — колеблющимся.

Для сходящихся рядов равенство

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots=(u_1+u_2+\ldots+u_{k_1})+\ldots+$$
$$+(u_{k_1+1}+\ldots+u_{k_{n+1}})+\ldots$$

можно рассматривать как обобщение закона ассоциативности сложения.

Пример.

Нижеследующая группировка членов расходящегося ряда $1-1+1-1+\ldots$ дает ряд, сходящийся к нулю:

$$(1-1)+(1-1)+\ldots+(1-1)+\ldots=0+0\ldots=0.$$

Другой способ группировки дает ряд, сходящийся к 1:

$$1+(-1+1)+(-1+1)+\ldots=1+0+0+\ldots=1.$$

§ 47. Знакопостоянные ряды

Определение. *Знакопостоянным рядом называется ряд, все члены которого, кроме, быть может, конечного их множества, суть числа одного и того же знака (либо положительные, либо отрицательные).*

Для изучения характера знакопостоянных рядов достаточно (без ущерба для общности) ограничиться рассмотрением рядов с положительными членами. В самом деле, не меняя характера ряда,

можно опустить любое конечное множество его членов, а оставшиеся члены, если они окажутся отрицательными, умножить на -1 и получить знакоположительный ряд.

Из соотношений $s_{n+1}=s_n+u_{n+1}$ и $u_{n+1}>0$ следует, что $s_n<s_{n+1}$, т. е. что *частные суммы знакоположительного ряда образуют возрастающую последовательность.*

Теорема. *Всякий знакоположительный ряд либо сходится, либо расходится к* $+\infty$.

Доказательство. Последовательность частных сумм $\{s_n\}$ знакоположительного ряда, будучи возрастающей, имеет либо конечный предел, либо бесконечный предел, равный $+\infty$, ч. т. д.

Из доказанного следует, что знакопостоянный ряд не может быть колеблющимся.

Теорема. *Для сходимости знакопостоянного ряда необходимо и достаточно, чтобы последовательность его частных сумм была ограниченной.*

Доказательство. Монотонная последовательность частных сумм $\{s_n\}$ имеет конечный предел (ряд сходится) в том и только в том случае, если она ограничена, ч. т. д.

Для произвольного (не знакопостоянного) ряда ограниченность частных сумм есть необходимое, но не достаточное условие сходимости. Для рядов, не являющихся знакопостоянными, последовательность частных сумм может быть ограниченной, но $\lim s_n$ может не существовать. Примером расходящегося ряда с ограниченными частными суммами может служить ряд:

$$1-1+1-1+\ldots+(-1)^{n-1}+\ldots.$$

Теорема (о сравнении рядов).

1°. *Если ряд с положительными членами*

$$c_1+c_2+\ldots+c_n+\ldots \qquad (c)$$

сходится и если при всех значениях n имеет место неравенство

$$0\leqslant u_n\leqslant c_n,$$

то ряд

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots \qquad (u)$$

сходится и $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n\leqslant\sum\limits_{n=1}^{+\infty}c_n$.

2°. *Если знакоположительный ряд*

$$d_1+d_2+\ldots+d_n+\ldots \qquad (d)$$

расходится и если при всех значениях n имеет место неравенство

$$d_n\leqslant u_n,$$

то ряд (u) расходится к $+\infty$.

Доказательство. 1°. При соблюдении неравенств $u_n \leqslant c_n$ для любых n-х частных сумм данных рядов имеем также:

$$s(u_n) \leqslant s(c_n).$$

Так как

$$s(c_n) < \lim s(c_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n,$$

то и подавно при любом n имеем:

$$s(u_n) < \sum_{n=1}^{+\infty} c_n < +\infty.$$

Следовательно, частные суммы ряда (u) ограничены, а потому этот ряд сходится. Из последнего неравенства получим:

$$\lim s(u_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} c_n.$$

2°. Если $d_n \leqslant u_n$, то $s(d_n) \leqslant s(u_n)$. Так как $\lim s(d_n) = +\infty$, то имеем и подавно $\lim s(u_n) = +\infty$, т. е. ряд (u) расходится к $+\infty$, ч. т. д.

Примечание. Теорема остается в силе, если неравенство $u_n \leqslant c_n$ (или $d_n \leqslant u_n$) имеет место при всех достаточно больших значениях n. В самом деле, если это неравенство не выполняется для конечного множества членов, то, отбросив в рядах (u) и (c) достаточно большое количество первых членов, мы получим ряды того же характера, что и данные, и удовлетворяющие условиям теоремы.

Следствие I. *Если отношение общего члена знакоположительного ряда* $\sum u_n$ *к общему члену сходящегося знакоположительного ряда* $\sum c_n$ *ограничено*:

$$\frac{u_n}{c_n} < M,$$

то ряд (u) *сходится.*

В самом деле, из неравенства $u_n < Mc_n$ следует, что члены ряда (u) меньше соответствующих членов сходящегося ряда $\sum Mc_n$.

В частности, *если существует конечный предел* $\lim \frac{u_n}{c_n}$, *то отношение* $\frac{u_n}{c_n}$ *ограничено, а потому ряд* (u) *сходится.*

Следствие II. *Если отношение общего члена знакоположительного ряда* (u) *к общему члену расходящегося ряда* $\sum d_n$ *удовлетворяет неравенству* $\frac{u_n}{d_n} > k$, *где* k*—некоторое положительное число, то ряд* (u) *расходится.*

В самом деле, из неравенства $u_n > kd_n$ следует, что члены ряда (u) больше соответствующих членов расходящегося ряда $\sum kd_n$.

В частности, *если существует конечный или бесконечный отличный от нуля предел* $\lim \frac{u_n}{d_n} = l$, *то неравенство* $\frac{u_n}{d_n} > l - \varepsilon > 0$* *выполняется при всех достаточно больших значениях* n, *а потому ряд* (u) *расходится.*

Для рядов с положительными членами предел последовательности частных сумм (конечный или равный $+\infty$) всегда существует, поэтому тот же предел имеют частные суммы любого сгруппированного ряда. Значит, *для установления характера знакоположительного ряда достаточно рассмотреть один какой-либо* (составленный специальным способом) *из сгруппированных рядов.*

Примеры.

1. Ряд

$$1 + \frac{1}{1 \cdot 1!} + \frac{1}{2 \cdot 2!} + \ldots + \frac{1}{n \cdot n!} + \ldots$$

сходится, так как $\frac{1}{n \cdot n!} < \frac{1}{n!}$ и ряд

$$1 + 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots = e \text{ сходится.}$$

2. Ряд $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2n+1} + \ldots$ расходится, так как

$$\frac{1}{2n+1} > \frac{1}{2(n-1)} \text{ и ряд } \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2(n-1)} + \frac{1}{2n} + \ldots$$

расходится.

3. Ряд с общим членом $u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ сходится, так как, положив $c_n = \frac{1}{n^3}$, получим $\lim \frac{u_n}{c_n} = 1 < +\infty$ и ряд $\sum \frac{1}{n^3}$ сходится.

4. Ряд $\sin 1 + \sin \frac{1}{2} + \ldots + \sin \frac{1}{n} + \ldots$ расходится; в самом деле, предел отношения общего члена $u_n = \sin \frac{1}{n}$ к общему члену гармонического ряда $d_n = \frac{1}{n}$ равен 1 (> 0).

5. Если $0 < q < 1$, то ряд $1 + q + 2q^2 + \ldots + nq^n + \ldots$ сходится, так как

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{nq^n}{\frac{1}{n^2}} = \lim n^3 q^n = 0 \ (< +\infty) \text{ и ряд } \sum \frac{1}{n^2} \text{ сходится.}$$

---

* При $l = +\infty$ эти неравенства следует заменить на $\frac{u_n}{d_n} > N > 0$.

6. Ряд $\frac{1}{(\ln 2)^p}+\frac{1}{(\ln 3)^p}+\ldots+\frac{1}{(\ln n)^p}+\ldots$ (где $p>0$) расходится, так как отношение его общего члена $\frac{1}{(\ln n)^p}$ к общему члену гармонического ряда $\frac{n}{(\ln n)^p}$ имеет предел, равный $+\infty$ ($\neq 0$).

7. Доказать, что если последовательность $\{u_n\}$ членов знакоположительного ряда $\sum u_n$ является невозрастающей, то данный ряд и ряд $\sum 2^n u_{2^n}$ имеют одинаковый характер.

Так как данный ряд знакоположителен, то достаточно установить характер какого-либо сгруппированного ряда. Образуем сгруппированный ряд:

$$u_1+(u_2+u_3)+(u_4+\ldots+u_7)+(u_8+\ldots+u_{15})+\ldots.$$

Из условия $u_n \geqslant u_{n+1}$ ясно, что члены сгруппированного ряда не больше членов ряда

$$u_1+2u_2+4u_4+\ldots+2^n u_{2^n}+\ldots.$$

Если этот ряд сходится, то сходится и данный ряд.

Образуем сгруппированный ряд

$$(u_1+u_2)+(u_3+u_4)+(u_5+\ldots+u_8)+(u_9+\ldots+u_{16})+\ldots,$$

члены которого не меньше членов ряда

$$2u_2+2u_4+4u_8+\ldots+2^{n-1}u_{2^n}+\ldots.$$

Этот ряд (а вместе с ним и данный) расходится, если расходится ряд

$$u_1+2u_2+4u_4+\ldots+2^n u_{2^n}+\ldots, \text{ ч. т. д.}$$

Рассмотрим, например, ряд

$$\frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+\ldots+\frac{1}{n^p}+\ldots \text{ (где } p>0).$$

Ряд с общим членом

$$2^n u_{2^n}=\frac{2^n}{2^{np}}=\frac{1}{2^{(p-1)n}}$$

есть геометрическая прогрессия со знаменателем $\frac{1}{2^{p-1}}$, сходящаяся при $p>1$ и расходящаяся при $0<p\leqslant 1$. Следовательно, и данный ряд сходится при $p>1$ и расходится при $p\leqslant 1$.

Рассмотрим ряд

$$\frac{1}{2(\ln 2)^p}+\frac{1}{3(\ln 3)^p}+\ldots+\frac{1}{n(\ln n)^p}+\ldots.$$

Ряд с общим членом

$$2^n\cdot\frac{1}{2^n(\ln 2^n)^p}=\frac{1}{(\ln 2)^p n^p}$$

сходится при $p>1$ и расходится при $p\leqslant 1$. Следовательно, данный ряд сходится при $p>1$ и расходится при $p\leqslant 1$.

§ 48. Признаки сходимости и расходимости знакопостоянных рядов

Признаками сходимости (расходимости) рядов обычно называются достаточные условия, налагаемые на члены ряда, выполнение которых влечет сходимость (или расходимость) этого ряда. Таким образом, признаки сходимости и расходимости позволяют (при условии их выполнения) судить по членам ряда о его характере. Большинство наиболее распространенных признаков основано на теореме о сравнении рядов, именно исследуемый ряд сопоставляется с рядами, характер которых уже установлен.

В настоящем параграфе будут рассматриваться признаки сходимости лишь для рядов с положительными членами.

Теорема. 1°. *Если при всех значениях n имеет место неравенство*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{c_{n+1}}{c_n} \tag{1}$$

и ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_n$ *сходится, то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ *сходится.*

2°. *Если при всех значениях n имеет место неравенство*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant \frac{d_{n+1}}{d_n} \tag{2}$$

и ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} d_n$ *расходится, то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ *расходится.*

Доказательство 1°. При выполнении неравенства (1) имеем:

$$\frac{u_n}{c_n} \geqslant \frac{u_{n+1}}{c_{n+1}},$$

т. е. отношения $\frac{u_n}{c_n}$ образуют невозрастающую последовательность:

$$\frac{u_1}{c_1} \geqslant \frac{u_2}{c_2} \geqslant \ldots \geqslant \frac{u_n}{c_n} \geqslant \ldots.$$

Положив $\frac{u_1}{c_1} = k$, получим неравенство $u_n \leqslant kc_n$.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ сходится, так как его члены не больше соответствующих членов сходящегося ряда с общим членом kc_n.

Доказательство 2°. При выполнении неравенств (2) получим:

$$\frac{u_1}{d_1} \leqslant \frac{u_2}{d_2} \leqslant \ldots \leqslant \frac{u_n}{d_n} \leqslant \ldots,$$

откуда $u_n \geqslant kd_n \left(\text{где } k = \frac{u_1}{d_1}\right)$. Исследуемый ряд расходится, так как его члены не меньше соответствующих членов расходящегося ряда, ч. т. д.

Теорема остается в силе, если неравенство (1) или соответственно (2) выполняется при всех достаточно больших значениях n, так как при установлении характера ряда любое конечное число его первых членов можно не принимать во внимание.

Простейшие признаки сходимости и расходимости получаются, если в качестве ряда сравнения принять геометрическую прогрессию.

Признак Коши.

1°. *Если при всех достаточно больших значениях n имеет место неравенство* $\sqrt[n]{u_n} < k$, *где* $k < 1$, *то ряд* $\sum u_n$ *сходится.*

2°. *Если для бесконечного множества значений n (в частности, для всех n) имеет место неравенство* $\sqrt[n]{u_n} \geqslant 1$, *то ряд* $\sum u_n$ *расходится.*

Доказательство 1°. При выполнении неравенства $\sqrt[n]{u_n} < k < 1$ имеем $u_n < k^n$. Значит, члены исследуемого ряда меньше соответствующих членов сходящейся геометрической прогрессии

$$1 + k + k^2 + \ldots + k^n + \ldots,$$

а потому ряд $\sum u_n$ сходится.

Доказательство 2°. Если для бесконечного множества значений n выполняется неравенство $u_n \geqslant 1$, то не выполняется необходимое условие сходимости $\lim u_n = 0$; следовательно, данный ряд расходится.

Следствие. *Если существует конечный или бесконечный предел* $\lim \sqrt[n]{u_n} = l$, *то ряд* $\sum u_n$ *при* $l < 1$ *сходится, при* $l > 1$ *расходится, при* $l = 1$ *на основании данного признака нельзя сделать никаких заключений о характере ряда* (так называемый сомнительный случай).

В самом деле, если $l < 1$, то при всех достаточно больших значениях n будем иметь $\sqrt[n]{u_n} < l + \varepsilon < 1$ (число ε выбрано при условии $\varepsilon < 1 - l$), а потому ряд сходится.

Если $l > 1$, то при всех достаточно больших значениях n будем иметь $\sqrt[n]{u_n} > 1$, а потому ряд $\sum u_n$ расходится.

Если при всех достаточно больших значениях n имеем $\sqrt[n]{u_n} < 1$, но число 1 есть верхняя грань для последовательности $\sqrt[n]{u_n}$, то нельзя указать числа $k < 1$, удовлетворяющего условию $\sqrt[n]{u_n} < k$, в этом случае признак Коши неприменим. Так, например, для ряда $\frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \ldots + \frac{1}{n^p} + \ldots$ имеем $\lim \sqrt[n]{u_n} = \lim \frac{1}{\left(\sqrt[n]{n}\right)^p} = 1$ при любом $p > 0$. Однако данный ряд может быть как сходящимся (при $p > 1$), так и расходящимся (при $p \leqslant 1$). Члены рассматриваемого

ряда при достаточно большом n больше соответствующих членов геометрической прогрессии с любым данным знаменателем $k < 1$, а потому и не представляется возможным сравнивать данный ряд ни с какой геометрической прогрессией.

Признак Даламбера.

1°. *Если при всех достаточно больших значениях n имеет место неравенство* $\frac{u_{n+1}}{u_n} < k$, *где* $k < 1$, *то ряд* $\sum u_n$ *сходится.*

2°. *Если при всех достаточно больших значениях n имеет место неравенство* $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$, *то ряд* $\sum u_n$ *расходится.*

Доказательство 1°. Неравенство $\frac{u_{n+1}}{u_n} < k$ можно переписать следующим образом: $\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{k^{n+1}}{k^n}$; так как при $k < 1$ прогрессия $\sum k^n$ сходится, то сходится и исследуемый ряд.

Доказательство 2°. Если при достаточно больших n имеем $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$, то $u_n \leqslant u_{n+1}$, члены ряда $\sum u_n$ образуют неубывающую последовательность; но тогда не может быть выполнено необходимое условие сходимости $\lim u_n = 0$, и, следовательно, данный ряд расходится, ч. т. д.

Следствие. *Если существует конечный или бесконечный предел* $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, *то ряд* $\sum u_n$ при $l < 1$ *сходится, при* $l > 1$ *расходится, при* $l = 1$ *имеет место сомнительный случай.*

В самом деле, при достаточно больших значениях n имеет место неравенство $\frac{u_{n+1}}{u_n} < l + \varepsilon < 1$, если $l < 1$; неравенство $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, если $l > 1$. Если $l = 1$, то о характере ряда нельзя сделать никаких заключений. Так, например, для ряда

$$\frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \ldots + \frac{1}{n^p} + \ldots$$

сходящегося, если $p > 1$, и расходящегося, если $p \leqslant 1$, при всех значениях p имеем:

$$l = \lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim \frac{n^p}{(n+1)^p} = 1.$$

Сопоставление признаков сходимости Даламбера и Коши показывает, что признак Коши применим во всех случаях, когда применим признак Даламбера. В самом деле, предположим, что при всех значениях n (или при всех достаточно больших n) имеем:

$$\frac{u_2}{u_1} < k, \quad \frac{u_3}{u_2} < k, \quad \ldots, \quad \frac{u_n}{u_{n-1}} < k, \quad \ldots,$$

где $k < 1$ (применим признак Даламбера). Перемножив почленно n первых неравенств, получим:

$$u_n < u_1 k^n \quad \text{и} \quad \sqrt[n]{u_n} < k \sqrt[n]{u_1}.$$

Так как $\lim \sqrt[n]{u_1} = 1$, то неравенство $\sqrt[n]{u_1} < \frac{k_1}{k}$ будет выполняться при всех достаточно больших n, где k_1 — любое число, взятое при условии $k < k_1 < 1$ $\left(\text{так как } \frac{k_1}{k} > 1\right)$; но тогда $\sqrt[n]{u_n} < k_1 < 1$. Следовательно, применим признак Коши.

Заметим, что если существует предел $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, то имеем также $\lim \sqrt[n]{u_n} = l$ (см. том I, § 57, пример 7).

Если применим признак сходимости Коши, то признак Даламбера применим не всегда.

В самом деле, для ряда

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^{2n-1}} + \frac{1}{3^{2n}} + \ldots$$

$$\sqrt[n]{u_n} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{(если } n \text{ нечетное),} \\ \frac{1}{3} & \text{(если } n \text{ четное).} \end{cases}$$

Следовательно, $\sqrt[n]{u_n} \leqslant \frac{1}{2} < 1$, согласно признаку Коши **ряд сходится.** Признак Даламбера неприменим, так как

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \begin{cases} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n & \text{(если } n \text{ нечетное),} \\ \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^n & \text{(если } n \text{ четное).} \end{cases}$$

При четном n имеем $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = +\infty$, а при нечетном n имеем $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0$.

На практике часто признак Даламбера оказывается более удобным, чем признак Коши.

Примеры.

1. Ряд $\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \ldots + \frac{n}{2^n} + \ldots$ сходится, так как

$$\lim \sqrt[n]{u_n} = \lim \frac{\sqrt[n]{n}}{2} = \frac{1}{2} \lim e^{\frac{1}{n} \ln n} = \frac{1}{2} < 1.$$

2. Ряд $1 + \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)!} + \ldots$ сходится, так как

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim \frac{(2n-1)!}{(2n+1)!} = \lim \frac{1}{2n(2n+1)} = 0 < 1.$$

3. Ряд

$$\frac{2}{1} + \frac{2 \cdot 5}{1 \cdot 5} + \ldots + \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \ldots [2 + 3(n-1)]}{1 \cdot 5 \cdot 9 \ldots [1 + 4(n-1)]} + \ldots$$

сходится, так как $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim \frac{2+3n}{1+4n} = \frac{3}{4} < 1$.

4. Ряд $\sum \frac{n^n}{n!}$ расходится, так как

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim \frac{(n+1)^{n+1} n!}{(n+1)! n^n} = \lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e > 1.$$

Более точным по сравнению с признаками Даламбера является нижеследующий признак, основанный на сравнении исследуемого ряда с рядом

$$\frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \ldots + \frac{1}{n^p} + \ldots.$$

Признак Раабе. *Если при всех достаточно больших значениях n имеет место неравенство*

$$n\left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right) > k,$$

где $k > 1$, то ряд $\sum u_n$ сходится.

Если при всех достаточно больших значениях n:

$$n\left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \leqslant 1,$$

то ряд $\sum u_n$ расходится.

Доказательство 1°. Для ряда $\sum \frac{1}{n^p}$, сходящегося при $p > 1$, имеем:

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{n^p}{(n+1)^p} = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^p = 1 - \frac{pE_1}{n+1} = 1 - \frac{pE}{n},$$

где $E = \frac{n}{n+1} E_1$ и $\lim E_1 = \lim E = 1$ (см. том I, § 56). Из неравенства

$$n\left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right) > k > 1 \quad \text{следует:} \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1 - \frac{k}{n}.$$

Положим $p = k - \varepsilon > 1$; тогда при достаточно больших значениях n будем иметь $k > (k - \varepsilon) E$, откуда

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1 - \frac{k}{n} < 1 - \frac{(k-\varepsilon)E}{n} = 1 - \frac{pE}{n} = \frac{c_{n+1}}{c_n}.$$

Следовательно, ряд $\sum u_n$ сходится.

Доказательство 2°. Если при всех достаточно больших значениях n

$$n\left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \leqslant 1, \quad \text{то} \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant \frac{n-1}{n};$$

но $\frac{n-1}{n}$ есть отношение рядом стоящих членов расходящегося гармонического ряда, а потому ряд $\sum u_n$ расходится, ч. т. д.

Следствие. Если существует конечный или бесконечный предел $\lim n\left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = l$, то ряд $\sum u_n$ при $l > 1$ сходится, при $l < 1$ расходится, при $l = 1$ имеет место сомнительный случай.

Примеры.

1. Доказать, что если применим признак сходимости Даламбера, то применим и признак Раабе. В самом деле, пусть $\frac{u_{n+1}}{u_n} < k < 1$; тогда $n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) > n(1-k)$; но $\lim n(1-k) = +\infty$, значит, и $\lim n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = +\infty > 1$.

2. Рассмотрим ряд

$$\sum \frac{n!}{(a+1)(a+2)\dots(a+n)}, \quad \text{где} \quad a > 0;$$

имеем:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{a+n+1}; \quad \text{так как} \quad \lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1,$$

то признак Даламбера неприменим. Применяя признак Раабе, получим:

$$\lim n\left(1-\frac{n+1}{a+n+1}\right) = \lim \frac{an}{n+1+a} = a.$$

Ряд сходится при $a > 1$, расходится при $a < 1$. При $a = 1$ (сомнительный случай) имеем:

$$n\left(1-\frac{n+1}{n+2}\right) = \frac{n}{n+2} < 1;$$

следовательно, ряд расходится.

Нижеследующий признак основан на сравнении ряда с несобственным интегралом.

Интегральный признак. *Если функция $f(x)$ удовлетворяет следующим условиям:*

1° *не возрастает на полусегменте* $[1, +\infty)$;

2° $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, *то ряд*

$$f(1)+f(2)+\dots+f(n)+\dots \qquad (f)$$

и несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$ *либо оба сходятся, либо оба расходятся к* $+\infty$.

Из условий 1° и 2° следует, что $f(x) \geqslant 0$ на полусегменте $[1, +\infty)$ и что члены ряда (f) образуют невозрастающую сходящуюся к нулю последовательность.

Доказательство. Рассмотрим разбиение сегмента $[1, n]$ точками $1, 2, 3, \dots, n-1, n$. Нижняя и верхняя интегральные суммы функции $f(x)$, составленные при этом разбиении, соответственно суть (черт. 144):

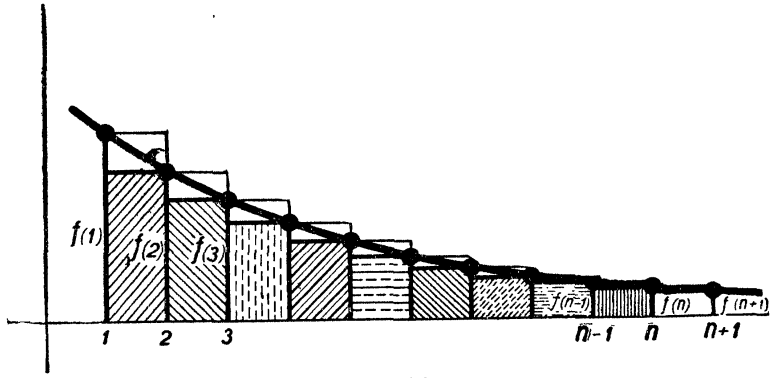
$$\underline{S} = \sum m_i\sigma_i = f(2)+f(3)+\dots+f(n) = \sum_{k=1}^{n} f(k) - f(1);$$

$$\overline{S} = \sum M_i\sigma_i = f(1)+f(2)+\dots+f(n-1) = \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$$

(так как $M_i = f(i-1)$ и $m_i = f(i)$, где $\sigma_i = [i-1, i]$).

Следовательно, неравенства $\underline{S} \leqslant \int_1^n f(x)\,dx \leqslant \bar{S}$ перепишутся так:

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) - f(1) \leqslant \int_1^n f(x)\,dx \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} f(k).$$



Черт. 144.

Если интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится, то из неравенства

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \leqslant \int_1^n f(x)\,dx + f(1) \leqslant \int_1^{+\infty} f(x)\,dx + f(1)$$

следует, что частные суммы ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$ ограничены, а потому этот ряд сходится.

Если интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ расходится к $+\infty$, то $\lim \int_1^n f(x)\,dx = +\infty$, и из неравенства $\int_1^n f(x)\,dx \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$ следует, что частные суммы рассматриваемого ряда неограничены, т. е. что этот ряд расходится к $+\infty$, ч. т. д.

Примеры.

1. Рассмотрим ряд

$$\frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \ldots + \frac{1}{n^p} + \ldots.$$

Члены этого ряда суть значения в точках 1, 2, 3, ..., n убывающей функции $f(x) = \frac{1}{x^p}$. Интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$ сходится при $p > 1$ и расходится к $+\infty$ при $p \leqslant 1$,

следовательно, и рассматриваемый ряд сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leqslant 1$.

2. Ряд

$$\frac{1}{2\ln^p 2} + \frac{1}{3\ln^p 3} + \ldots + \frac{1}{n\ln^p n} + \ldots$$

сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leqslant 1$, так как

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^p x} = \left[\frac{1}{(1-p)\ln^{p-1} x}\right]_2^{+\infty}$$

сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leqslant 1$.

3. Доказать, что если положительная функция $f(x)$ не возрастает на полусегменте $[1, +\infty)$, то существует конечный предел

$$\lim s_n - \int_1^{n+1} f(x)\,dx, \quad \text{где } s_n - n\text{-я частная сумма ряда}$$

$$f(1) + f(2) + \ldots + f(n) + \ldots.$$

В самом деле, представим последовательность

$$s_n - \int_1^{n+1} f(x)\,dx = f(1) + f(2) + \ldots + f(n) - \left[\int_1^2 + \int_2^3 + \ldots + \int_n^{n+1}\right]$$

в виде ряда $\sum_{n=1}^{+\infty}\left[f(n) - \int_n^{n+1} f(x)\,dx\right]$.

Так как

$$f(n) - \int_n^{n+1} f(x)\,dx \leqslant f(n) - f(n+1)\int_n^{n+1} dx = f(n) - f(n+1),$$

то члены рассматриваемого ряда не больше членов сходящегося ряда

$$(f(1) - f(2)) + (f(2) - f(3)) + \ldots + (f(n-1) - f(n)) + \ldots = f(1).$$

Значит, рассматриваемая последовательность сходится к пределу, меньшему, чем $f(1)$.

Геометрическая интерпретация. Из чертежа 144 ясно, что разность $s_n - \int_1^{n+1} f(x)\,dx$ есть избыток площади выходящего ступенчатого многоугольника над площадью криволинейной трапеции с основанием $[1, n+1]$; этот избыток не больше разности между площадью выходящего и входящего ступенчатых многоугольников: $f(1) - f(n+1)$, последняя разность меньше $f(1)$. Последовательность избытков возрастает и ограничена, следовательно, она имеет конечный предел.

Положим $f(x) = \frac{1}{x}$; имеем: $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$ и $\int_1^{n+1} \frac{dx}{x} = \ln(n+1)$,

следовательно,

$$\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)-\ln(n+1)=C+\omega_n \quad (\text{где } \lim \omega_n=0).$$

Число C называется константой Эйлера (см. том I, § 57, пример 3).

§ 49. Абсолютно и условно сходящиеся ряды

Рассмотрим ряд

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots \qquad (u)$$

с произвольными членами.

Теорема. *Если ряд*

$$|u_1|+|u_2|+\ldots+|u_n|+\ldots, \qquad (|u|)$$

составленный из абсолютных величин членов ряда (u), *сходится, то ряд* (u) *также сходится, и имеет место неравенство*

$$\left|\sum u_n\right| \leqslant \sum |u_n|.$$

Доказательство. В силу предположенной сходимости ряда $(|u|)$ при всех достаточно больших значениях $n > N$ и при произвольном натуральном m имеет место неравенство (критерий Коши):

$$|u_{n+1}|+|u_{n+2}|+\ldots+|u_{n+m}|<\varepsilon.$$

Следовательно, и подавно:

$$|u_{n+1}+u_{n+2}+\ldots+u_{n+m}|<\varepsilon.$$

Значит, и для ряда (u) выполняется критерий Коши, а потому этот ряд сходится. Из неравенства

$$\left|\sum_{k=1}^{n} u_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |u_k|,$$

имеющего место для частных сумм рядов (u) и $(|u|)$, следует:

$$\lim\left|\sum_{k=1}^{n} u_k\right| \leqslant \lim \sum_{k=1}^{n} |u_k|, \text{ или, что то же, } \left|\sum_{k=1}^{+\infty} u_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} |u_k|, \text{ ч. т. д.}$$

Обратная теорема не имеет места: из сходимости ряда (u) не следует сходимость ряда $(|u|)$. Нижеследующий пример показывает, что ряд (u) может быть сходящимся, а ряд $(|u|)$ — расходящимся.

Положив в равенстве (формула Маклорена)

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n+\frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(x+\theta)^{n+1}}$$

$x=1$, получим:

$$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}+\frac{(-1)^n}{(n+1)(1+\theta)^{n+1}}.$$

Так как $\lim \frac{(-1)^n}{(n+1)(1+\theta)^{n+1}} = 0$, то ряд

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \ldots,$$

называемый рядом Лейбница, сходится и имеет сумму, равную $\ln 2$. Ряд, составленный из абсолютных величин членов ряда Лейбница, есть расходящийся к $+\infty$ гармонический ряд.

Определение. *Ряд (u) называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд $(|u|)$, составленный из абсолютных величин его членов.*

Если ряд (u) сходится, а ряд $(|u|)$ расходится, то данный ряд (u) называется условно сходящимся.

Всякий знакопостоянный ряд является абсолютно сходящимся.

Наиболее существенным является нижеследующий признак абсолютной сходимости; *если абсолютные величины членов ряда (u) не превосходят соответствующих членов сходящегося знакоположительного ряда $\sum c_n$, то ряд (u) сходится абсолютно.* В самом деле, из неравенств $|u_n| \leqslant c_n$ следует сходимость ряда $(|u|)$. При этом

$$|\sum u_n| \leqslant \sum |u_n| \leqslant \sum c_n.$$

Примеры.

1. Если $|q| < 1$, то геометрическая прогрессия

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^n + \ldots$$

сходится абсолютно, так как прогрессия $\sum |q|^n$ сходится.

2. Ряд

$$1 + q + 2q^2 + \ldots + nq^n + \ldots$$

при любом $|q| < 1$ сходится абсолютно. В самом деле, так как

$$\lim \frac{|(n+1)\,q^{n+1}|}{|nq^n|} = |q| < 1,$$

то для ряда, составленного из абсолютных величин членов данного ряда, выполняется признак сходимости Даламбера.

3. Ряд

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} + \ldots$$

сходится абсолютно, так как ряд $\sum \frac{1}{n^2}$ сходится.

4. Ряд

$$\frac{\sin \alpha}{1\sqrt{1}} + \frac{\sin 2\alpha}{2\sqrt{2}} + \ldots + \frac{\sin n\alpha}{n\sqrt{n}} + \ldots$$

сходится абсолютно при любом α, так как

$$\left|\frac{\sin n\alpha}{n\sqrt{n}}\right| \leqslant \frac{1}{n\sqrt{n}} \quad \text{и ряд} \quad \sum \frac{1}{n\sqrt{n}} \quad \text{сходится.}$$

5. Если $\lim \sqrt[n]{|u_n|} > 1$ или $\lim \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} > 1$, то ряд $\sum u_n$ не может абсолютно сходиться; но он не может сходиться и условно, так как не выполнено основное условие сходимости, $\lim u_n = 0$.

Так, например, ряд $\sum \frac{(-1)^{n-1} 2^{n^2}}{n!}$ расходится. В самом деле,

$$\lim \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim \frac{2^{(n+1)^2} n!}{(n+1)! 2^{n^2}} = \lim \frac{1}{n+1} 2^{2n+1} = +\infty;$$

значит, не выполнено необходимое условие сходимости $\lim u_n = 0$.

Рассмотрим произвольную подпоследовательность

$$u_{k_1}, u_{k_2}, \ldots, u_{k_n}, \ldots \qquad \{u_{k_n}\}$$

(где $k_1 < k_2 < \ldots < k_n < \ldots$), составленную из членов данного ряда (u). Будем кратко говорить, что $\{u_{k_n}\}$ есть часть, выделенная из членов ряда (u).

Теорема. *Какова бы ни была часть $\{u_{k_n}\}$, выделенная из членов абсолютно сходящегося ряда, соответствующий ряд*

$$u_{k_1} + u_{k_2} + \ldots + u_{k_n} + \ldots$$

сходится абсолютно.

Доказательство. В силу предположенной сходимости ряда $(|u|)$ при достаточно большом $n > N$ неравенство

$$|u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \ldots + |u_{n+m}| < \varepsilon$$

будет выполняться для любого натурального m. При достаточно большом $k_p > n$ любая группа членов $u_{k_p}, u_{k_{p+1}}, \ldots, u_{k_n}$ войдет в состав членов $u_{n+1}, u_{n+2}, \ldots$, а потому и подавно будет выполняться неравенство

$$|u_{k_p}| + |u_{k_{p+1}}| + \ldots + |u_{k_n}| < \varepsilon.$$

Значит (в силу критерия Коши), ряд $\sum |u_{k_n}|$ сходится, ч. т. д.

Для условно сходящихся рядов теорема не имеет места. Так, например, выделив из ряда Лейбница положительные и отрицательные члены, получим расходящиеся ряды:

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots \quad \text{и} \quad -\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \ldots.$$

Теорема. *Для произвольного условно сходящегося ряда, ряды, составленные из положительных и из отрицательных членов (в отдельности), являются (каждый) расходящимися.*

Таким образом, из членов всякого условно сходящегося ряда можно выделить часть, образующую расходящийся ряд.

Доказательство. Рассмотрим ряды

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_k + \ldots \qquad (p)$$

и $$-n_1-n_2-\ldots-n_q-\ldots, \qquad (-n)$$

составленные из положительных и отрицательных членов данного условно сходящегося ряда (u). Заметим, что каждый из рядов (p) и $(-n)$ содержит бесконечное множество членов. В самом деле, если бы, например, данный сходящийся ряд содержал конечное число отрицательных членов, то он был бы абсолютно сходящимся. Докажем, что ряд (p) расходится к $+\infty$, а ряд $(-n)$ к $-\infty$. Рассмотрим некоторую частную сумму $s(u_n)$ ряда (u). Если в эту сумму входят k положительных и q отрицательных членов, то

$$s(u_n)=s(p_k)-s(n_q).$$

Так как (по условию) существует конечный предел $\lim s(u_n)$ (ряд (u) сходится), то последовательности частных сумм $s(p_k)$ и $s(n_q)$ либо обе сходятся, либо обе расходятся к $+\infty$, но не может одна из них иметь конечный, а другая — бесконечный предел. Рассмотрим частную сумму расходящегося (по условию) ряда $\sum|u_n|$:

$$s(|u_n|)=s(p_k)+s(n_q).$$

Так как последовательность сумм $s(|u_n|)$ расходится к $+\infty$, то обе последовательности сумм $s(p_k)$ и $s(n_q)$ расходятся к $+\infty$ и, следовательно, ряд (p) расходится к $+\infty$, а ряд $(-n)$ к $-\infty$, ч. т. д.

Определение. *Если любые два соседние члена u_n и u_{n+1} ряда $\sum u_n$ суть числа противоположного знака, то $\sum u_n$ называется знакопеременным рядом.*

Знакопеременный ряд принято обозначать так:

$$u_1-u_2+u_3-\ldots+(-1)^{n-1}u_n+\ldots=\sum(-1)^{n-1}u_n.$$

Без ущерба для общности будем предполагать все числа $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ положительными.

Примером знакопеременного ряда может служить ряд

$$\sum\frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Теорема (признак Лейбница). *Если $\{u_n\}$ есть убывающая последовательность положительных чисел, то необходимым и достаточным условием сходимости знакопеременного ряда $\sum(-1)^{n-1}u_n$ является сходимость к нулю его общего члена*: $\lim u_n=0$.

Доказательство. Условие $\lim u_n=0$ является необходимым условием сходимости всякого и, в частности, знакопеременного ряда. Для доказательства достаточности этого условия рассмотрим два следующие сгруппированные ряда:

$$u_1-(u_2-u_3)-(u_4-u_5)-\ldots \qquad (1)$$

и

$$(u_1-u_2)+(u_3-u_4)+(u_5-u_6)+\ldots. \qquad (2)$$

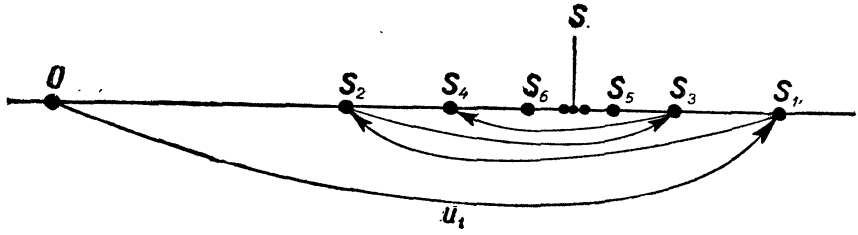
Частные суммы ряда (1) образуют подпоследовательность частных сумм ряда $\sum(-1)^{n-1}u_n$ с нечетными индексами. Из условия $u_1 > u_2 > u_3 > \ldots > u_n > \ldots$ вытекает, что эта подпоследовательность является убывающей:

$$s_1 > s_3 > \ldots > s_{2n+1} > \ldots.$$

Частные суммы ряда (2) образуют подпоследовательность частных сумм ряда $\sum(-1)^{n-1}u_n$ с четными индексами; эта подпоследовательность является возрастающей:

$$s_2 < s_4 < \ldots < s_{2n} < \ldots.$$

Из соотношения $s_{2n} = s_{2n-1} - u_{2n}$ следует, что $s_{2n} < s_{2n-1}$ и $\lim(s_{2n-1} - s_{2n}) = \lim u_{2n} = 0$.



Черт. 145.

Значит,

$$[s_2, s_1] \supset [s_4, s_3] \supset \ldots \supset [s_{2n}, s_{2n-1}] \supset \ldots$$

есть последовательность стягивающихся сегментов (черт. 145). Согласно принципу стягивающихся сегментов суммы с четными и с нечетными индексами имеют общий предел:

$$\lim s_{2n+1} = \lim s_{2n} = s.$$

Следовательно, $\lim s_n = s$, т. е. рассматриваемый ряд сходится, ч. т. д.

При любом значении n имеют место неравенства $s_{2n} < s < s_{2n-1}$ и, в частности,

$$0 < u_1 - u_2 < s < u_1.$$

Итак, *сумма сходящегося знакопеременного ряда с убывающими (по абсолютной величине) членами меньше первого члена ряда.*

Примечание. Если последовательность $\{u_n\}$ положительных чисел не является монотонной, то к соответствующему знакопеременному ряду признак не применим. Так, например, знакопеременный ряд

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \ldots,$$

удовлетворяющий условию $\lim u_n = 0$, расходится.

Примеры.

1. Ряд

$$\frac{1}{1^p}-\frac{1}{2^p}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}+\ldots$$

сходится абсолютно при $p>1$, так как сходится ряд $\sum\frac{1}{n^p}$.

При $0<p\leqslant 1$ ряд, согласно признаку Лейбница, сходится. Сходимость является условной, так как ряд $\sum\frac{1}{n^p}$ при $p\leqslant 1$ расходится.

2. Ряд

$$\frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{\ln 3}+\ldots+\frac{(-1)^n}{\ln n}+\ldots$$

сходится (признак Лейбница) условно, так как $\left|\frac{(-1)^n}{\ln n}\right|>\frac{1}{n}$, а потому ряд $\sum\frac{1}{\ln n}$ расходится.

Признак Дирихле.

1°. *Если последовательность частных сумм ряда* $\sum u_n$ *ограничена,*

2°. $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ *есть невозрастающая сходящаяся к нулю последовательность положительных чисел, то ряд*

$$\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\ldots+\alpha_nu_n+\ldots$$

сходится.

Доказательство. Применив к n-й частной сумме ряда преобразование Абеля (том I, § 136), получим:

$$s(\alpha_nu_n)=\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\ldots+\alpha_nu_n=s(u_1)(\alpha_1-\alpha_2)+s(u_2)(\alpha_2-\alpha_3)+\ldots+$$
$$+s(u_{n-1})(\alpha_{n-1}-\alpha_n)+\alpha_ns(u_n).$$

Оценим разность между $n+m$-й и n-й частными суммами данного ряда:

$$|s(\alpha_{n+m}u_{n+m})-s(\alpha_nu_n)|=|[s(u_n)(\alpha_n-\alpha_{n+1})+s(u_{n+1})(\alpha_{n+1}-\alpha_{n+2})+\ldots+$$
$$+s(u_{n+m-1})(\alpha_{n+m-1}-\alpha_{n+m})]+\alpha_{n+m}s(u_{n+m})-\alpha_ns(u_n)|.$$

Так как, по предположению, частные суммы $s(u_n)$ ограничены, $|s(u_n)|<M$, а $\alpha_k\geqslant\alpha_{k+1}$, то

$$|s(\alpha_{n+m}u_{n+m})-s(\alpha_nu_n)|<M(\alpha_n-\alpha_{n+1})+M(\alpha_{n+1}-\alpha_{n+2})+\ldots+$$
$$+M(\alpha_{n+m-1}-\alpha_{n+m})+\alpha_{n+m}M+\alpha_nM=M2\alpha_n<\varepsilon,$$

если $\alpha_n<\frac{\varepsilon}{2M}$ (при всех натуральных значениях m).

Итак, для данного ряда выполняется критерий Коши, откуда и следует его сходимость, ч. т. д.

Примеры.

1. Ряд $\alpha_1\sin x+\alpha_2\sin 2x+\ldots+\alpha_n\sin nx+\ldots$ сходится при любом x, если $\alpha_1\geqslant\alpha_2\geqslant\ldots\geqslant\alpha_n\geqslant\ldots$ и $\lim\alpha_n=0$.

В самом деле, если $x = k\pi$ (k — целое число), то утверждение очевидно, если же $x \neq k\pi$, то при любом n (пример 4, стр. 233)

$$\left|\sum_{m=1}^{n} \sin mx\right| = \left|\frac{\cos\frac{x}{2} - \cos(2n+1)\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}\right| \leqslant \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|},$$

а потому можно применить признак Дирихле.

Так, например, при любом x ряд

$$\sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \ldots + \frac{\sin nx}{n} + \ldots \text{ сходится.}$$

2. Ряд $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ имеет ограниченные частные суммы, и потому любой ряд $\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 + \ldots$ сходится, если только $\alpha_1 > \alpha_2 > \ldots$ и $\lim \alpha_n = 0$. Таким образом, признак Лейбница есть следствие признака Дирихле.

§ 50. Об оценке погрешностей при вычислениях с рядами

На практике ряды применяются как одно из средств приближенных вычислений. Если известно, что ряд $\sum u_n$ сходится, то его сумма может быть вычислена с любой степенью точности при помощи частных сумм. Отбросив все члены, начиная с u_{n+1}, получим приближенное значение суммы ряда в виде его частной суммы

$$s \approx s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n.$$

Для вычислительной практики важно знать оценку допущенной погрешности. Существенно также при заданной границе допустимой погрешности указать, сколькими членами ряда можно ограничиться, чтобы ошибка, равная соответствующему остаточному члену, не превосходила данной границы. В практических вычислениях применяются лишь абсолютно сходящиеся ряды. Ряды условно сходящиеся неудобны для вычислений, так как, чтобы получить даже незначительную точность, требуется сохранить большое число членов.

Для оценки погрешности при вычислениях с абсолютно сходящимися рядами нередко пользуются сравнением рядов. Пусть $\sum u_n$ — данный ряд и $\sum c_n$ — сходящийся знакоположительный ряд. Если при всех значениях n выполняется неравенство $|u_n| < c_n$, то, как известно, ряд $\sum u_n$ абсолютно сходится и для его остаточного члена имеет место оценка:

$$|R_n| = |u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+m} + \ldots| \leqslant |u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \ldots$$
$$\ldots + |u_{n+m}| + \ldots \leqslant c_{n+1} + c_{n+2} + \ldots + c_{n+m} + \ldots$$

Иными словами, остаточные члены ряда $\sum u_n$ не больше соответствующих остаточных членов ряда $\sum c_n$. Если известна оценка остаточного члена ряда $\sum c_n$, то эта же оценка может служить и для остаточного члена данного ряда.

Для знакопеременных рядов, удовлетворяющих условиям признака сходимости Лейбница, может быть получена следующая удобная оценка остаточного члена:

$$|R_n| = |(-1)^n u_{n+1} + (-1)^{n+1} u_{n+2} + \dots| = |u_{n+1} - u_{n+2} + u_{n+3} - \dots|.$$

Под знаком модуля получился знакопеременный ряд, его сумма меньше, чем u_{n+1}, т. е. $|R_n| < u_{n+1}$.

Отсюда удобное для запоминания правило: *если абсолютные величины членов сходящегося знакопеременного ряда убывают, то, ограничившись первыми его n членами, мы допустим ошибку, меньшую абсолютной величины первого отброшенного члена.*

Если к знакоположительному ряду применим интегральный признак сходимости Коши, то оценка остаточного члена может быть получена в виде интеграла. В самом деле, $f(n+1)+f(n+2)+\dots+f(n+m)$ есть нижняя сумма функции $f(x)$ на сегменте $[n, n+m]$ (см. черт. 144), а потому

$$f(n+1)+f(n+2)+\dots+f(n+m) < \int_n^{n+m} f(x)\,dx < \int_n^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Перейдя к пределу, получим:

$$R_n = f(n+1)+f(n+2)+\dots+f(n+m)+\dots < \int_n^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Примеры.

1. Если при всех достаточно больших значениях n имеет место неравенство $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} < k < 1$, то

$$|u_{n+1}| < k|u_n|, \quad |u_{n+2}| < k^2|u_n|, \dots, \quad |u_{n+m}| < k^m|u_n|, \dots;$$

следовательно,

$$|R_n| \leqslant |u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \dots + |u_{n+m}| + \dots < |u_n|k + |u_n|k^2 + \dots + |u_n|k^{n+m} + \dots = |u_n|\frac{k}{1-k}.$$

Итак, имеем оценку

$$|R_n| < |u_n|\frac{k}{1-k}.$$

Найдем, например, оценку погрешности, которая получится, если вместо суммы ряда

$$1 + 2\left(\frac{1}{4}\right)^2 + 3\left(\frac{1}{4}\right)^4 + \dots + n\left(\frac{1}{4}\right)^{2n-2} + \dots$$

взять сумму его n первых членов. Имеем: $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{n}\cdot\frac{1}{16}$; это отношение убывает, поэтому для всех последующих значений индекса $m > n$ будем иметь неравенство $\frac{u_{m+1}}{u_m} < \frac{n+1}{n}\cdot\frac{1}{16}$. Следовательно, можно положить $k = \frac{n+1}{16n}$,

откуда получим:

$$R_n < u_n \frac{\frac{n+1}{16n}}{1-\frac{n+1}{16n}} = \frac{n(n+1)}{(15n-1)\,4^{2n-2}}.$$

2. Для абсолютно сходящегося ряда

$$1-\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}n}{2^n}+\ldots$$

отношение $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\frac{n+1}{2n}=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\right)$ убывает, поэтому, положив $k=\frac{n+1}{2n}$, получим:

$$|R_n| < \frac{n}{2^n}\cdot\frac{\frac{n+1}{2n}}{1-\frac{n+1}{2n}} = \frac{n}{2^n}\frac{n+1}{n-1}.$$

Если данный ряд рассматривать как знакопеременный, то можно получить более простую и более точную оценку остаточного члена. Так как последовательность $\frac{n}{2^n}$ убывает, то применим признак Лейбница, а потому $|R_n| < \frac{n+1}{2^{n+1}}$.

3. Сколько членов знакопеременного ряда

$$1-\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}-\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\ldots$$

достаточно взять, чтобы допущенная ошибка была меньше, чем 0,001? Так как $7!=5040$, то $\frac{1}{7!}<\frac{1}{1000}$, поэтому достаточно ограничиться шестью членами.

4. Для остаточного члена ряда

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots$$

имеем следующие неравенства: $R_n < \int\limits_n^{+\infty}\frac{dx}{x^2}=\frac{1}{n}$ и

$$R_n=\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\ldots > \frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\ldots =$$
$$=\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)+\ldots=\frac{1}{n+1}.$$

Второе неравенство показывает, что данный ряд неудобен для вычислений. Так, взяв 99 членов ряда, мы получим ошибку, большую, чем 0,01.

§ 51. Теорема о перестановке членов ряда

Рассмотрим последовательность

$$k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_n,\ \ldots \qquad \{k_n\}$$

натуральных чисел, удовлетворяющих следующему условию: *каково бы ни было натуральное число n, существует единственный член последовательности $\{k_n\}$, равный n*:

$$k_s = n.$$

Иными словами, последовательность $\{k_n\}$ есть функция, взаимно однозначно отображающая натуральный ряд на самого себя; всякая такая последовательность $\{k_n\}$ называется перестановкой натурального ряда.

Рассмотрим ряд

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots; \qquad (u)$$

всякой перестановке $\{k_n\}$ натурального ряда соответствует ряд

$$u_{k_1} + u_{k_2} + \ldots + u_{k_n} + \ldots; \qquad (u_{k_n})$$

член u_{k_n} ряда (u_{k_n}) в ряде (u) занимает k_n-е место. Если $n = k_s$, то член u_n ряда (u) в ряде (u_{k_n}) занимает s-е место. Условимся говорить, что *ряд (u_{k_n}) получается из ряда (u) при помощи перестановки членов.*

Примеры.

1. Последовательность 1, 2, 4, 3, 6, 8, 5, 10, 12, ..., в которой за каждым нечетным числом следуют два четные, есть перестановка натурального ряда. Ряд, получающийся из $\sum u_n$ в соответствии с этой перестановкой, есть

$$u_1 + u_2 + u_4 + u_3 + u_6 + u_8 + u_5 + \ldots.$$

2. Последовательность 2, 1, 3, 4, 5, 7, 9, 6, 11, 13, 15, 17, ..., где за каждым четным числом по порядку следует 2, затем 3, затем 4 и т. д. нечетные числа, есть перестановка натурального ряда.

3. Последовательность 1, 2, 2, 3, 4, 4, ... не есть перестановка натурального ряда; в ней $s_2 = s_3 = 2$.

4. Последовательность 1, 3, 4, 5, ..., n, ... не есть перестановка натурального ряда; в ней пропущено число 2.

Теорема. *При любой перестановке членов абсолютно сходящегося ряда получается абсолютно сходящийся ряд с той же суммой.*

Иначе это свойство формулируется так: *всякий абсолютно сходящийся ряд обладает свойством коммутативности.*

Доказательство. Пусть

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = s \qquad (u)$$

— данный абсолютно сходящийся ряд, а

$$u_{k_1} + u_{k_2} + \ldots + u_{k_n} + \ldots \qquad (u_{k_n})$$

— ряд, получающийся из него перестановкой членов. Докажем, что ряд (u_{k_n}) сходится абсолютно к сумме s.

В самом деле, при достаточно большом значении $n > N$ остаточный член сходящегося знакоположительного ряда $\sum |u_n|$ будет меньше $\frac{\varepsilon}{2}$:

$$|u_{n+1}|+|u_{n+2}|+\ldots+|u_{n+m}|+\ldots<\frac{\varepsilon}{2},$$

но тогда будем иметь и подавно

$$R_n|=|u_{n+1}+u_{n+2}+\ldots|<\frac{\varepsilon}{2}$$ и (при любом натуральном p)

$$|u_{n+1}|+|u_{n+2}|+\ldots+|u_{n+p}|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть $S(u_{k_m})$ — m-я частная сумма ряда с переставленными членами

$$S(u_{k_m})=u_{k_1}+u_{k_2}+\ldots+u_{k_m}.$$

Число m может быть взято настолько большим, чтобы среди членов суммы $S(u_{k_m})$ содержались все n первых членов данного ряда. В самом деле, число 1 находится в перестановке $\{k_m\}$ на некотором месте, возьмем (по порядку) столько чисел этой перестановки, чтобы среди них содержалась 1; далее возьмем число 2; мы можем, в случае надобности, добавить еще столько чисел перестановки $\{k_m\}$, чтобы среди них содержалось число 2. Будем продолжать этот процесс до тех пор, пока среди чисел $k_1, k_2, \ldots, k_m$ не окажется каждое из n чисел 1, 2, 3, ..., n, тогда отрезок $|u_{k_{m+1}}|+|u_{k_{m+2}}|+\ldots+|u_{k_s}|$ состоит из абсолютных величин членов ряда (u), индексы которых больше N, всякая такая сумма меньше $\frac{\varepsilon}{2}$. Следовательно (в силу критерия Коши), ряд $\sum |u_{k_m}|$ сходится, т. е. ряд $\sum u_{k_m}$ сходится абсолютно. Оценим разность между частной суммой $S(u_{k_m})$ и суммой s данного ряда (u):

$$|S(u_{k_m})-s|=|S(u_{k_m})-(s_n+R_n)|\leqslant|S(u_{k_m})-s_n|+|R_n|\leqslant$$
$$\leqslant(|u_\alpha|+|u_\beta|+\ldots+|u_\mu|)+|R_n|<\varepsilon.$$

В самом деле, слагаемые, заключенные в скобки, суть абсолютные величины членов, вошедших в $S(u_{k_m})$, но не вошедших в s_n, а потому индексы $\alpha, \beta, \ldots, \mu$ больше n, но всякая такая сумма меньше $\frac{\varepsilon}{2}$. Второе слагаемое, $|R_n|$, также меньше $\frac{\varepsilon}{2}$. Отсюда следует, что $\lim\limits_{m\to+\infty} S(u_{k_m})=\sum\limits_{m=1}^{+\infty} u_{k_m}=s$. Итак, ряд с переставленными членами сходится к той же сумме s, ч. т. д.

Для условно сходящихся рядов свойство коммутативности не имеет места. Так, например, если в ряде Лейбница $\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$ произвести перестановку членов, поместив за каждым положительным членом два отрицательные, то получится ряд:

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \ldots .$$

Составим частные суммы этого ряда:

$$s_{3n} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{8} + \ldots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2(2n-1)}\right) - \frac{1}{4n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2(2n-1)} - \frac{1}{4n} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots - \frac{1}{2n}\right),$$

откуда $\lim s_{3n} = \frac{1}{2}\ln 2$. Но суммы s_{3n+1} и s_{3n+2} отличаются от суммы s_{3n} слагаемыми $\frac{1}{2n+1}$ и $\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2(2n+1)}$, имеющими предел, равный нулю, а поэтому все эти суммы сходятся к общему пределу, равному $\frac{1}{2}\ln 2$. Итак, при указанной перестановке членов сумма ряда уменьшилась вдвое.

Теорема. *Из всякого условно сходящегося ряда посредством надлежащей перестановки его членов может быть получен ряд с любой заданной конечной или бесконечной суммой, а также колеблющийся ряд.*

Доказательство. Пусть A — любое заданное число; докажем, что из членов данного условно сходящегося ряда можно составить ряд, сходящийся к A.

Составим из положительных и отрицательных членов данного условно сходящегося ряда два расходящиеся (к $+\infty$ и к $-\infty$) ряда:

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_k + \ldots, \qquad (p)$$

$$-n_1 - n_2 - \ldots - n_q - \ldots. \qquad (-n)$$

Пусть для определенности $A > 0$. Возьмем из ряда (p) наименьшее количество первых членов, чтобы их сумма превзошла число A. Это возможно в силу расходимости к $+\infty$ ряда (p). К полученной сумме будем прибавлять по порядку, начиная с первого, члены ряда $(-n)$, взяв наименьшее количество этих членов, с тем расчетом, чтобы получилась сумма, меньшая A. Это возможно в силу расходимости ряда $(-n)$. К полученной сумме будем по порядку прибавлять оставшиеся члены ряда (p), пока не получим сумму, большую A. Продолжая неограниченно описанный процесс, мы получим ряд, составленный из членов рядов (p) и $(-n)$, т. е. из членов данного ряда. Построенный ряд

сходится и имеет сумму, равную A. В самом деле, если частная сумма этого ряда больше A, то разность между этой суммой и A не превосходит последнего положительного члена, взятого из ряда (p). Аналогично, если частная сумма меньше A, то разность между числом A и ею не превосходит абсолютной величины последнего члена, взятого из ряда $(-n)$. Но в силу сходимости данного ряда его общий член имеет предел, равный нулю, а потому $\lim p_k = \lim n_q = 0$; значит, построенный ряд сходится к числу A. Аналогично рассматривается случай, когда $A < 0$.

Пусть даны два различные числа $A < B$; путем аналогичного процесса переменного обращения к рядам (p) и $(-n)$ можно получать суммы, большие B и меньшие A, соответствующий ряд будет расходящимся (колеблющимся).

Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ — любая возрастающая, расходящаяся к $+\infty$ последовательность положительных чисел. Возьмем из ряда (p) по порядку столько членов, чтобы их сумма превзошла число A_1, затем присоединим один член из ряда $(-n)$. Далее присоединим из оставшихся членов ряда (p) столько членов, чтобы в сумме получилось число, большее A_2, а затем возьмем один член из ряда $(-n)$. В результате неограниченного продолжения этого процесса составится ряд, расходящийся к $+\infty$.

Аналогично можно построить ряд, расходящийся к $-\infty$, ч. т. д.

Пример.

Пусть

$$s_{k_1}, s_{k_2}, \ldots, s_{k_n}, \ldots \qquad \{s_{k_n}\}$$

— некоторая подпоследовательность последовательности $\{s_n\}$. Обозначим через $\rho(n)$ число членов $\{s_{k_n}\}$, содержащихся среди n первых членов данной последовательности $\{s_n\}$. Если существует предел $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\rho(n)}{n}$, то этот предел называется **плотностью** подпоследовательности $\{s_{k_n}\}$ в последовательности $\{s_n\}$.

Будем рассматривать перестановки ряда Лейбница, при которых не меняется взаимное расположение как положительных, так и отрицательных членов.

Предположим, что путем такой перестановки членов получен новый ряд, в котором плотность положительных членов равна ρ. Обозначим через s_n сумму первых n членов этого ряда. Пусть в сумме s_n содержится k положительных и $n-k$ отрицательных членов, имеем:

$$s_n = \left(1 + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2k-1}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2(n-k)}\right) =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2k-1} + \frac{1}{2k}\right) - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n-k}\right) -$$

$$- \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{k}\right).$$

Так как

$$\lim\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n\right]=C,$$

где C — константа Эйлера (том I, § 57), то $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}=\ln n+C+\omega_n$ и $\lim\omega_n=0$. Следовательно, частная сумма s_n может быть представлена в форме

$$s_n=\ln(2k)-\frac{1}{2}\ln k-\frac{1}{2}\ln(n-k)+\omega_{2k}-\frac{1}{2}\omega_k-\frac{1}{2}\omega_{n-k}=$$

$$=\ln\left(2\sqrt{\frac{\frac{k}{n}}{1-\frac{k}{n}}}\right)+\alpha_n,\quad\text{где}\quad\lim_{n\to+\infty}\alpha_n=0.$$

Если плотность положительных членов $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{k}{n}=\rho$ отлична от нуля и от 1, то $\lim s_n=\ln\left(2\sqrt{\frac{\rho}{1-\rho}}\right)$; если $\rho=1$, то ряд расходится к $+\infty$, если же $\rho=0$, то ряд расходится к $-\infty$.

Так, например, для ряда

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\ldots,$$

в котором за двумя положительными членами следует один отрицательный $\rho=\frac{2}{3}$, а потому его сумма равна $s=\ln(2\sqrt{2})=\frac{3}{2}\ln 2$.

§ 52. Действия над рядами

Рассмотрим два ряда:

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots \qquad (u)$$

и

$$v_1+v_2+\ldots+v_n+\ldots \qquad (v)$$

Определение. *Ряд*

$$(u_1+v_1)+(u_2+v_2)+\ldots+(u_n+v_n)+\ldots, \qquad (u+v)$$

полученный почленным сложением рядов (u) *и* (v), *называется рядом-суммой этих рядов.*

Теорема. *Если ряды* (u) *и* (v) *сходятся к суммам* $s(u)$ и $s(v)$, *то ряд-сумма сходится к сумме* $s(u)+s(v)$.

Доказательство. n-я частная сумма ряда $(u+v)$ равна

$$s(u_n+v_n)=(u_1+v_1)+(u_2+v_2)+\ldots+(u_n+v_n)=s(u_n)+s(v_n).$$

Следовательно,

$$\lim s(u_n+v_n)=\lim s(u_n)+\lim s(v_n)=s(u)+s(v),\quad\text{ч. т. д.}$$

Если данные ряды абсолютно сходятся, то ряд-сумма также сходится абсолютно. В самом деле, $|u_n+v_n|\leqslant|u_n|+|v_n|$. Но $|u_n|+|v_n|$

есть член ряда-суммы сходящихся рядов $\sum|u_n|$ и $\sum|v_n|$; следовательно, ряд $\sum[|u_n|+|v_n|]$ сходится, а значит, $\sum|u_n+v_n|$ сходится и подавно.

Вместо ряда $(u+v)$ можно рассматривать ряд

$$u_1+v_1+u_2+v_2+\ldots+u_n+v_n+\ldots,$$

который также имеет сумму, равную $s(u)+s(v)$.

В самом деле, частная сумма ряда с четным индексом $2k$ равна $s(u_k)+s(v_k)$, а сумма с нечетным индексом $2k+1$ равна $s(u_k)+s(v_k)+v_k$; эти суммы имеют общий предел $s(u)+s(v)$.

Аналогично может быть доказана следующая теорема: *если ряды*

$$\begin{gathered}u_1^{(1)}+u_2^{(1)}+\ldots+u_n^{(1)}+\ldots\\ u_1^{(2)}+u_2^{(2)}+\ldots+u_n^{(2)}+\ldots\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ u_1^{(k)}+u_2^{(k)}+\ldots+u_n^{(k)}+\ldots\end{gathered}$$

сходятся, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(C_1u_n^{(1)}+C_2u_n^{(2)}+\ldots+C_ku_n^{(k)}\right)$ *сходится и имеет сумму, равную* $C_1s(u^{(1)})+C_2s(u^{(2)})+\ldots+C_ks(u^{(k)})$ (доказательство предоставляем читателю).

Умножение рядов. ***Определение.*** *Ряд*

$$\begin{aligned}&u_1v_1+(u_1v_2+v_2u_1)+(u_1v_3+u_2v_2+u_3v_1)+\ldots+\\&\quad+(u_1v_n+u_2v_{n-1}+\ldots+u_nv_1)+\ldots\end{aligned}\qquad(u\cdot v)$$

называется рядом-произведением рядов (u) *и* (v).

Согласно этому определению n-й член ряда-произведения есть сумма всевозможных произведений u_iv_j членов, сумма индексов которых $i+j$ равна $n+1$.

Теорема. *Ряд-произведение двух абсолютно сходящихся рядов есть абсолютно сходящийся ряд, его сумма равна произведению сумм рядов* (u) *и* (v).

Доказательство. Выпишем множество всевозможных произведений каждого члена первого ряда на каждый член второго в следующую таблицу «с двойным входом»:

$$\begin{array}{llll}u_1v_1 & u_1v_2 & \ldots & u_1v_n\ \ldots\\ u_2v_1 & u_2v_2 & \ldots & u_2v_n\ \ldots\\ \ldots\ldots\ldots & & & \\ \ldots\ldots\ldots & & & \\ u_nv_1 & u_nv_2 & \ldots & u_nv_n\\ \ldots\ldots\ldots\ldots & & & \ldots\\ \ldots\ldots\ldots\ldots & & & \ldots\end{array}$$

При почленном умножении n-х частных сумм рядов (u) и (v) получится n^2 произведений, в таблице с двойным входом эти произведения составляют n-ю «угловую матрицу», образованную пересечением n первых строк и n первых столбцов таблицы (на схеме угловые матрицы обозначены пунктиром). Из членов таблицы образуем ряд следующим образом: к членам u_1v_1 первой угловой матрицы присоединим не вошедшие в нее члены второй угловой матрицы, затем присоединим оставшиеся члены третьей матрицы и т. д.

$$u_1v_1 + u_1v_2 + u_2v_2 + u_2v_1 + u_1v_3 + u_2v_3 + u_3v_3 + u_3v_2 + u_3v_1 + \ldots . \quad (1)$$

Полученный ряд сходится абсолютно. В самом деле, взяв все члены этого ряда по абсолютной величине, получим знакоположительный ряд, частные суммы этого ряда ограничены. Действительно, члены любой его частной суммы S_N при достаточно большом n содержатся среди абсолютных величин членов n-й угловой матрицы, а потому

$$S_N \leqslant (|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n|)(|v_1| + |v_2| + \ldots + |v_n|) < \\ < \sum_{n=1}^{+\infty} |u_n| \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} |v_n| .$$

Из ограниченности частных сумм рассматриваемого знакоположительного ряда следует абсолютная сходимость ряда (1).

Для вычисления суммы ряда (1) достаточно заметить, что сумма n^2 его первых членов равна $s(u_n) \cdot s(v_n)$, а потому $\lim [s(u_n)\, s(v_n)] = s(u) \cdot s(v)$ есть искомая сумма.

В силу абсолютной сходимости ряда (1) при любой перестановке его членов получится ряд с той же суммой. В частности, суммируя члены в таблице двойного входа по диагональной схеме (см. том I, § 32), получим ряд-произведение:

$$\sum (u_1v_n + u_2v_{n-1} + \ldots + u_nv_1); \qquad (u \cdot v)$$

сумма этого ряда также равна произведению сумм данных рядов:

$$(u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots)(v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots) = \\ = u_1v_1 + (u_1v_2 + u_2v_1) + \ldots + (u_1v_n + u_2v_{n-1} + \ldots + u_nv_1) + \ldots ,$$

ч. т. д.

Примеры.

1. Вычислить произведение сумм рядов

$$1 + a + \frac{a^2}{2!} + \ldots + \frac{a^n}{n!} + \ldots$$

$$1 - a + \frac{a^2}{2!} - \ldots + \frac{(-1)^n a^n}{n!} + \ldots$$

Каждый из этих рядов при любом a абсолютно сходится (достаточно применить признак Даламбера). Вычислим $n+1$-й член ряда-произведения:

$$1.\ \frac{a^n}{n!}-a\cdot\frac{a^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{a^2}{2!}\cdot\frac{a^{n-2}}{(n-2)!}-\ \ldots\ +(-1)^n\frac{a^n}{n!}=$$

$$=a^n\left(\frac{1}{n!}-\frac{1}{1!\,(n-1)!}+\frac{1}{2!\,(n-2)!}-\ \ldots\ +(-1)^n\frac{1}{n!}\right)=$$

$$=\frac{a^n}{n!}\left[1-\frac{n!}{1!\,(n-1)!}+\frac{n!}{2!\,(n-2)!}-\ \ldots\ +(-1)^n\right].$$

В скобках получилась сумма биномиальных коэффициентов, взятых с чередующимися знаками; но такая сумма равна нулю. Значит, все члены ряда-произведения, кроме первого, равного 1, обращаются в нуль, а потому искомое произведение равно 1.

2. Рассмотрим геометрическую прогрессию

$$\frac{1}{1-r}=1+r+r^2+\ \ldots\ +r^n+\ \ldots\quad(\text{где } |r|<1).$$

Возведя в квадрат по правилу умножения рядов, получим:

$$\frac{1}{(1-r)^2}=1+(r+r)+\ \ldots\ +(r^n+r^n+\ \ldots\ +r^n)+\ \ldots=$$

$$=1+2r+3r^2+\ \ldots\ +(n+1)\,r^n+\ \ldots.$$

3. Рассмотрим условно сходящийся ряд:

$$1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\ \ldots\ +\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}+\ \ldots.$$

Умножив этот ряд сам на себя, получим ряд с общим членом

$$w_n=(-1)^{n-1}\left[\frac{1}{\sqrt{n}\cdot\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{n-1}\sqrt{2}}+\ \ldots\ +\frac{1}{\sqrt{1}\sqrt{n}}\right].$$

Как легко видеть,

$$|w_n|>\frac{1}{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}}+\ \ldots\ +\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n}}=1.$$

Следовательно, ряд-произведение расходится.

Этот пример показывает, что *для рядов неабсолютно сходящихся теорема об умножении рядов вообще не имеет места.*

§ 53. Теорема о группировке членов абсолютно сходящегося ряда. Двойные ряды

Предположим, что натуральный ряд чисел разбит на некоторое множество последовательностей, так что каждое натуральное число содержится лишь в одной из этих последовательностей.

Примерами могут служить следующие разбиения натурального ряда:

1) 1, 4, 7, 10, 13, ...,
2, 5, 8, 11, 14, ...,
3, 6, 9, 12, 15, ...

2)
$$\begin{array}{l} 1,\ 2,\ 4,\ 7,\ 11,\ 16,\ \ldots, \\ 3,\ 5,\ 8,\ 12,\ 17,\ 23,\ \ldots, \\ 6,\ 9,\ 13,\ 18,\ \ldots, \\ 10,\ 14,\ 19,\ \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

(«диагональная» схема)

3)
$$\begin{array}{l} 1, \\ 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ \ldots, \\ 3,\ 9,\ 15,\ 21,\ \ldots, \\ 5,\ 25,\ 35,\ \ldots, \\ 7,\ 49,\ 77,\ \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

(последняя таблица составлена по принципу «Эратосфенова решета»). Пусть

$$\begin{array}{l} \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n,\ \ldots, \\ \beta_1,\ \beta_2,\ \ldots,\ \beta_n,\ \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mu_1,\ \mu_2,\ \ldots,\ \mu_n,\ \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

— некоторое данное разбиение натурального ряда. Рассмотрим произвольный абсолютно сходящийся ряд:

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \qquad (u)$$

Данному разбиению натурального ряда соответствует расположение членов ряда (u) в следующую таблицу «с двойным входом»:

$$\begin{array}{l} u_{\alpha_1},\ u_{\alpha_2},\ \ldots,\ u_{\alpha_n},\ \ldots, \\ u_{\beta_1},\ u_{\beta_2},\ \ldots,\ u_{\beta_n},\ \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_{\mu_1},\ u_{\mu_2},\ \ldots\ u_{\mu_n},\ \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Из строк этой таблицы могут быть составлены следующие абсолютно сходящиеся ряды:

$$\sigma_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} u_{\alpha_n},\quad \sigma_2 = \sum_{n=1}^{+\infty} u_{\beta_n},\ \ldots,\ \sigma_m = \sum_{n=1}^{+\infty} u_{\mu_n},\ \ldots.$$

Теорема. *Если ряд (u) абсолютно сходится, то ряд*

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_m + \ldots \qquad (\sigma)$$

также абсолютно сходится, и его сумма равна сумме ряда (u).

В этом смысле следует понимать утверждение, что *в абсолютно сходящемся ряде допустима произвольная группировка членов.*

Доказательство. В силу абсолютной сходимости ряда (u) существует такое натуральное число N, что

$$|u_N|+|u_{N+1}|+\ldots+|u_{N+m}|+\ldots<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Выберем число k настолько большим, чтобы все N первых членов ряда (u) содержались в k первых строках таблицы с двойным входом.

Рассмотрим сумму

$$|\sigma_{k+1}|+|\sigma_{k+2}|+\ldots+|\sigma_{k+m}|.$$

Если каждый из членов, входящих в состав рядов σ_{k+1}, σ_{k+2}, ..., σ_{k+m}, взять по абсолютной величине, то составится ряд-сумма лишь из части тех чисел $|u_i|$, индекс которых i больше числа N. Любая частная сумма такого ряда меньше $\frac{\varepsilon}{2}$, а потому и подавно:

$$|\sigma_{k+1}|+|\sigma_{k+2}|+\ldots+|\sigma_{k+m}|<\varepsilon.$$

Следовательно, в силу критерия Коши ряд (σ) сходится абсолютно.

Покажем, что $\sum\limits_{m=1}^{+\infty}\sigma_m=s$, где s есть сумма ряда (u).

Рассмотрим разность между s и k-й частной суммой ряда (σ):

$$s-\sum_{i=1}^{k}\sigma_i=\left(s-\sum_{n=1}^{N}u_n\right)+\left(\sum_{n=1}^{N}u_n-\sum_{i=1}^{k}\sigma_i\right)=$$

$$=(u_{N+1}+u_{N+2}+\ldots)+\left(\sum_{n=1}^{N}u_n-\sum_{i=1}^{k}\sigma_k\right).$$

Второе слагаемое можно представить в виде ряда-суммы, составленного из чисел u_i, где индекс i больше N; следовательно, абсолютная величина этого слагаемого меньше ε. На том же основании абсолютная величина первого слагаемого меньше ε. Откуда

$$\left|s-\sum_{i=1}^{k}\sigma_i\right|<2\varepsilon,\quad\text{потому}\quad\lim_{k\to+\infty}\sum_{i=1}^{k}\sigma_i=\sum_{i=1}^{+\infty}\sigma_i=s,\ \text{ч. т. д.}$$

Примечание. Рассуждения остаются в силе, если строки (каждая или некоторые из них) таблицы содержат конечное число членов, а также если таблица состоит из конечного числа строк.

Рассмотрим произвольную таблицу с двойным входом:

$$\begin{array}{|llll|}
\hline
u_{11} & u_{12} & \ldots & u_{1n}\ \ldots \\
u_{21} & u_{22} & \ldots & u_{2n}\ \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
u_{m1} & u_{m2} & \ldots & u_{mn}\ \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\hline
\end{array}$$

Предположим, что из членов этой таблицы каким-либо способом составлен ряд *:

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots. \qquad (u)$$

Примером такого ряда может служить ряд, составленный по «диагональной схеме»:

$$u_{11}+u_{12}+u_{21}+u_{13}+u_{22}+u_{31}+\ldots.$$

Если ряд (u) абсолютно сходится к сумме s, то к той же сумме будет сходиться и любой ряд, составленный из данной таблицы при произвольном другом расположении ее членов. Эту сумму можно вычислить, складывая сначала элементы таблицы по строкам (или по столбцам), а затем складывая полученные суммы:

$$s=\sum_{m=1}^{+\infty}(u_{m1}+u_{m2}+\ldots+u_{mn}+\ldots)=$$
$$=\sum_{n=1}^{+\infty}(u_{1n}+u_{2n}+\ldots+u_{mn}+\ldots).$$

Понятие двойного ряда. Всякой таблице с «двойным входом» соответствует «двойная последовательность» s_{mn} ее частных сумм, где s_{mn} есть сумма всех чисел u_{ik}, содержащихся в m первых строках и n первых столбцах таблицы. Выражение $\sum\limits_{i,\,k=1}^{+\infty}u_{ik}$ называется двойным рядом, а предел (если он существует) $\lim\limits_{\substack{m\to+\infty\\ n\to+\infty}}s_{mn}$ — суммой двойного ряда.

Если из членов таблицы может быть составлен абсолютно сходящийся ряд (u), то данный двойной ряд называется абсолютно сходящимся. Сумма абсолютно сходящегося двойного ряда равна сумме s ряда (u). В самом деле при достаточно большом N имеем:

$$|u_{N+1}|+|u_{N+2}|+\ldots<\varepsilon.$$

Но тогда абсолютная величина разности $s_{mn}-s$ также будет меньшей ε при произвольных достаточно больших значениях m и n, взятых при условии, чтобы среди членов, входящих в состав s_{mn}, содержались все N первых членов ряда (u). Значит, $\lim\limits_{\substack{m\to+\infty\\ n\to+\infty}}s_{mn}=s$.

Вычисление суммы абсолютно сходящегося двойного ряда можно производить посредством произвольной группировки его членов.

* Это значит, что члены ряда (u) могут быть расположены в данную таблицу с двойным входом. Точный смысл этого установлен в начале настоящего параграфа.

Достаточным условием сходимости двойного ряда с положительными членами является ограниченность последовательности s_{mn}, частных сумм. В самом деле, в этом случае частные суммы любого (знакоположительного) ряда (u), составленного из членов таблицы, ограничены, а потому этот ряд сходится (абсолютно).

Пример.

Рассмотрим ряд с положительными членами:

$$\frac{x}{1-x}+\frac{x^2}{1-x^2}+\ldots+\frac{x^n}{1-x^n}+\ldots, \tag{1}$$

где x — данное число в промежутке $0 \leqslant x < 1$.

Члены этого ряда не больше соответствующих членов сходящейся геометрической прогресии:

$$\frac{x}{1-x}+\frac{x^2}{1-x}+\ldots+\frac{x^n}{1-x}+\ldots,$$

а потому данный ряд сходится.

Рассмотрим таблицу с двойным входом:

$\frac{x}{1-x}$	x	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7
$\frac{x^2}{1-x^2}$		x^2	0	x^4	0	x^6	0 x^8
$\frac{x^3}{1-x^3}$			x^3	0	0	x^6	
. . . . .							

Слева показаны суммы членов таблицы по строкам. Частные суммы s_{mn} таблицы ограничены:

$$s_{mn} < \frac{x}{1-x}+\frac{x^2}{1-x^2}+\ldots+\frac{x^m}{1-x^m} < s,$$

где s есть сумма ряда (1). Следовательно, двойной ряд (знакоположительный), составленный из членов таблицы, сходится. Суммируя по строкам и по столбцам, получим равенство (имеющее применение в теории чисел):

$$s=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{1-x^n}=x+2x^2+2x^3+3x^4+\ldots+\nu(n)\,x^n+\ldots, \tag{2}$$

где (как нетрудно проследить) $\nu(n)$ есть количество делителей числа n.

Рассматриваемый ряд (1) и двойной ряд сходятся абсолютно, если $-1 < x < 0$. В самом деле, в этом случае члены обоих рядов по абсолютной величине не больше соответствующих членов сходящихся знакоположительных рядов, которые получатся, если заменить x на $|x|$. Следовательно, рассматриваемые ряды сходятся абсолютно при любом значении x в интервале $(-1, 1)$, и имеет место равенство (2).

ГЛАВА VI

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

§ 54. Понятие функционального ряда

Пусть

$$u_1(x),\ u_2(x),\ \ldots,\ u_n(x),\ \ldots \qquad \{u_n(x)\}$$

есть последовательность функций, рассматриваемых совместно на некотором множестве $\mathfrak{M}_x$.

Определение. *Функциональным рядом называется ряд*

$$u_1(x)+u_2(x)+\ \ldots\ +u_n(x)+\ \ldots, \qquad (u)$$

члены которого суть функции, рассматриваемые совместно на некотором данном множестве $\mathfrak{M}_x$.

Частные суммы функционального ряда:

$$s_1(x)=u_1(x),\quad s_2(x)=u_1(x)+u_2(x),\ \ldots,$$
$$s_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\ \ldots\ +u_n(x),\ \ldots \qquad \{s_n(x)\}$$

суть функции, рассматриваемые совместно на множестве $\mathfrak{M}_x$.

Всякая последовательность функций

$$s_1(x),\ s_2(x),\ \ldots,\ s_n(x),\ \ldots, \qquad \{s_n(x)\}$$

рассматриваемых на множестве $\mathfrak{M}_x$, может быть представлена в виде ряда:

$$s_1(x)+\big(s_2(x)-s_1(x)\big)+\big(s_3(x)-s_2(x)\big)+\ldots+\big(s_n(x)-s_{n-1}(x)\big)+\ldots.$$

Всякому данному значению $x_0\in\mathfrak{M}_x$ соответствует числовой ряд

$$u_1(x_0)+u_2(x_0)+\ \ldots\ +u_n(x_0)+\ \ldots,$$

членами которого являются значения членов данного функционального ряда в точке x_0. При данном $x\in\mathfrak{M}_x$ соответствующий числовой ряд может быть либо сходящимся, либо расходящимся. Множество точек $\mathfrak{M}$, в которых ряд (u) сходится, есть некоторая часть множества $\mathfrak{M}_x$. В частности, множество $\mathfrak{M}$ может совпадать с $\mathfrak{M}_x$, в этом случае ряд сходится на всем множестве $\mathfrak{M}_x$; множество $\mathfrak{M}$ может оказаться пустым, в этом случае ряд расходится в каждой точке множества $\mathfrak{M}_x$.

Определение. *Предельная функция последовательности частных сумм*

$$s(x)=\lim_{n\to+\infty} s_n(x)=\lim[u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)],$$

рассматриваемая на множестве $\mathfrak{M}$ *всех тех точек, в которых сходится ряд* (u), *называется суммой этого ряда*:

$$s(x)=u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots.$$

n-й остаточный член ряда

$$s(x)-s_n(x)=R_n(x)=u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\ldots+u_{n+m}(x)+\ldots$$

есть функция, определенная на множестве $\mathfrak{M}$, на котором сходится ряд (u). При этом мы имеем $\lim R_n(x)=0\,(x\in\mathfrak{M})$, или, что то же, неравенство $|R_n(x)|<\varepsilon$ выполняется, если $n>N$, где число N определяется заданием ε и x.

Если на некотором множестве $\mathfrak{M}$ функция $f(x)$ равна сумме ряда:

$$f(x)=u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots,$$

то говорят, что *функция* $f(x)$ *на множестве* $\mathfrak{M}$ *разлагается в ряд по функциям* $u_1(x)$, $u_2(x)$, ..., $u_n(x)$, ...

Примеры.

1. Прогрессия

$$1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots$$

есть функциональный ряд, рассматриваемый в интервале $(-\infty, +\infty)$. Множество точек сходимости прогрессии есть интервал $-1<x<1$. В этом интервале сумма прогрессии равна $\frac{1}{1-x}$. На множестве точек $|x|\geqslant 1$ прогрессия расходится.

2. Ряд

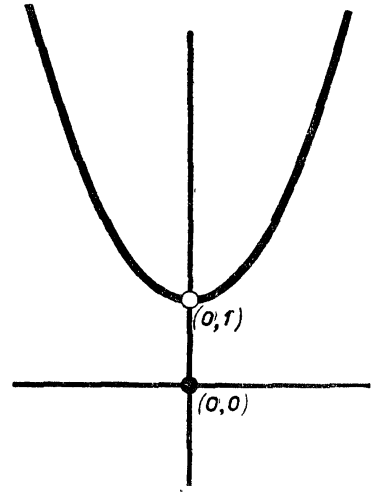
$$x^2+\frac{x^2}{1+x^2}+\frac{x^2}{(1+x^2)^2}+\ldots+\frac{x^2}{(1+x^2)^n}+\ldots$$

сходится в интервале $-\infty<x<+\infty$. В самом деле, если $x\neq 0$, то данный ряд есть прогрессия со знаменателем $\frac{1}{1+x^2}<1$.

Если $x=0$, то все члены ряда обращаются в 0.

Вычислив сумму ряда, получим:

$$s(x)=\begin{cases}1+x^2 & (\text{если } x\neq 0),\\ 0 & (\text{если } x=0)\end{cases}$$ (черт. 146).



Черт. 146.

3. Функциональный ряд

$$\frac{\sin x}{1^2}+\frac{\sin^2 x}{2^2}+\ldots+\frac{\sin^n x}{n^2}+\ldots$$

сходится абсолютно в интервале $(-\infty, +\infty)$, так как его члены по абсолютной величине при произвольном x не больше членов сходящегося ряда:

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots.$$

4. Функциональный ряд

$$\cos x + \cos^2 x + \ldots + \cos^n x + \ldots$$

сходится при всех значениях $x \neq k\pi$. В точках $x = k\pi$ ряд расходится.

5. Функциональный ряд

$$e^{|x|} + \frac{e^{2|x|}}{2} + \frac{e^{3|x|}}{3} + \ldots + \frac{e^{n|x|}}{n} + \ldots$$

расходится в интервале $-\infty < x < +\infty$, так как при любом x его члены не меньше членов гармонического ряда.

§ 55. Равномерно сходящиеся ряды и их свойства

Определение. *Функциональный ряд*

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots \qquad (u)$$

называется равномерно сходящимся на множестве $\mathfrak{M}$ *к предельной функции* $s(x)$, *если последовательность* $\{s_n(x)\}$ *частных сумм равномерно сходится на множестве* $\mathfrak{M}$:

$$s_n(x) \rightrightarrows s(x) \qquad (\text{где } x \in \mathfrak{M}).$$

Определение равномерной сходимости ряда (при помощи неравенств) формулируется так:

ряд (u) *равномерно сходится на множестве* $\mathfrak{M}$, *если неравенство* $|R_n(x)| < \varepsilon$, *или, что то же,*

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots + u_{n+m}(x) + \ldots| < \varepsilon,$$

выполняется при всех значениях n, *бо́льших некоторого числа* N, *определяемого заданием* ε *при произвольном значении* $x \in \mathfrak{M}$.

Это определение можно сформулировать еще так: *ряд равномерно сходится, если последовательность его остаточных членов равномерно сходится к нулю.*

Необходимое и достаточное условие равномерной сходимости ряда выражается критерием Коши: *неравенство*

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots + u_{n+m}(x)| < \varepsilon$$

выполняется при произвольном значении $x \in \mathfrak{M}$, *если* $n > N$, *где число* N *определяется заданием* ε, *а* m *— любое натуральное число.*

Понятие равномерной сходимости применимо к функциональным рядам, члены которых суть функции нескольких аргументов.

Определение. *Функциональный ряд*

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots \qquad (u)$$

называется мажорируемым на множестве $\mathfrak{M}$, *если существует такой сходящийся числовой ряд с неотрицательными членами*

$$c_1 + c_2 + \ldots + c_n + \ldots, \qquad (c)$$

что при всех значениях $x \in \mathfrak{M}$ *абсолютные величины членов ряда* (*u*) *не больше соответствующих членов ряда* (*c*):

$$|u_1(x)| \leqslant c_1, \quad |u_2(x)| \leqslant c_2, \ \ldots, \ |u_n(x)| \leqslant c_n, \ \ldots.$$

Из определения следует, что *всякий ряд, мажорируемый на множестве* $\mathfrak{M}$, *абсолютно сходится на этом множестве.*

Примером ряда, мажорируемого в интервале $(-\infty, +\infty)$, может служить ряд

$$\frac{\sin x}{1^2} + \frac{\sin 2x}{2^2} + \ldots + \frac{\sin nx}{n^2} + \ldots.$$

В самом деле, при всех значениях x выполняется неравенство

$$\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right| \leqslant \frac{1}{n^2}, \quad \text{и ряд} \quad \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots \quad \text{сходится.}$$

Нижеследующая теорема выражает достаточное условие равномерной сходимости функционального ряда.

Теорема. *Всякий функциональный ряд, мажорируемый на множестве* $\mathfrak{M}$, *равномерно сходится на этом множестве.*

Доказательство. В силу сходимости мажорантного ряда (*c*) при всех достаточно больших значениях $n > N$ n-й остаточный член этого ряда будет меньше ε:

$$c_{n+1} + c_{n+2} + \ldots + c_{n+m} + \ldots < \varepsilon.$$

Следовательно, при $n > N$ и при произвольном значении $x \in \mathfrak{M}$ для остаточного члена $R_n(x)$ ряда (*u*) имеют место неравенства:

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &= |u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots + u_{n+m}(x) + \ldots| \leqslant \\ &\leqslant |u_{n+1}(x)| + |u_{n+2}(x)| + \ldots + |u_{n+m}(x)| + \ldots \leqslant \\ &\leqslant c_{n+1} + c_{n+2} + \ldots + c_{n+m} + \ldots < \varepsilon. \end{aligned}$$

Следовательно, ряд (*u*) является равномерно сходящимся, ч. т. д.

Мажорируемость есть достаточное, но не необходимое условие равномерной сходимости, так как *существуют ряды* (см. ниже примеры 4, 6, 7), *равномерно сходящиеся, но не мажорируемые на данном множестве.*

Признак Дирихле.

Если: 1° *частные суммы ряда*

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots, \qquad (u)$$

ограничены в совокупности

$$|s_n(u(x))| < M$$

при всех значениях $x \in \mathfrak{M}$ *и при всех натуральных* n;

2° *последовательность функций* $\{\alpha_n(x)\}$ *на множестве* $\mathfrak{M}$ *убывает*

$$\alpha_1(x) \geqslant \alpha_2(x) \geqslant \ldots \geqslant \alpha_n(x) \geqslant \ldots$$

и равномерно сходится к нулю

$$\alpha_n(x) \rightrightarrows 0,$$

то ряд

$$u_1(x)\alpha_1(x) + u_2(x)\alpha_2(x) + \ldots + u_n(x)\alpha_n(x) + \ldots \qquad (1)$$

равномерно сходится на множестве $\mathfrak{M}$.

Доказательство. Заметим, что отрезки ряда (u) ограничены в совокупности:

$$|s_{n+m}(u(x)) + s_n(u(x))| \leqslant |s_{n+m}(u(x))| + |s_n(u(x))| < 2M.$$

Применив преобразование Абеля к любому отрезку ряда (1), получим (аргумент x для краткости не пишем):

$$u_{n+1}\alpha_{n+1} + u_{n+2}\alpha_{n+2} + \ldots + u_{n+m}\alpha_{n+m} = u_{n+1}(\alpha_{n+1} - \alpha_{n+2}) + (u_{n+1} + u_{n+2})(\alpha_{n+2} - \alpha_{n+3}) + \ldots + (u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+m}) \times (\alpha_{n+m-1} - \alpha_{m+n}) + (u_1 + u_2 + \ldots + u_n)\alpha_{n+m},$$

откуда

$$[u_{n+1}\alpha_{n+1} + u_{n+2}\alpha_{n+2} + \ldots + u_{n+m}\alpha_{n+m}] < 2M[(\alpha_{n+1} - \alpha_{n+2}) + (\alpha_{n+2} - \alpha_{n+3}) + \ldots + (\alpha_{n+m-1} - \alpha_{n+m}) + \alpha_{n+m}] < 2M\alpha_{n+1}$$

(так как $\alpha_i - \alpha_{i+1} > 0$ и $\alpha_i > 0$).

В силу условия $\alpha_n \rightrightarrows 0$, при $n > N$ и при любом $x \in \mathfrak{M}$ будем иметь $\alpha_{n+1} < \frac{\varepsilon}{2M}$. Но тогда при $n > N$ любой отрезок ряда (1) будет по абсолютной величине меньше ε при произвольном $x \in \mathfrak{M}$. Значит, для ряда (1) выполнится критерий равномерной сходимости Коши, ч. т. д.

Так, например, ряд

$$\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \ldots + \frac{\sin nx}{n} + \ldots$$

равномерно сходится на любом сегменте $[\delta, 2\pi - \delta]$, где $\delta > 0$. Достаточно положить $u_n = \sin nx$, $\alpha_n = \frac{1}{n}$ и принять во внимание, что на рассматриваемом сегменте

$$|\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx| = \left|\frac{\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{2n+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}\right| < \frac{1}{\sin\frac{\delta}{2}}.$$

Если члены функционального ряда непрерывны на некотором множестве $\mathfrak{M}$, то частные суммы

$$s_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x)$$

образуют последовательность функций, непрерывных на множестве $\mathfrak{M}$. Обратно, всякая последовательность $\{s_n(x)\}$ непрерывных функций представляется в виде частных сумм ряда

$$s_1(x) + [s_2(x) - s_1(x)] + \ldots + [s_n(x) - s_{n-1}(x)] + \ldots$$

с непрерывными членами.

Если члены ряда непрерывны, то его сумма может не быть непрерывной. В самом деле, предельная функция последовательности непрерывных функций может быть разрывной (см. примеры § 18).

Достаточное условие непрерывности предельной функции (§ 18, стр. 85) применительно к функциональным рядам формулируется так:

Если на множестве $\mathfrak{M}$ функциональный ряд с непрерывными членами

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots$$

равномерно сходится, то его сумма есть непрерывная функция на множестве $\mathfrak{M}$.

Кратко теорему формулируют так: *сумма равномерно сходящегося ряда непрерывных функций непрерывна,*

В самом деле, сумма ряда, будучи предельной функцией для равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций (частных сумм), есть также непрерывная функция (§ 18).

Рассмотрим ряд, члены которого непрерывны в данной точке a:

$$\lim_{x\to a} u_n(x)=u_n(a).$$

Если в точке a сумма ряда также является непрерывной функцией, то

$$\lim_{x\to a} s(x)=s(a), \quad \text{где} \quad s(a)=u_1(a)+u_2(a)+\ldots+u_n(a)+\ldots$$

и, следовательно,

$$\lim_{x\to a} s(x)=u_1(a)+u_2(a)+\ldots+u_n(a)+\ldots,$$

или, что то же,

$$\lim_{x\to a}[u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots]=$$
$$=\lim u_1(x)+\lim u_2(x)+\ldots+\lim u_n(x)+\ldots.$$

Последнее равенство называется формулой почленного перехода к пределу.

Итак, *если сумма ряда с непрерывными в точке a членами непрерывна в точке a, то имеет место формула почленного перехода к пределу.*

Следствие. *Если ряд с непрерывными членами равномерно сходится на множестве $\mathfrak{M}$, то в любой точке $a\in\mathfrak{M}$ применима формула почленного перехода к пределу.*

В самом деле, при условии равномерной сходимости сумма ряда также будет непрерывной функцией.

Теорема. *Если a есть предельная точка множества $\mathfrak{M}$, на котором ряд*

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots \qquad (u)$$

равномерно сходится, и если каждый член ряда имеет предел в точке a:

$$\lim_{x\to a} u_1(x)=c_1, \quad \lim_{x\to a} u_2(x)=c_2, \ldots, \quad \lim_{x\to a} u_n(x)=c_n, \ldots, \qquad (c)$$

то имеет место формула почленного перехода к пределу.

Доказательство. Докажем, что числовой ряд $c_1 + c_2 + \ldots + c_n + \ldots$ сходится. В самом деле, в силу критерия Коши равномерной сходимости неравенство

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots + u_{n+m}(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

будет выполняться при $n > N$, при произвольном натуральном m и при произвольном $x \in \mathfrak{M}$, откуда

$$\lim_{x \to a} |u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots + u_{n+m}(x)| =$$

$$= |c_{n+1} + c_{n+2} + \ldots + c_{n+m}| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Следовательно, для ряда Σc_n выполняется критерий Коши, а потому этот ряд сходится. Пусть $s_n(x)$ и s_n — частные суммы рядов $\Sigma u_n(x)$ и Σc_n.

Имеем:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = s_n(x) + R_n(x) \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} c_n = s_n + R_n.$$

Выберем значение n достаточно большим, $n > N$, так, чтобы выполнялись неравенства:

1°. $|R_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ при любом $x \in \mathfrak{M}$ (это возможно в силу равномерной сходимости ряда (u)).

2°. $|R_n| < \frac{\varepsilon}{3}$ (это возможно в силу сходимости ряда (c)).

Так как $\lim\limits_{x \to a} s_n(x) = s_n$ при любом данном значении n, то будем иметь:

$$|s_n(x) - s_n| < \frac{\varepsilon}{3}$$

в некоторой окрестности U_a точки a (при выбранном n).

Следовательно, при $x \in U_a$ получим:

$$\left| \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) - \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \right| = |(s_n(x) - s_n) + R_n(x) - R_n| \leqslant$$

$$\leqslant |s_n(x) - s_n| + |R_n(x)| + |R_n| < \varepsilon.$$

Значит,

$$\lim_{x \to a} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n, \text{ т. е. } \lim_{x \to a} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim u_n(x), \quad \text{ч. т. д.}$$

Примеры.

1. Геометрическая прогрессия $1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$ равномерно сходится на любом сегменте $[-r, r]$, где $0 < r < 1$.

В самом деле, на данном сегменте члены прогрессии не превосходят по абсолютной величине членов сходящегося ряда $1 + r + r^2 + \ldots + r^n + \ldots$.

Следовательно, на сегменте $[-r, r]$ прогрессия является мажорируемым рядом.

2. Рассмотрим сумму ряда (дзета-функция, имеющая применение в теории чисел)

$$\zeta(x)=\frac{1}{1^x}+\frac{1}{2^x}+\ldots+\frac{1}{n^x}+\ldots,$$

сходящегося в интервале $1<x<+\infty$. Покажем, что $\zeta(x)$ есть непрерывная функция в интервале $(1, +\infty)$. Пусть $x>1$ — любое значение аргумента, а k — произвольное число, взятое при условии $1<k<x$. Так как на полусегменте $k\leqslant x<+\infty$ члены рассматриваемого ряда меньше членов сходящегося ряда

$$\frac{1}{1^k}+\frac{1}{2^k}+\ldots+\frac{1}{n^k}+\ldots,$$

то рассматриваемый ряд является мажорируемым на полусегменте $[k, +\infty)$, потому равномерно сходящимся. Следовательно, функция $\zeta(x)$ непрерывна в точке x.

3. Ряд

$$\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\ldots+\frac{n}{x^n}+\ldots$$

равномерно сходится на множестве точек $|x|>k$, где k — любое число, большее 1. В самом деле, рассматриваемый ряд является мажорируемым, так как $\left|\frac{n}{x^n}\right|<\frac{n}{k^n}$ и ряд $\sum\frac{n}{k^n}$ сходится (достаточно применить признак Даламбера). Сумма рассматриваемого ряда непрерывна в интервалах $(1, +\infty)$ и $(-\infty, -1)$.

4. Положим $u_n(x)=\text{const}=u_n$ на множестве $\mathfrak{M}$. В этом случае функциональный ряд обращается в числовой ряд

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots \qquad (u)$$

Если ряд (u) сходится, то неравенство

$$|R_n(x)|=|u_{n+1}+u_{n+2}+\ldots|<\varepsilon$$

выполняется при всех значениях $x\in\mathfrak{M}$. Следовательно, *всякий ряд с постоянными членами является равномерно сходящимся.*

Если ряд (u) сходится условно, то он, будучи равномерно сходящимся, не является мажорируемым. В самом деле, в противном случае он был бы абсолютно сходящимся.

5. Ряд

$$\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{2^2+x^2}+\frac{1}{3^2+x^2}+\ldots+\frac{1}{n^2+x^2}$$

равномерно сходится в интервале $(-\infty, +\infty)$, так как является мажорируемым в этом интервале:

$$\frac{1}{n^2+x^2}\leqslant\frac{1}{n^2},\quad \text{и ряд}\quad \sum\frac{1}{n^2}\quad \text{сходится.}$$

6. Рассмотрим ряд с непрерывными членами

$$x^2-\frac{x^2}{1+x^2}+\frac{x^2}{(1+x^2)^2}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}x^2}{(1+x^2)^n}+\ldots. \qquad (u)$$

Остаточный член $R_n(x)$ по абсолютной величине (в силу свойств знакопеременных рядов) не больше, чем $|u_{n+1}(x)|$:

$$|R_n(x)|\leqslant\frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}}=\frac{x^2}{1+(1+n)x^2+\ldots+x^{2n+2}}\leqslant\frac{x^2}{(n+1)x^2}=\frac{1}{n+1}.$$

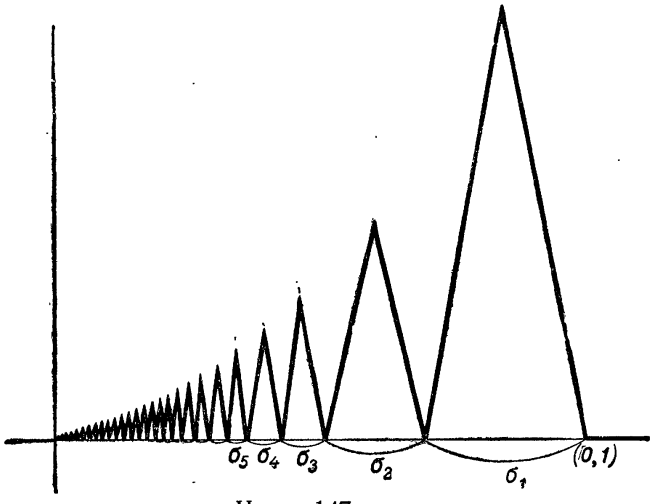
Так как оценка $|R_n(x)| < \frac{1}{n+1}$ имеет место при всех значениях x, то ряд сходится равномерно в интервале $(-\infty, +\infty)$.

Данный ряд (u) сходится абсолютно, так как ряд

$$x^2 + \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{x^2}{(1+x^2)^2} + \ldots + \frac{x^2}{(1+x^2)^n} + \ldots \qquad (|u|)$$

сходится при всех значениях x (пример 2, стр. 273).

Сумма ряда $(|u|)$ с непрерывными членами, равная $1+x^2$ при $x \neq 0$ и 0 при $x = 0$, есть разрывная функция, поэтому ряд $(|u|)$ сходится неравномерно в интервале $(-\infty, +\infty)$.



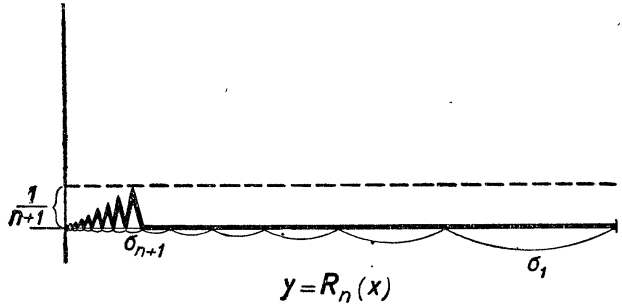
Черт. 147.

Равномерно сходящийся ряд (u) не является мажорируемым, так как в противном случае ряд $(|u|)$ также был бы мажорируемым и, следовательно, равномерно сходящимся.

7. Разобьем сегмент [0, 1] на бесконечное множество сегментов, как показано на чертеже 147. Определим функцию $u_n(x)$ следующим законом соответствия: $u_n(x) = 0$, если точка x не принадлежит сегменту σ_n; на сегменте σ_n функция $u_n(x)$ графически изображается боковыми сторонами равнобедренного треугольника с основанием σ_n и с высотой, равной $\frac{1}{n}$. Сумма ряда с неотрицательными членами

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots \qquad (u)$$

есть ломаная с бесконечным множеством звеньев, изображенная на чертеже 147. Ряд (u) сходится равномерно, ибо $R_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots \leqslant \frac{1}{n+1}$ (черт. 148).



Черт. 148.

Ряд (u) не является мажорируемым. В самом деле, неравенство $u_n(x) \leqslant c_n$ не может выполняться на всем сегменте [0, 1], если $c_n < \frac{1}{n}$, но если $c_n \geqslant \frac{1}{n}$, то ряд Σc_n расходится.

8. Последовательность функции $s_n(x) = \frac{\chi(x)}{n}$ (где $\chi(x)$ — функция Ди-

рихле) равномерно сходится к нулю в интервале $(-\infty, +\infty)$, так как $|s_n(x)| \leqslant \frac{1}{n}$ при всех значениях x. Функциональный ряд

$$\chi(x) + \left[\frac{\chi(x)}{2} - \chi(x)\right] + \left[\frac{\chi(x)}{3} - \frac{\chi(x)}{2}\right] + \ldots + \left[\frac{\chi(x)}{n} - \frac{\chi(x)}{n-1}\right] + \ldots$$

с разрывными членами равномерно сходится к непрерывной функции $s(x) = \text{const} = 0$.

§ 56. Почленное дифференцирование и интегрирование функциональных рядов

Теорема. *Если в промежутке* $<a, b>$:

1° *ряд с дифференцируемыми членами сходится*:

$$s(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots, \qquad (u)$$

2° *ряд, составленный из производных членов ряда* (u)

$$u_1'(x) + u_2'(x) + \ldots + u_n'(x) + \ldots, \qquad (u')$$

сходится равномерно,

то имеет место формула почленного дифференцирования ряда:

$$\frac{ds(x)}{dx} = \frac{du_1(x)}{dx} + \frac{du_2(x)}{dx} + \ldots + \frac{du_n(x)}{dx} + \ldots.$$

Доказательство. Частные суммы $s_n(x)$ ряда (u) образуют сходящуюся в промежутке $<a, b>$ последовательность дифференцируемых функций. Производная функция $s_n'(x)$ есть n-я частная сумма ряда (u'). Значит, $\{s_n(x)\}$ есть сходящаяся последовательность дифференцируемых функций, причем последовательность их производных сходится равномерно. Следовательно, возможен переход к пределу под знаком производной (см. стр. 100)

$$\frac{ds(x)}{dx} = \lim_{n \to +\infty} \frac{ds_n(x)}{dx}.$$

Но

$$\lim \frac{ds_n(x)}{dx} = \lim \left[\frac{du_1(x)}{dx} + \frac{du_2(x)}{dx} + \ldots + \frac{du_n(x)}{dx}\right] =$$

$$= \frac{du_1(x)}{dx} + \frac{du_2(x)}{dx} + \ldots + \frac{du_n(x)}{dx} + \ldots,$$

откуда

$$\frac{ds(x)}{dx} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{du_n(x)}{dx}, \text{ ч. т. д.}$$

Теорема. *Если на сегменте* $[a, b]$ *члены равномерно сходящегося ряда*

$$s(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots \qquad (u)$$

интегрируемы, то его сумма $s(x)$ интегрируема, и имеет место формула почленного интегрирования:

$$\int_a^b s(x)\,dx = \int_a^b u_1(x)\,dx + \int_a^b u_2(x)\,dx + \ldots + \int_a^b u_n(x)\,dx + \ldots.$$

Доказательство. Частные суммы ряда образуют равномерно сходящуюся последовательность интегрируемых функций, поэтому предельная функция (т. е. сумма ряда) интегрируема, и имеет место формула перехода к пределу под знаком интеграла (см. стр. 96):

$$\int_a^b s(x)\,dx = \lim \int_a^b s_n(x)\,dx = \lim \int_a^b [u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)]\,dx =$$

$$= \lim \left[\int_a^b u_1(x)\,dx + \ldots + \int_a^b u_n(x)\,dx \right] =$$

$$= \int_a^b u_1(x)\,dx + \int_a^b u_2(x)\,dx + \ldots + \int_a^b u_n(x)\,dx + \ldots, \text{ ч. т. д.}$$

Следствие. *Если на сегменте $[a, b]$ члены равномерно сходящегося ряда непрерывны, то имеет место формула почленного интегрирования.*

Пусть x_0 — произвольная точка сегмента $[a, b]$.

Теорема. *Если ряд*

$$s(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots \qquad (u)$$

с интегрируемыми на сегменте $[a, b]$ членами равномерно сходится на этом сегменте, то

$$\int_{x_0}^x s(z)\,dz = \int_{x_0}^x u_1(z)\,dz + \int_{x_0}^x u_2(z)\,dz + \ldots + \int_{x_0}^x u_n(z)\,dz + \ldots, \qquad (1)$$

причем ряд в правой части этого равенства равномерно сходится на сегменте $[a, b]$.

Доказательство. По предыдущей теореме, в силу равномерной сходимости ряда на сегменте $[x_0, x]$, возможно почленное его интегрирование (равенство (1)). Для доказательства равномерной сходимости ряда (1) оценим его остаточный член. Так как ряд (u) равномерно сходится, то при $n > N$ и при всех значениях $x \in [a, b]$ будет выполняться неравенство:

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots + u_{n+m}(x) + \ldots| < \frac{\varepsilon}{b-a},$$

но тогда для остаточного члена ряда (1) получим оценку:

$$\left|\int_{x_0}^{x} u_{n+1}(x)\,dx+\int_{x_0}^{x} u_{n+2}(x)\,dx+\ldots\right|\leqslant\left|\int_{x_0}^{x}\left|u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\ldots\right|dx\right|<$$

$$<\frac{\varepsilon}{b-a}\,|x-x_0|<\varepsilon$$

при $n>N$ и при всех значениях $x\in[a,\ b]$, ч. т. д.

Примеры.

1. Сумма ряда

$$f(x)=\frac{\sin x}{1^3}+\frac{\sin 2x}{2^3}+\ldots+\frac{\sin nx}{n^3}+\ldots$$

есть функция, дифференцируемая в интервале $(-\infty,\ +\infty)$, и

$$f'(x)=\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 2x}{2^2}+\ldots+\frac{\cos nx}{n^2}+\ldots.$$

В самом деле, последний ряд равномерно сходится в интервале $(-\infty,\ +\infty)$.

2. Для ряда

$$\frac{\sin x}{1^2}+\frac{\sin 2^3x}{2^2}+\ldots+\frac{\sin n^3x}{n^2}+\ldots,$$

равномерно сходящегося в интервале $(-\infty,\ +\infty)$, формула почленного дифференцирования не имеет места; так как ряд, составленный из производных

$$\cos x+2\cos 2^3x+\ldots+n\cos n^3x+\ldots,$$

не является сходящимся (так, например, этот ряд заведомо расходится в точке $x=0$).

3. Докажем, что дзета-функция

$$\zeta(x)=\frac{1}{1^x}+\frac{1}{2^x}+\ldots+\frac{1}{n^x}+\ldots \tag{1}$$

дифференцируема в интервале $(1,\ +\infty)$

и

$$\zeta'(x)=-\frac{\ln 2}{2^x}-\frac{\ln 3}{3^x}-\ldots-\frac{\ln n}{n^x}-\ldots. \tag{2}$$

В самом деле, пусть $x>1$ — любое значение аргумента, а k — произвольное число, взятое при условии $1<k<x<+\infty$.

Члены ряда (2) по абсолютной величине меньше членов числового ряда $\sum\frac{\ln n}{n^k}$. Последний ряд сходится, в чем можно убедиться, применив интегральный признак

$$\int_1^{+\infty}\frac{\ln t}{t^k}\,dt=\left[\frac{\ln t}{(1-k)\,t^{k-1}}\right]_1^{+\infty}+\int_1^{+\infty}\frac{dt}{(k-1)\,t^k}=\frac{1}{(k-1)^2}\qquad\text{(сходится)}.$$

Следовательно, ряд (2) является мажорируемым в интервале $k<x<+\infty$, а потому возможно почленное дифференцирование ряда (1).

4. Ряд

$$s(\varphi)=1+r\cos\varphi+r^2\cos 2\varphi+\ldots+r^n\cos n\varphi+\ldots,$$

где $0 < r < 1$ — данное число, равномерно сходится на сегменте $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, так как он является мажорируемым $|r^n \cos n\varphi| \leqslant r^n$, и ряд Σr^n (прогрессия) сходится. Почленным интегрированием получим:

$$\int_0^{2\pi} s(\varphi)\,d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi + r\int_0^{2\pi} \cos\varphi\,d\varphi +$$

$$+ r^2\int_0^{2\pi} \cos 2\varphi\,d\varphi + \ldots + r^n\int_0^{2\pi} \cos n\varphi\,d\varphi + \ldots = 2\pi.$$

§ 57. Степенные ряды

Определение. *Степенным рядом называется ряд вида*

$$a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n + \ldots;$$

числа $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ *называются коэффициентами степенного ряда.*

Положив $x - a = \xi$, получим степенной ряд, расположенный по степеням ξ:

$$a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + \ldots + a_n\xi^n + \ldots;$$

поэтому, не умаляя общности, достаточно ограничиться рассмотрением степенных рядов

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots, \qquad (a)$$

расположенных по степеням аргумента.

Для произвольного степенного ряда (a) возможен один из следующих трех случаев:

1°. *Ряд сходится при всех значениях* x.

Примером может служить ряд

$$1 + x + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots.$$

В самом деле, применив признак Даламбера, получим:

$$\lim\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_nx^n}\right| = \lim\frac{|x|}{n+1} = 0$$

при всех значениях x. Поэтому ряд сходится в интервале $(-\infty, +\infty)$.

2°. *Существуют значения* x, *при которых ряд сходится, и значения, при которых ряд расходится.*

Примером может служить геометрическая прогрессия:

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots,$$

сходящаяся при $|x| < 1$ и расходящаяся при $|x| \geqslant 1$.

3°. *Ряд сходится лишь в одной точке* $x = 0$.

Примером может служить ряд

$$1 + 2!x^2 + \ldots + n!x^n + \ldots.$$

Так как при $x \neq 0$ имеем $\lim\limits_{n\to+\infty} |n!x^n| = +\infty$, то не выполнено необходимое условие сходимости $\lim u_n = 0$.

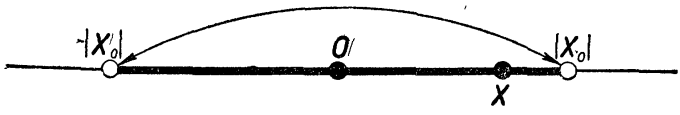
В дальнейшем случай 3° мы будем исключать из рассмотрения.

Теорема (Абеля). *Если степенной ряд* (a) *сходится в точке* $x_0 \neq 0$, *то он сходится абсолютно в интервале* $-|x_0| < x < |x_0|$.

Доказательство. Так как по условию числовой ряд

$$a_0 + a_1x_0 + \ldots + a_nx_0^n + \ldots$$

сходится, то его члены образуют ограниченную последовательность; поэтому существует такое число $M > 0$, что $|a_nx_0^n| < M$ при



Черт. 149.

любом натуральном n. Пусть $|x| < |x_0|$ (черт. 149). Так как

$$|a_nx^n| = |a_nx_0^n| \left|\frac{x}{x_0}\right|^n < M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n,$$

то члены ряда (a) в точке x меньше членов сходящейся знакоположительной геометрической прогрессии:

$$M + M\left|\frac{x}{x_0}\right| + M\left|\frac{x}{x_0}\right|^2 + \ldots + M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n + \ldots.$$

Следовательно, ряд Σa_nx^n в точке x сходится абсолютно.

Итак, ряд (a) сходится абсолютно, если $|x| < |x_0|$, ч. т. д.

Следствие. *Если в точке* x_0 *степенной ряд* (a) *расходится или сходится условно, то данный ряд расходится при любом значении* x, *большем по абсолютной величине, чем* x_0. В самом деле, если $|x| > |x_0|$ и ряд сходится в точке x, то он сходится абсолютно в точке x_0, что противоречит условию; следовательно, ряд расходится в точке x.

Теорема. *Для всякого степенного ряда, сходящегося хотя бы в одной точке* $x \neq 0$,

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots, \qquad (a)$$

существует такой интервал $(-R, R)$, *что ряд* (a) *сходится абсолютно во всякой внутренней и расходится во всякой внешней точке этого интервала.*

Интервал $(-R, R)$ *называется интервалом сходимости ряда* (a), R *называется радиусом сходимости этого ряда.*

Доказательство. Если ряд (a) сходится при всех значениях x, то он сходится абсолютно в любой точке x. В самом деле, будучи сходящимся в любой точке, ряд (a) сходится в точке N

(в частности), где N — произвольное положительное число, взятое при условии $N > |x|$, но тогда (по теореме Абеля) ряд сходится абсолютно в точке x. Итак, ряд сходится абсолютно в интервале $(-\infty, +\infty)$, в этом случае $R = +\infty$.

Предположим, что существуют точки, в которых ряд сходится, и точки, в которых ряд расходится. Рассмотрим данный ряд на полусегменте $0 \leqslant x < +\infty$. Пусть $\mathfrak{M}$ есть множество всех неотрицательных значений x (точек сходимости), при которых ряд (a) сходится. Множество $\mathfrak{M}$ ограничено. В самом деле, если в точке $y > 0$ ряд расходится (такие точки существуют, по предположению), то для произвольной точки $x \in \mathfrak{M}$ имеет место неравенство $x < y$. Обозначим через R верхнюю грань множества $\mathfrak{M}$, докажем, что R есть радиус сходимости. Если $R = \sup \mathfrak{M}$, то в любой точке $x < R$ ряд сходится абсолютно. В самом деле, в силу свойств верхней грани полуинтервал $(x, R]$ содержит хотя бы одну точку сходимости $x_0 \in \mathfrak{M}$. Но если в точке x_0 ряд (a) сходится, то он сходится абсолютно в точке x.

В любой точке $x > R$ ряд расходится. В самом деле, если x есть точка сходимости, то $x \in \mathfrak{M}$, но ни одно число множества $\mathfrak{M}$ не может быть большим его верхней грани R.

Будучи абсолютно сходящимся в любой точке полусегмента $0 \leqslant x < R$, ряд сходится абсолютно и в любой точке полуинтервала $(-R, 0]$. Будучи расходящимся в интервале $(R, +\infty)$, ряд (a) расходится также и в интервале $(-\infty, -R)$. Следовательно, ряд (a) сходится абсолютно в интервале $(-R, R)$ и расходится в интервалах $(R, +\infty)$ и $(-\infty, -R)$, ч. т. д.

Если ряд (a) сходится лишь в одной точке $x = 0$, то и этот случай можно не исключать из рассмотрения, условившись считать, что радиус сходимости равен нулю, $R = 0$.

В концах интервала сходимости $x = \pm R$ характер степенного ряда может быть различным: ряд может сходиться либо абсолютно, либо условно, либо расходиться (см. ниже примеры 1—5). Заметим, что если в одном из концов интервала сходимости ряд сходится абсолютно, то он сходится абсолютно и в другом конце. В самом деле, в точках $\pm R$ абсолютные величины членов ряда имеют одинаковые значения.

Интервал сходимости на практике во многих случаях возможно отыскать при помощи признаков абсолютной сходимости числовых рядов. Допустим, например, что существует предел $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = l$, тогда $\lim \sqrt[n]{|a_n x^n|} = l|x|$; следовательно, по признаку Коши ряд сходится абсолютно, если $l|x| < 1$, откуда $|x| < \frac{1}{l}$ и $R = \frac{1}{l}$.

Аналогично, если существует предел $\lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = l$, то, применив признак Даламбера, получим $R = \frac{1}{l}$.

Рассмотрим последовательность чисел

$$|a_1|, \quad \sqrt{|a_2|}, \quad \sqrt[3]{|a_3|}, \ldots, \sqrt[n]{|a_n|}, \ldots.$$

Пусть $\mathfrak{M}$ есть множество всех предельных точек (конечных или бесконечных) этой последовательности. Обозначим через $l = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}$ верхнюю грань (конечную или бесконечную) множества $\mathfrak{M}$. Заметим, что l есть предельная точка последовательности $\left\{\sqrt[n]{|a_n|}\right\}$. В самом деле, любая окрестность точки l содержит точки (хотя бы одну) множества $\mathfrak{M}$, а потому эта окрестность содержит также и точки рассматриваемой последовательности. Точку l можно характеризовать следующим свойством: *l есть самая правая предельная точка последовательности* $\left\{\sqrt[n]{|a_n|}\right\}$.

Теорема Коши-Адамара. *Радиус сходимости степенного ряда*

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots \qquad (a)$$

равен

$$\frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}} = R.$$

Примечание. При этом условимся считать

$$\frac{1}{l} = +\infty, \text{ если } \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = l = 0, \text{ и } \frac{1}{l} = 0, \text{ если } l = +\infty.$$

Доказательство. Предположим для определенности, что $0 < l < +\infty$. Для n-го члена ряда (a) имеем:

$$\sqrt[n]{|a_n x^n|} = \sqrt[n]{|a_n|}\,|x|.$$

Так как l есть самая правая предельная точка последовательности $\left\{\sqrt[n]{|a_n|}\right\}$, то интервал $(l+\varepsilon, +\infty)$ может содержать лишь конечное множество членов этой последовательности, а потому при всех достаточно больших значениях $n > N$ будет выполняться неравенство:

$$\sqrt[n]{|a_n|} < l + \varepsilon, \quad \text{откуда} \quad \sqrt[n]{|a_n x^n|} < (l+\varepsilon)\,|x|.$$

Если $|x| < \frac{1}{l} = R$, то, выбрав число ε при условии $l + \varepsilon < \frac{1}{|x|}$ $\left(\text{т. е. } \varepsilon < \frac{1}{|x|} - l\right)$, при $n > N$ получим $\sqrt[n]{|a_n x^n|} < (l+\varepsilon)\,|x| < 1$. Следовательно, в силу признака Коши при $|x| < R$ ряд (a) сходится абсолютно.

Если $|x| > \frac{1}{l} = R$, то $l > \frac{1}{|x|}$. Так как l есть предельная точка последовательности $\left\{\sqrt[n]{|a_n|}\right\}$, то существует бесконечное множество значений n, при которых $\sqrt[n]{|a_n|} > \frac{1}{|x|}$, но тогда

$$|a_n x^n| = |a_n|\,|x^n| > 1$$

для бесконечного множества значений n, а потому не выполняется необходимое условие сходимости $\lim a_n x^n = 0$. Следовательно, при $|x| > R$ ряд (a) расходится. Значит, R есть радиус сходимости.

Пусть $l = 0$; тогда при всех достаточно больших значениях n имеем $\sqrt[n]{|a_n|}\,|x| < \varepsilon\,|x| < 1$, если выбрать $\varepsilon < \frac{1}{|x|}$. Следовательно, ряд сходится при всех значениях x.

Если $l = +\infty$, то существует бесконечное множество значений n, при которых члены последовательности $\left\{\sqrt[n]{|a_n|}\right\}$ больше, чем $\frac{1}{|x|}$ (где $x \neq 0$), но тогда $|a_n x^n| > 1$, а потому ряд расходится при всех значениях $x \neq 0$, ч. т. д.

Примеры.

1. Ряд $1^k + 2^k x + \ldots + n^k x^n + \ldots,$

где $k > 0$, имеет радиус сходимости, равный 1:

$$\lim \left| \frac{(n+1)^k x^{n+1}}{n^k x^n} \right| = |x|.$$

Ряд сходится абсолютно, если $|x| < 1$.
В концах интервала сходимости $x = \pm 1$ ряд расходится.

2. Ряд

$$x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n} + \ldots$$

имеет радиус сходимости, равный 1, так как $\lim \left| \frac{x^{n+1} n}{(n+1) x^n} \right| = |x|$. В точке $x = 1$ ряд расходится, в точке $x = -1$ ряд сходится условно.

3. Ряд

$$x + \frac{x^2}{2^2} + \ldots + \frac{x^n}{n^2} + \ldots$$

имеет радиус сходимости, равный 1, так как

$$\lim \left| \frac{n^2 x^{n+1}}{(n+1)^2 x^n} \right| = |x|.$$

В концах интервала сходимости ряд сходится абсолютно, так как сходится ряд $\sum \frac{1}{n^2}$.

4. Ряды

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$$

и

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$$

сходятся (каждый) в интервале $(-\infty, +\infty)$, т. е. $R = +\infty$.

Так, применив, например, к первому ряду признак Даламбера, получим:

$$\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{x^{2n+3} (2n+1)!}{(2n+3)! x^{2n+1}} \right| = \lim \left| \frac{x^2}{(2n+2)(2n+3)} \right| = 0.$$

5. Рассмотрим ряд

$$1 + \frac{1}{1!} x + \frac{2^2}{2!} x^2 + \ldots + \frac{n^n}{n!} x^n + \ldots.$$

Применив признак Даламбера, получим:

$$\lim \frac{(n+1)^{n+1} n!}{(n+1)! n^n} |x| = \lim |x| \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = |x| e.$$

Следовательно, радиус сходимости рассматриваемого ряда равен $\frac{1}{e}$.

В точке $x=\frac{1}{e}$ получим расходящийся ряд, так как (признак Раабе)

$$\lim n\left[1-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\frac{1}{e}\right]=\frac{1}{e}\lim n\left[e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]=\frac{1}{2}<1.$$

В самом деле,

$$\lim n\left[e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]=\lim_{x\to 0}\frac{e-(1+x)^{\frac{1}{x}}}{x}=\frac{e}{2}$$

(для вычисления последнего предела достаточно применить правило Лопиталя; см. том I, § 89, пример 2).

При $x=-\frac{1}{e}$ получим ряд:

$$1-\frac{1}{1!e}+\frac{2^2}{2!e^2}-\ldots+(-1)^n\frac{n^n}{n!e^n}+\ldots.$$

Так как отношение $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{e}<1$, то абсолютные величины членов получившегося знакопеременного ряда убывают. Как показало применение признака Раабе, расходящийся ряд $\sum\frac{n^n}{n!e^n}$ сравним с рядом $\sum\frac{1}{\sqrt{n}}$, поэтому $\lim\frac{n^n}{n!e^n}=0$. Следовательно (в силу признака Лейбница) рассматриваемый знакопеременный ряд сходится (условно).

6. Рассмотрим ряд

$$1+\frac{x}{3}+\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^3}{3^3}+\frac{x^4}{2^4}+\ldots+\frac{x^{2n-1}}{3^{2n-1}}+\frac{x^{2n}}{2^{2n}}+\ldots,$$

Имеем:

$$\sqrt[n]{a_n}=\begin{cases}\frac{1}{2} & \text{(если } n \text{ четное)},\\ \frac{1}{3} & \text{(если } n \text{ нечетное)}.\end{cases}$$

Следовательно, $R=\frac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{a_n}}=2$ (теорема Коши-Адамара).

§ 58. Равномерная сходимость степенного ряда

Теорема. *Степенной ряд*

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots \qquad (a)$$

сходится равномерно на любом сегменте $[a, b]$, *содержащемся в интервале сходимости.*

Доказательство. Если $[a, b]\subset(-R, R)$, то имеют место неравенства $-R<a<b<R$.

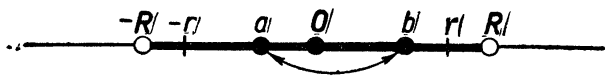
Пусть r — любое положительное число, выбранное при условии $-R<-r<a<b<r<R$ (черт. 150).

В точке $x=r$ ряд (a) сходится абсолютно, т. е. сходится числовой ряд

$$|a_0|+|a_1|r+|a_2|r^2+\ldots+|a_n|r^n+\ldots \qquad (1)$$

с неотрицательными членами.

Если $a\leqslant x\leqslant b$, то $|x|<r$ и $|a_nx^n|<|a_n|r^n$, следовательно, на сегменте $[a, b]$ ряд (a) является мажорируемым, так как его члены меньше членов ряда (1). Значит, ряд (a) сходится равномерно на сегменте $[a, b]$, ч. т. д.



Черт. 150.

Ряд (a) может не быть равномерно сходящимся во всем интервале сходимости. Так, например, для геометрической прогрессии

$$1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots$$

радиус сходимости равен 1. При $|x|<1$ для остаточного члена имеем выражение:

$$R_n(x)=x^{n+1}+x^{n+2}+\ldots=\frac{x^{n+1}}{1-x}.$$

Так как $\lim\limits_{x\to 1}R_n(x)=+\infty$, то неравенство $|R_n(x)|<\varepsilon$ не может выполняться во всем интервале $(-1, 1)$ ни при каком данном значении n.

Следовательно, в интервале $(-1, 1)$ прогрессия сходится неравномерно. На любом сегменте $-r\leqslant x\leqslant r$, где $0<r<1$, имеем $|R_n(x)|\leqslant\frac{r^{n+1}}{1-r}$; неравенство $|R_n(x)|<\varepsilon$ выполняется при всех значениях x, если $\frac{r^{n+1}}{1-r}<\varepsilon$, т. е. если

$$n>\frac{\ln\varepsilon+\ln(1-r)}{\ln r}-1,$$

поэтому на сегменте $[-r, r]$ прогрессия сходится равномерно.

Теорема. *В интервале сходимости сумма степенного ряда есть непрерывная функция.*

Доказательство. Пусть x — произвольная точка интервала сходимости. Рассмотрим любой сегмент $[-r, r]$, содержащийся в интервале сходимости, для которого x есть внутренняя точка. В силу равномерной сходимости степенного ряда на сегменте $[-r, r]$ его сумма есть функция, непрерывная в точке x. Итак, сумма $s(x)$ степенного ряда непрерывна в каждой точке $x\in(-R, R)$. Следовательно, $s(x)$ есть функция, непрерывная в интервале сходимости.

Вторая теорема Абеля. *Если степенной ряд Σa_nx^n сходится в конце интервала сходимости $x=R$ (или $x=-R$), то он сходится равномерно на сегменте* $[0, R]$ (или $[-R, 0]$).

Доказательство. Предположим для определенности, что ряд

$$a_0 + a_1R + a_2R^2 + \ldots + a_nR^n + \ldots$$

сходится. Следовательно, при $n > N$ и при произвольном натуральном p выполняется неравенство:

$$s_{n,p} = |a_{n+1}R^{n+1} + a_{n+2}R^{n+2} + \ldots + a_{n+p}R^{n+p}| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Имеем:

$$a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n + \ldots = a_0 + a_1R\left(\frac{x}{R}\right) + \ldots + a_nR^n\left(\frac{x}{R}\right)^n + \ldots.$$

Применим преобразование Абеля:

$$a_{n+1}R^{n+1}\left(\frac{x}{R}\right)^{n+1} + \ldots + a_{n+p}R^{n+p}\left(\frac{x}{R}\right)^{n+p} = s_{n,1}\left[\left(\frac{x}{R}\right)^{n+1} - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{x}{R}\right)^{n+2}\right] + s_{n,2}\left[\left(\frac{x}{R}\right)^{n+2} - \left(\frac{x}{R}\right)^{n+3}\right] + \ldots + s_{n,p-1}\left[\left(\frac{x}{R}\right)^{n+p-1} - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{x}{R}\right)^{n+p}\right] + s_{n,p}\left(\frac{x}{R}\right)^{n+p} = \left(1 - \frac{x}{R}\right)\left[s_{n,1}\left(\frac{x}{R}\right)^{n+1} + s_{n,2}\left(\frac{x}{R}\right)^{n+2} + \ldots\right.$$

$$\left. \ldots + s_{n,p-1}\left(\frac{x}{R}\right)^{n+p-1}\right] + s_{n,p}\left(\frac{x}{R}\right)^{n+p},$$

откуда

$$\left|a_{n+1}x^{n+1} + \ldots + a_{n+p}x^{n+p}\right| < \frac{\varepsilon}{2}\left|1 - \frac{x}{R}\right|\left|\left(\frac{x}{R}\right)^{n+1} + \left(\frac{x}{R}\right)^{n+2} + \ldots\right| +$$

$$+ \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{x}{R}\right)^{n+p} < \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{x}{R}\right)^{n+1} + \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{x}{R}\right)^{n+p} < \varepsilon$$

при $n > N$ и при всех значениях x на сегменте $[0, R]$.

Следовательно, выполняется критерий равномерной сходимости Коши, а потому на сегменте $[0, R]$ ряд сходится равномерно, ч. т. д.

Следствие. *Если степенной ряд $s(x) = \sum a_nx^n$ сходится в конце интервала сходимости, то его сумма есть функция, непрерывная в этом конце.*

Так, если ряд сходится в точке $x = R$, то имеем:

$$\lim_{x \to R} s(x) = \lim_{x \to R-} s(x) = s(R) = a_0 + a_1R + a_2R^2 + \ldots + a_nR^n + \ldots$$

(правый предел $\lim\limits_{x \to R+} s(R)$ не имеет смысла).

§ 59. Арифметические действия над степенными рядами

Рассмотрим совместно два степенные ряда:

$$f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n + \ldots \qquad (a)$$

и

$$\varphi(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_nx^n + \ldots \qquad (b)$$

в интервале $(-R, R)$, являющемся общей частью их интервалов сходимости. Если R_a и R_b — радиусы сходимости данных рядов, то R

есть наименьший из этих радиусов. В интервале $(-R, R)$ каждый из рядов (a) и (b) абсолютно сходится.

Ряд-сумма (разность), а также ряд-произведение данных рядов (a) и (b) суть степенные ряды, сходящиеся абсолютно в интервале $(-R, R)$ и дающие представление суммы (разности) и произведения функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ в виде степенных рядов:

$$f(x) \pm \varphi(x) = (a_0 \pm b_0) + (a_1 \pm b_1)x + \ldots + (a_n \pm b_n)x^n + \ldots$$

$$f(x)\varphi(x) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + \ldots + (a_0b_n + a_1b_{n-1} + a_2b_{n-2} + \ldots + a_nb_0)x^n + \ldots.$$

Итак, *в интервале, являющемся общей частью интервалов сходимости двух степенных рядов, эти ряды можно складывать, вычитать и умножать по тем же правилам, по которым производятся соответствующие действия над многочленами, расположенными по убывающим степеням аргумента.*

Пример.

Если

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots,$$

то, умножив этот ряд на

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots,$$

получим:

$$\frac{f(x)}{1-x} = a_0 + (a_0 + a_1)x + (a_0 + a_1 + a_2)x^2 + \ldots + (a_0 + a_1 + \ldots + a_n)x^n + \ldots.$$

Это равенство справедливо в общей части интервала $(-R, R)$ сходимости данного ряда и интервала $(-1, 1)$. В частности, в интервале $(-1, 1)$ имеем:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + (n-1)x^n + \ldots,$$

$$\frac{1}{(1-x)^3} = 1 + (1+2)x + \ldots + [1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1)]x^n + \ldots =$$

$$= 1 + 3x + \ldots + \frac{n(n-1)}{2}x^n + \ldots.$$

§ 60. Почленное дифференцирование и интегрирование степенных рядов

Теорема. *Если радиус сходимости R степенного ряда*

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots \qquad (a)$$

отличен от нуля, $R \neq 0$, то сумма степенного ряда в интервале сходимости есть дифференцируемая функция и имеет место формула почленного дифференцирования:

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + \ldots + na_nx^{n-1} + \ldots.$$

Доказательство. Докажем, что степенной ряд

$$a_1+2a_2x+\ldots+na_nx^{n-1}+\ldots, \qquad (a')$$

составленный из производных членов ряда (a), имеет тот же интервал сходимости $(-R, R)$, что и данный ряд (a).

Пусть x — произвольная точка интервала сходимости: $|x|<R$, а r — любое число, взятое при условии $|x|<r<R$.

Так как ряд (a) при $x=r$ сходится, то последовательность его членов ограничена: $|a_n|r^n<M$ (при произвольном натуральном n). Взяв члены ряда (a') по абсолютной величине, перепишем полученный ряд следующим образом:

$$|a_1|r\frac{1}{r}+2|a_2|r^2\frac{1}{r}\left|\frac{x}{r}\right|+\ldots+n|a_n|r^n\frac{1}{r}\left|\frac{x}{r}\right|^{n-1}+\ldots.$$

Члены этого ряда меньше соответствующих членов ряда

$$M\frac{1}{r}+2M\frac{1}{r}\left|\frac{x}{r}\right|+\ldots+nM\frac{1}{r}\left|\frac{x}{r}\right|^{n-1}+\ldots.$$

Последний ряд сходится, в чем можно убедиться, применив признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(n+1)M}{r}\left|\frac{x}{r}\right|^n\right]:\left[\frac{n}{r}M\left|\frac{x}{r}\right|^{n-1}\right]=\lim\frac{n+1}{n}\left|\frac{x}{r}\right|=\left|\frac{x}{r}\right|<1.$$

Следовательно, ряд (a') сходится абсолютно при любом $x\in(-R, R)$. Итак, радиус сходимости R' ряда (a') не меньше R. Нетрудно видеть, что R' не может быть больше, чем R. В самом деле, во всякой точке x, в которой абсолютно сходится ряд (a'), сходится также и ряд

$$|a_1|\cdot|x|+2|a_2|\cdot|x|^2+\ldots+n|a_n|\cdot|x|^n+\ldots.$$

В силу неравенств $|a_n|\cdot|x|^n<n|a_n|\cdot|x|^n$ в точке x ряд (a) и подавно абсолютно сходится, а потому $R'\leqslant R$. Следовательно, ряды (a) и (a') имеют один и тот же радиус сходимости $R'=R$.

Всякая точка $x\in(-R, R)$ содержится в интервале сходимости вместе с некоторым сегментом $[a, b]$:

$$-R<a<x<b<R.$$

Ряд (a') сходится равномерно на сегменте $[a, b]$, а потому имеет место формула почленного дифференцирования ряда (a).

Итак, в любой точке $x\in(-R, R)$ сумма $f(x)$ ряда (a) имеет производную $f'(x)$, равную сумме ряда (a'), ч. т. д.

Примечание. Равенство радиусов сходимости рядов (a) и (a') можно установить, применив непосредственно теорему Коши-Адамара к ряду Σna_nx^n,

имеющему тот же характер, что и ряд (a'). В самом деле,

$$R' = \frac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{n\,|a_n|}} = \frac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}} = R$$

$\left(\text{достаточно заметить, что } \lim \sqrt[n]{n} = 1\right)$.

Следствие. *Если радиус сходимости R степенного ряда (a) отличен от нуля, то сумма $f(x)$ этого ряда в интервале сходимости имеет производные любого порядка. Производная $f^{(k)}(x)$ равна сумме ряда, полученного k-кратным почленным дифференцированием ряда (a).*

В самом деле, по доказанному производная $f'(x)$ изображается степенным рядом (a'):

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + \ldots + na_nx^{n-1} + \ldots$$

с интервалом сходимости $(-R, R)$. Следовательно, в интервале сходимости производная $f'(x)$ есть дифференцируемая функция, ее производная равна сумме степенного ряда

$$f''(x) = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3x + \ldots + n(n-1)\,a_nx^{n-2} + \ldots \qquad (a'')$$

с тем же интервалом сходимости $(-R, R)$. На том же основании ряд (a'') в интервале $(-R, R)$ допускает почленное дифференцирование и т. д. Применением полной индукции устанавливается существование производной $f^{(k)}(x)$ любого порядка:

$$f^{(k)}(x) = a_k k! + \ldots + n(n-1)\ldots(n-k+1)\,a_nx^{n-k} + \ldots$$

в интервале $(-R, R)$.

Примеры.

1. Так как радиус сходимости ряда

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

равен $+\infty$, то функция $f(x)$ дифференцируема в любой точке x:

$$f'(x) = 1 + \frac{2x}{2!} + \ldots + \frac{nx^{n-1}}{n!} + \ldots = 1 + x + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots = f(x)$$

в интервале $(-\infty, +\infty)$.

Докажем, что $f(x) = e^x$. В самом деле, из тождества $f(x) = f'(x)$ следует:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 1; \quad \text{откуда} \quad \ln f(x) = \int_0^x dx + C = x + C$$

или $f(x) = e^Ce^x$. Для определения числа C положим $x = 0$, получим $f(0) = 1 = e^C$, а потому $f(x) = e^x$.

2. Рассмотрим ряд

$$f(x) = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{1\cdot 2}x^2 + \ldots + \frac{k(k-1)\ldots(k-n+1)}{n!}x^n + \ldots,$$

где k — любое действительное число. Этот ряд называется биномиальным рядом. Если k — натуральное число, то ряд обращается в многочлен степени k, так как все коэффициенты ряда при $n > k$ обращаются в нуль. В этом случае $f(x) = (1+x)^k$. Пусть $k \neq 0, 1, 2, 3, \ldots$; радиус сходимости биномиального ряда равен 1 (достаточно применить признак Даламбера), область определения функции $f(x)$ есть интервал $(-1, 1)$. Дифференцируя почленно, получим ряд:

$$f'(x) = k + \frac{k(k-1)}{1!}x + \ldots + \frac{k(k-1)\ldots(k-n+1)}{(n-1)!}x^{n-1} + \ldots.$$

Умножив на x, составим ряд-сумму:

$$f'(x) + xf'(x) = k + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{k(k-1)\ldots(k-n)}{n!} + \frac{k(k-1)\ldots(k-n+1)}{(n-1)!}\right]x^n =$$

$$= k\left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{k(k-1)\ldots(k-n+1)}{n!}x^n\right] = kf(x).$$

Из этого соотношения находим:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{k}{1+x} \quad \text{и} \quad \ln f(x) = \int_0^x \frac{k}{1+x}\,dx = k\ln(1+x) + C,$$

откуда $f(x) = e^C(1+x)^k$; положив $x = 0$, получим $f(0) = 1 = e^C$, а потому $f(x) = (1+x)^k$ в интервале $(-1, 1)$.

Теорема. *На любом сегменте $[a, b]$, содержащемся в интервале сходимости $(-R, R)$, степенной ряд (a) можно интегрировать почленно.*

В частности,

$$\int_0^x f(x)\,dx = a_0x + \frac{a_1}{2}x^2 + \ldots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + \ldots \qquad (1)$$

в интервале $(-R, R)$; радиус сходимости последнего ряда равен R.

Доказательство. Так как степенной ряд равномерно сходится на всяком сегменте, содержащемся в интервале сходимости, то на любом таком сегменте возможно почленное интегрирование ряда. В частности, почленное интегрирование возможно на любом сегменте $[0, x]$ (положительном или отрицательном), если только $|x| < R$. Следовательно, ряд

$$a_0x + a_1\frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + \ldots$$

сходится в каждой точке интервала $(-R, R)$, а потому радиус его сходимости R_1 не меньше R. Так как данный ряд (a) может быть

получен почленным дифференцированием ряда $\sum \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$, то оба эти ряда имеют один и тот же интервал сходимости $R_1 = R$, ч. т. д.

Примечания. I. Если ряд сходится в конце интервала сходимости $x = R$, то в силу равномерной сходимости (вторая теорема Абеля) возможно почленное интегрирование ряда на сегменте $[0, R]$.

II. Если ряд $a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \ldots + \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + \ldots$ сходится в точке $x = R$, то (вторая теорема Абеля) его сумма непрерывна в точке R, а потому возможен почленный переход к пределу в равенстве (1):

$$\lim_{x \to R} \int_0^x f(x)\,dx = \int_0^R f(x)\,dx = a_0 R + \frac{a_1}{2} R^2 + \ldots.$$

Так, например, ряд

$$x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots,$$

полученный почленным интегрированием прогрессии

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots,$$

сходится в точке $x = 1$ (признак Лейбница). Интегрируя почленно на сегменте $[0, 1]$, получим сумму ряда Лейбница:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2 = \int_0^1 dx - \int_0^1 x\,dx + \ldots + (-1)^n \int_0^1 x^n\,dx + \ldots =$$

$$= 1 - \frac{1}{2} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n+1} + \ldots.$$

§ 61. Ряд Тейлора

Предположим, что функция $f(x)$ определена в окрестности точки a и в точке a имеет конечные производные любого порядка; в таком случае говорят, что функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема в точке a.

Определение. *Рядом Тейлора бесконечно дифференцируемой функции $f(x)$ в точке a называется степенной ряд*

$$f(a) + f'(a)(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots. \qquad (T)$$

Согласно этому определению частные суммы ряда Тейлора образуют последовательность многочленов Тейлора функции $f(x)$ в точке a.

Ряд Тейлора может иметь радиус сходимости (конечный или бесконечный), отличный от нуля, при этом в интервале сходимости сумма $T(x)$ ряда Тейлора может быть равной функции $f(x)$, а может быть отличной от этой функции. Ряд Тейлора может иметь

радиус сходимости, равный нулю. Ниже даны примеры (см. примеры в конце параграфа), показывающие, что все указанные случаи возможны.

Как известно (том I, § 102), разность между функцией $f(x)$ и n-й частной суммой ряда Тейлора называется остаточным членом формулы Тейлора. Не следует смешивать два различные понятия: «остаточный член формулы Тейлора» и «остаточный член ряда Тейлора». Остаточный член формулы Тейлора $f(x)-T_n(x)$ имеет смысл для всякой функции, бесконечно дифференцируемой в точке a. Остаточный член ряда Тейлора имеет смысл, если ряд Тейлора сходится. Этот остаточный член есть разность между суммой ряда Тейлора $T(x)$ и многочленом Тейлора $T_n(x)$:

$$T(x)-T_n(x).$$

Оба остаточные члена равны:

$$T(x)-T_n(x)=f(x)-T_n(x),$$

если $T(x)=f(x)$, *т. е. если ряд Тейлора сходится к функции* $f(x)$.

Теорема. *Ряд Тейлора в точке* a *функции* $f(x)$ *сходится в некотором промежутке к функции* $f(x)$ *в том и только в том случае, когда последовательность остаточных членов формулы Тейлора сходится к нулю в этом промежутке.*

Иными словами, необходимым и достаточным условием наличия равенства

$$f(x)=f(a)+(x-a)f'(a)+\ldots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+\ldots$$

в некотором промежутке является условие $\lim\limits_{n\to+\infty}R_n(x)=0$ (в данном промежутке).

Доказательство. В самом деле, из равенства

$$f(x)-T_n(x)=R_n(x)$$

следует, что $\lim\limits_{n\to+\infty}T_n(x)=f(x)$ в том и только в том случае, когда $\lim\limits_{n\to+\infty}R_n(x)=0$, ч. т. д.

Если функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема в точке 0, то ряд Тейлора в точке $a=0$ принимает вид

$$f(0)+xf'(0)+\ldots+x^n\frac{f^{(n)}(0)}{n!}+\ldots.$$

Этот ряд называется рядом Маклорена функции $f(x)$; он наиболее часто встречается в практике.

Ниже приводятся разложения простейших элементарных функций в ряд Маклорена, при этом мы будем пользоваться формулами, выведенными в первом томе, § 103.

1°. Для показательной функции имеем:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}e^{\theta x}}{(n+1)!}, \text{ где } 0 < \theta < 1.$$

Так как

$$|R_n(x)| = \frac{|x|^{n+1}e^{\theta x}}{(n+1)!} < e^{|x|}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \quad \text{и} \quad \lim_{n\to+\infty}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0,$$

то при произвольном данном действительном значении x имеем:

$$\lim R_n(x) = 0.$$

Следовательно, ряд Маклорена функции e^x сходится к этой функции в интервале $-\infty < x < +\infty$:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots.$$

2°.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \frac{(-1)^n x^{2n+1}\cos\theta x}{(2n+1)!}.$$

Так как при всех значениях x имеем $|\cos\theta x| \leqslant 1$ и

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} = 0, \quad \text{то} \quad \lim\frac{(-1)^n x^{2n+1}\cos\theta x}{(2n+1)!} = 0.$$

Следовательно, функция $\sin x$ разлагается в ряд Маклорена в интервале $-\infty < x < +\infty$:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots.$$

3°. Аналогично доказывается справедливость разложения

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$$

в интервале $-\infty < x < +\infty$.

4°.

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{1+\vartheta x}\left(\frac{1-\vartheta}{1+\vartheta x}\right)^n$$

(остаточный член в форме Коши).

Ряд Маклорена

$$x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots$$

имеет интервал сходимости $(-1, 1)$. Поэтому при $|x| > 1$ данный ряд расходится и, следовательно, не может изображать функцию $\ln(1+x)$. Докажем, что в интервале $-1 < x < 1$ ряд сходится к функции

$\ln(1+x)$. Имеем: $0<\vartheta<1$ и $-1<x<1$. Следовательно, $1+\vartheta x \geqslant 1-|x|$ и $1+\vartheta x \geqslant 1-\vartheta$, откуда

$$|R_n(x)| = \frac{|x|^{n+1}}{1+\vartheta x}\left(\frac{1-\vartheta}{1+\vartheta x}\right)^n \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{1-|x|},$$

а потому при $|x|<1$

$$\lim_{n\to+\infty} R_n(x) = 0.$$

Итак, в интервале $-1<x<1$ функция $\ln(1+x)$ разлагается в ряд Маклорена:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + \ldots.$$

Примечание. При $x=-1$ ряд расходится, при $x=1$ получим ряд Лейбница, сходящийся к $\ln 2$ (стр. 252) *.

5°. Заменив x на $-x$, получим

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \ldots - \frac{x^n}{n} - \ldots$$

в интервале $-1<x<1$.

6°.

$$(1+x)^k = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{1\cdot 2}x^2 + \ldots + \frac{k(k-1)\ldots(k-n+1)}{n!}x^n + \\ + \frac{k(k-1)\ldots(k-n)x^{n+1}(1-\vartheta)^n}{n!(1+\vartheta x)^{n+1-k}}$$

(остаточный член в форме Коши).

Ряд Маклорена (биномиальный ряд)

$$1 + kx + \frac{k(k-1)}{1\cdot 2}x^2 + \ldots + \frac{k(k-1)\ldots(k-n+1)}{n!}x^n + \ldots$$

имеет интервал сходимости $(-1, 1)$. Докажем непосредственно, что в этом интервале биномиальный ряд сходится к функции $(1+x)^k$ (косвенным методом это разложение в ряд было получено на стр. 295, пример 2).

Так как $0<\vartheta<1$ и $-1<x<1$, то $0<\left(\frac{1-\vartheta}{1+\vartheta x}\right)<1$.

Представим абсолютную величину остаточного члена в виде произведения трех множителей:

$$|R_n(x)| = \left[\frac{k(k-1)\ldots(k-n)|x|^{n+1}}{n!}\right]\cdot|1+\vartheta x|^{k-1}\left|\frac{1-\vartheta}{1+\vartheta x}\right|^n.$$

Первый множитель $\frac{k(k-1)\ldots(k-n)}{n!}|x|^{n+1}$ есть общий член сходящегося ряда при $|x|<1$ (в этом можно убедиться, применив признак Даламбера), а потому этот множитель при любом данном значении x

* Это следует также из второй теоремы Абеля, если в полученном разложении непосредственно перейти к пределу слева в точке $x=1$.

(в интервале $(-1, 1)$) имеет предел, равный нулю. Второй множитель ограничен, так как он содержится между числами

$$(1-|x|)^{k-1} \quad \text{и} \quad (1+|x|)^{k-1}.$$

Третий множитель не превосходит 1. Следовательно, имеем $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n(x)=0$ в интервале $-1<x<1$, а потому биномиальный ряд сходится к функции $(1+x)^k$.

Примеры.

1. e^x, $\sin x$, $\cos x$ дают примеры случаев, когда ряд Тейлора сходится к данной функции в бесконечном интервале $(-\infty, +\infty)$.

2. $\ln(1+x)$ и $(1+x)^k$ дают примеры случаев, когда ряд Тейлора сходится к данной функции в конечном интервале.

3. Положим $f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}$. Как известно, эта функция в точке $x=0$ имеет производные любого порядка, равные нулю (том I, § 101, пример 3). Следовательно, ряд Маклорена $0+0x+0x^2+\ldots$ сходится к нулю в интервале $(-\infty, +\infty)$. Однако функция $e^{-\frac{1}{x^2}}$ не есть константа, равная нулю. Эта функция дает пример случая, когда ряд Тейлора сходится, но не к данной функции.

4. Положим $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(2^n x)}{n!}$. Дифференцируя почленно k раз, получим ряд:

$$f^{(k)}(x)=\sum\frac{2^{kn}}{n!}\sin\left(2^n x+\frac{k\pi}{2}\right).$$

Почленное дифференцирование возможно, так как каждый из рассматриваемых рядов является мажорируемым, а потому равномерно сходящимся в интервале $(-\infty, +\infty)$. В самом деле, числовой ряд $\sum\frac{2^{kn}}{n!}$ сходится при любом данном значении k (достаточно применить признак Даламбера). Положив $x=0$, получим $f(0)=0$, $f^{(2k)}(0)=0$ и

$$f^{(2k+1)}(0)=\sum(-1)^k\frac{2^{(2k+1)n}}{n!}=(-1)^k\sum\frac{(2^{2k+1})^n}{n!}=(-1)^k[e^{2^{2k+1}}-1].$$

Составим ряд Маклорена функции $f(x)$:

$$f'(0)x+\frac{f'''(0)x^3}{3!}+\ldots+\frac{f^{(2x+1)}(0)x^{2k+1}}{(2k+1)!}+\ldots=$$

$$=(e^2-1)x-\frac{e^{2^3}-1}{3!}x^3+\ldots+(-1)^k\frac{e^{2^{(2k+1)}}-1}{(2k+1)!}x^{2k+1}+\ldots.$$

Этот ряд расходится при всех значениях $x \neq 0$ (достаточно применить признак Даламбера, предоставляем это читателю).

Эта функция дает пример случая, когда ряд Тейлора бесконечно дифференцируемой функции является расходящимся.

§ 62. Теорема единственности. Техника разложения функций в степенные ряды

Рассмотрим сумму степенного ряда

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n + \ldots \quad (a)$$

в интервале сходимости $(a-R,\ a+R)$, где $R \neq 0$.

Теорема. *Степенной ряд* (a) *есть ряд Тейлора в точке* a *своей суммы* $f(x)$.

Доказательство. Требуется доказать, что ряд Тейлора функции $f(x)$ в точке a совпадает с рядом $\sum a_n(x-a)^n$.

В самом деле, вычисляя производные функции $f(x)$ при помощи почленного дифференцирования степенного ряда, имеем:

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \ldots;$$
$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x-a) + 3a_3(x-a)^2 + \ldots;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f^{(k)}(x) = k!\,a_k + (k+1)(k+2)\ldots 2a_{k+1}(x-a) + \ldots;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Полагая $x = a$, получим:

$$f(a) = a_0,\quad f'(a) = a_1,\ \ldots,\ f^{(k)}(a) = k!\,a_k,\ \ldots,$$

откуда

$$a_0 = f(a),\quad a_1 = f'(a),\quad a_2 = \frac{f''(a)}{2!},\ \ldots,\ a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!},\ \ldots$$

Итак, коэффициенты ряда (a) равны соответственным коэффициентам ряда Тейлора функции $f(x)$; следовательно, ряд Тейлора совпадает с рядом (a), ч. т. д.

Из доказанной теоремы вытекает следующая теорема единственности разложения функции в степенной ряд.

Теорема. *Если в окрестности точки* a *функция* $f(x)$ *может быть разложена в степенной ряд по степеням* $x-a$:

$$f(x) = \sum a_n(x-a)^n,$$

то такое разложение является единственным.

Доказательство. В самом деле, всякий степенной ряд рассматриваемого вида, изображающий в окрестности точки a функцию $f(x)$, есть ряд Тейлора в точке a этой функции, поэтому не может существовать двух различных рядов

$$f(x) = \sum a_n(x-a)^n \quad \text{и} \quad f(x) = \sum c_n(x-a)^n,$$

сходящихся к одной и той же функции $f(x)$ в окрестности точки a, так как

$$a_n = c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}, \text{ ч. т. д.}$$

Следствие. *Если сумма степенного ряда* $\sum a_n (x-a)^n$ *тождественно равна нулю, то все его коэффициенты равны нулю.* В самом деле, будучи рядом Тейлора своей суммы, $f(x) = \text{const} = 0$ ряд имеет все коэффициенты, равные нулю:

$$a_n = \frac{f^n(a)}{n!} = 0.$$

Примечание. Функция, не равная тождественно нулю, может иметь ряд Тейлора, все коэффициенты которого равны нулю; примером может служить функция $e^{-\frac{1}{x^2}}$, для нее все коэффициенты ряда Маклорена равны нулю. В этом случае ряд Тейлора сходится не к данной функции.

Следовательно, *две различные функции могут иметь один и тот же ряд Тейлора.* Так, например, если $f(x) = \sum a_n (x-a)^n$, то тот же ряд Тейлора в точке a имеет функция $f(x) + e^{-\frac{1}{(x-a)^2}}$.

Из теоремы единственности вытекает, что *каким бы способом ни было получено разложение функции* $f(x)$ *в степенной ряд* $\sum a_n (x-a)^n$ *в окрестности точки* a, *всегда получится один и тот же ряд, именно ряд Тейлора* (в предположении, что функция может быть разложена в степенной ряд).

Для разложения функции в степенной ряд можно не прибегать к непосредственному вычислению коэффициентов ряда Тейлора по формулам $a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$, а пользоваться установленными правилами арифметических действий и аналитических операций над степенными рядами.

Так, например, при помощи почленного интегрирования можно вывести разложения в ряд Маклорена функции $\operatorname{arc\,tg} x$ и $\arcsin x$.

Рассмотрим геометрическую прогрессию

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots + (-1)^n x^{2n} + \ldots$$

в интервале сходимости $-1 < x < 1$. Интегрируя почленно, получим:

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^x dx - \int_0^x x^2\,dx + \ldots + (-1)^n \int_0^x x^{2n}\,dx + \ldots.$$

Следовательно,

$$\operatorname{arc\,tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)} + \ldots$$

в интервале $(-1, 1)$.

Примечания.

I. Зная остаточный член геометрической прогрессии

$$(-1)^{n+1}x^{2n+2}+(-1)^{n+2}x^{2n+4}+\ldots=\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+2}}{1+x^2},$$

нетрудно получить выражение остаточного члена ряда Маклорена для арктангенса:

$$R_n(x)=(-1)^{n+1}\int_0^x\frac{1}{1+x^2}x^{2n+2}\,dx.$$

Функция $x^{2n+2}\geqslant 0$; применив теорему о среднем значении, получим:

$$R_n(x)=(-1)^{n+1}\frac{1}{1+(\theta x)^2}\int_0^x x^{2n+2}\,dx=\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+3}}{(2n+3)[1+(\theta x)^2]},\text{ где }0<\theta<1.$$

II. Ряд для арктангенса сходится (условно) в точке $x=1$. Применив вторую теорему Абеля, получим:

$$\operatorname{arc\,tg}1=\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{(-1)^n}{2n+1}+\ldots.$$

Согласно биномиальной формуле имеем:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}x^4+\ldots+$$
$$+\frac{1\cdot3\ldots(2n-1)}{2\cdot4\ldots(2n)}x^{2n}+\ldots$$

в интервале $-1<x<1$.

Почленным интегрированием в пределах от 0 до x получим разложение в ряд Маклорена функции $\operatorname{arc\,sin}x$:

$$\operatorname{arc\,sin}x=x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{x^5}{5}+\ldots+$$
$$+\frac{1\cdot3\ldots(2n-1)}{2\cdot4\ldots(2n)}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots.$$

Примечание. В точках $x=\pm1$ ряд сходится абсолютно. Так, например, полагая $x=1$, получим ряд:

$$1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1\cdot3\ldots(2n-1)}{2\cdot4\ldots(2n)}\frac{1}{2n+1}+\ldots.$$

Применив признак Раабе, получим:

$$\lim n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)=\lim n\left[1-\frac{(2n+1)^2}{(2n+2)(2n+3)}\right]=\lim\frac{6n^2E_1}{4n^2E_2}=\frac{3}{2}>1$$

(ряд сходится).

Согласно второй теореме Абеля, положив $x = 1$, получим:

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \ldots + \frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\ldots(2n)}\cdot\frac{1}{2n+1} + \ldots.$$

На нижеследующих примерах показаны различные приемы разложения функции в степенные ряды.

Примеры.

1. Заменим в формуле

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \qquad (1)$$

x на $-x$:

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \ldots + \frac{(-1)^n x^n}{n!} + \ldots. \qquad (2)$$

Складывая и вычитая почленно эти ряды, получим разложения в степенные ряды гиперболического косинуса и гиперболического синуса:

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots,$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$$

в интервале $(-\infty, +\infty)$.

2. Положим $f(x) = \sin^2 x$.

Имеем:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x);$$

разлагая в ряд $\cos 2x$, получим:

$$\cos 2x = 1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} + \ldots + (-1)^n\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} + \ldots =$$

$$= 1 - \frac{4x^2}{2!} + \ldots + (-1)^n\frac{2^{2n}x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$$

в интервале $(-\infty, +\infty)$.

Следовательно,

$$\sin^2 x = \frac{2x^2}{2!} - \frac{8x^4}{4!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$$

в интервале $(-\infty, +\infty)$.

3. Разложить в ряд по степеням $x - a$ дробь $\frac{1}{x}$.

Имеем:

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{a + (x-a)} = \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{1 + \dfrac{x-a}{a}} =$$

$$= \frac{1}{a} - \frac{1}{a}\cdot\frac{x-a}{a} + \frac{1}{a}\cdot\frac{(x-a)^2}{a^2} + \ldots =$$

$$= \frac{1}{a} - \frac{1}{a^2}(x-a) + \frac{1}{a^3}(x-a)^2 - \ldots + \frac{(-1)^n(x-a)^n}{a^{n+1}} + \ldots.$$

Получилась геометрическая прогрессия со знаменателем $\frac{x-a}{a}$. Прогрессия сходится в интервале $|x-a|<|a|$.

4. Интегрируя почленно ряд, полученный в предыдущем примере, найдем (при $a>0$):

$$\int_a^x \frac{dx}{x} = \ln x - \ln a = \frac{1}{a}(x-a) - \frac{1}{2a^2}(x-a)^2 + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}(x-a)^n}{na^n} + \ldots,$$

откуда получим разложение в ряд Тейлора функции $\ln x$:

$$\ln x = \ln a + \frac{x-a}{a} - \frac{(x-a)^2}{2a^2} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}(x-a)^n}{na^n} + \ldots$$

в интервале $|x-a|<|a|$, т. е. в интервале $(0, 2a)$.

5. Дифференцируя почленно ряд, полученный в примере 3, найдем (изменив знак на противоположный):

$$\frac{1}{x^2} = \frac{1}{a^2} - \frac{2}{a^3}(x-a) + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{a^{n+2}}(x-a)^n + \ldots$$

в интервале $(0, 2a)$.

6. Разложить в ряд Маклорена функцию $\frac{1}{x^2-3x+2}$.

Разлагаем данную дробь на элементарные дроби:

$$\frac{1}{x^2-3x+2} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}.$$

Имеем:

$$\frac{1}{x-2} = \frac{-1}{2\left(1-\frac{x}{2}\right)} = -\frac{1}{2} - \frac{x}{4} - \frac{x^2}{8} - \ldots - \frac{x^n}{2^{n+1}} - \ldots$$

в интервале $(-2, 2)$ и

$$\frac{1}{x-1} = -1 - x - x^2 - \ldots - x^n - \ldots \text{ в интервале } (-1, 1).$$

Произведя почленное вычитание, получим:

$$\frac{1}{x^2-3x+2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}x + \ldots + \frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}x^n + \ldots \text{ в интервале } (-1, 1).$$

7. Разложить в ряд Маклорена функцию $\frac{\sin x}{x}$. Почленным делением на x ряда

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$$

получим:

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} + \ldots$$

в интервале $(-\infty, +\infty)$. Заметим, что в точке $x=0$ как правая, так и левая части последнего равенства суть непрерывные функции, имеющие значение, равное 1.

8. Интегрируя почленно ряд, полученный в предыдущем примере, найдем:

$$\int_0^x \frac{\sin x}{x}\,dx = x - \frac{x^3}{3!3} + \frac{x^5}{5!5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!\,(2n+1)} + \ldots.$$

Таким образом, получено представление в виде степенного ряда интеграла $\int_0^x \frac{\sin x}{x}\,dx$, не выражающегося в элементарных функциях.

9. Разложить в ряд Маклорена функцию $y = (\arcsin x)^2$. Искомое разложение возможно; в самом деле, его можно получить, умножая сам на себя ряд $\arcsin x$ в интервале $(-1, 1)$. Чтобы избежать умножения рядов, поступим следующим образом; имеем:

$$y' = \frac{2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \text{откуда} \quad \sqrt{1-x^2}\,y' = 2 \arcsin x.$$

Дифференцируем обе части полученного равенства:

$$y''\sqrt{1-x^2} - \frac{xy'}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}},$$

откуда

$$y''(1-x^2) - xy' = 2.$$

Получилось дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет рассматриваемая функция. Пусть $y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ — искомое разложение (возможность этого разложения в интервале $(-1, 1)$ заранее известна). Почленным дифференцированием найдем:

$$y' = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \quad \text{и} \quad y'' = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}.$$

Подставив ряды для y, y' и y'' с неопределенными коэффициентами в дифференциальное уравнение, получим в левой части степенной ряд, а в правой части — число 2. Тождество возможно (в силу теоремы единственности), лишь если коэффициенты при одинаковых степенях x в правой и левой частях равны. Значит, свободный член левой части должен быть равен числу 2, а все прочие коэффициенты равны нулю.

Выполняя подстановку в левую часть:

y''	$2a_2 + 3\cdot 2a_3 x + 4\cdot 3a_4 x^2 + \ldots$			$+ (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \ldots$	
$-x^2y''$		$- 2a_2x^2 - \ldots$		$- n(n-1)a_n x^n$	$- \ldots$
$-xy'$	$-a_1 x$	$- 2a_2x^2 - \ldots$		$- na_n x^n$	$- \ldots$

составляем систему уравнений

$$2a_2 = 2, \quad 6a_3 - a_1 = 0, \ldots,$$
$$(n+2)(n+1)a_{n+2} - n^2 a_n = 0, \ldots.$$

Так как $y(0) = 0$ и $y'(0) = 0$, то $a_0 = 0$ и $a_1 = 0$.

Для вычисления прочих коэффициентов получаем рекуррентную формулу:

$$a_{n+2} = \frac{n^2}{(n+2)(n+1)}\, a_n.$$

Следовательно, $a_1 = a_3 = a_5 = \ldots = a_{2k-1} = 0$.
Заменив n на $2k$, получим:

$$a_{2k+2} = \frac{2k^2}{(k+1)(2k+1)}\, a_{2k}.$$

Полагая последовательно $k = 1, 2, 3, \ldots$ (и применив метод индукции), получим окончательно:

$$(\arcsin x)^2 = \frac{x^2}{1} + \frac{2}{3}\frac{x^4}{2} + \ldots + \frac{2\cdot 4\cdot 6 \ldots (2k-2)}{3\cdot 5 \ldots (2k-1)}\frac{x^{2k}}{k} + \ldots$$

в интервале $(-1, 1)$.

10. Найти функцию y, удовлетворяющую уравнению $y'' + xy = 0$ и начальным условиям $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Будем искать y в виде суммы степенного ряда

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots.$$

Дифференцируем и подставляем в левую часть уравнения:

$$\begin{array}{l|rrr} y'' & 2a_2 + 3\cdot 2a_3 x + \ldots + (n+2)(n+1)\, a_{n+2}x^n + \ldots \\ xy & a_0 x + \ldots + a_{n-1}x^n + \ldots \end{array}$$

Приравняв нулю коэффициенты, получим:

$$2a_2 = 0; \quad 3\cdot 2a_3 + a_0 = 0, \ldots, \quad (n+2)(n+1)\, a_{n+2} + a_{n-1} = 0.$$

По условию

$$a_0 = y(0) = 1, \quad a_1 = y'(0) = 0.$$

Для вычисления коэффициентов имеем рекуррентную формулу

$$a_{n+2} = -\frac{a_{n-1}}{(n+2)(n+1)}.$$

Полагая последовательно

$$n = 1, 2, 3, \ldots,$$

получим:

$$a_3 = -\frac{1}{2\cdot 3}, \quad a_4 = a_5 = 0, \quad a_6 = \frac{1}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6},$$

$$a_7 = a_8 = 0, \quad a_9 = -\frac{1}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdot 8\cdot 9}, \ldots$$

$$a_{3k} = \frac{(-1)^k}{(2\cdot 3)(5\cdot 6)\ldots[(3k-1)(3k)]}, \quad a_{3k+1} = a_{3k+2} = 0.$$

Нетрудно убедиться, что ряд

$$y = 1 - \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{x^6}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6} - \ldots$$

сходится в интервале $(-\infty, +\infty)$. Этот ряд удовлетворяет условиям задачи. В самом деле, в силу сходимости полученного ряда операция почленного дифференцирования (выполненная формально) законна, а в силу определения коэффициентов функция $y(x)$ удовлетворяет предложенному уравнению.

11. Разложить в ряд Маклорена функцию

$$y=\frac{1-x+x^2}{1+x+x^2}.$$

Допустим, что искомое разложение возможно:

$$y=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n.$$

Следовательно, в окрестности точки 0 мы должны иметь

$$1-x+x^2=(1+x+x^2)\sum a_nx^n,$$

или, что то же:

$$1-x+x^2=$$

$$\begin{array}{rl}=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots & \mid 1\\ +a_0x+a_1x^2+\ldots+a_{n-1}x^n+\ldots & \mid x\\ +a_0x^2+\ldots+a_{n-2}x^n+\ldots & \mid x^2.\end{array}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим:

$$a_0=1,\quad a_0+a_1=-1,\quad a_0+a_1+a_2=1,\ldots,\quad a_{n-2}+a_{n-1}+a_n=0,\ldots.$$

Вычисляя последовательно коэффициенты, получим ряд:

$$y=1-2x+2x^2-2x^4+2x^5-2x^7+\ldots,$$

сходящийся в интервале $(-1, 1)$ и удовлетворяющий условию задачи.

§ 63. Понятие аналитической функции

Определение. *Функция $f(x)$ называется аналитической в точке a, если в некоторой окрестности точки a функция $f(x)$ может быть представлена в виде суммы степенного ряда по степеням $x-a$:*

$$f(x)=a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+\ldots+a_n(x-a)^n+\ldots. \quad (a)$$

Функция называется аналитической в некотором интервале, если она является аналитической в каждой точке этого интервала.

По теореме о единственности ряд (a) есть ряд Тейлора функции $f(x)$ в точке a.

Теорема. *Сумма степенного ряда*

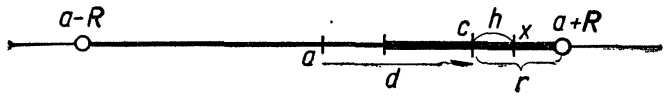
$$s(x)=a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+\ldots+a_n(x-a)^n+\ldots \quad (a)$$

есть аналитическая функция в интервале сходимости.

Доказательство. Требуется доказать, что в окрестности произвольной точки c, содержащейся в интервале сходимости $(a-R, a+R)$ ряда (a), функция $s(x)$ может быть разложена в степенной ряд по степеням $x-c$. Пусть $r=R-|c-a|$ — расстояние точки c до ближайшего конца интервала сходимости $(a-R, a+R)$ ряда (a). Имеем: $x-a=(x-c)+(c-a)$ (черт. 151).

Обозначим для простоты $x-c=h$, $c-a=d$; тогда $x-a=d+h$. Докажем, что при $|h|<r$ функция $s(x)$ может быть представлена в виде суммы степенного ряда по степеням h. Заменив в ряде (a) $(x-a)$ на $(d+h)$, получим:

$$\begin{aligned} s(x) = a_0 &+ \\ &+ a_1(d+h) + \\ &+ a_2(d^2+2dh+h^2)+ \\ &+ a_3(d^3+3d^2h+3dh^2+h^3)+ \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$



Черт. 151.

Если в этом ряде раскрыть скобки, то получится абсолютно сходящийся ряд:

$$a_0+a_1d+a_1h+a_2d^2+2a_2dh+\ldots. \qquad (1)$$

В самом деле, если каждый член взять по абсолютной величине, то получится ряд:

$$\begin{aligned} &|a_0|+|a_1||d|+|a_1||h|+|a_2||d|^2+\ldots = \\ &=|a_0|+|a_1|(|d|+|h|)+\ldots+|a_n|(|d|+|h|)^n+\ldots. \end{aligned} \qquad (2)$$

Так как

$$|d|+|h|=|c-a|+|h|=|c-a|+|x-c|<|c-a|+r<R,$$

то точка $|a|+|d|+|h|$ лежит внутри интервала сходимости ряда (a), а потому в этой точке ряд (a) сходится абсолютно, т. е. сходится знакоположительный ряд (2).

В силу доказанной абсолютной сходимости ряда (1) в нем можно производить любую группировку и перестановку членов и, в частности, можно расположить ряд по степеням h.

Итак, функция $s(x)$ может быть представлена в виде степенного ряда по степеням $h=x-c$ с радиусом сходимости, не меньшим, чем r. Следовательно, функция $s(x)$ является аналитической в точке c, ч. т. д.

Следствие. *Функция, аналитическая в точке a, является аналитической в некоторой окрестности точки a.*

В самом деле, будучи в окрестности точки a, равной сумме степенного ряда по степеням $x-a$, функция $f(x)$ является аналитической в этой окрестности.

Из основных теорем о степенных рядах вытекают нижеследующие свойства аналитических функций:

функция $f(x)$, аналитическая в некотором интервале:

1° *имеет производные любого порядка*;

2° *каждая из производных* $f^{(k)}(x)$ *также является аналитической функцией*;

3° *в окрестности каждой точки функция* $f(x)$ *может быть разложена в ряд Тейлора.*

Функция $f(x)$ *называется целой, если она может быть представлена в виде степенного ряда*

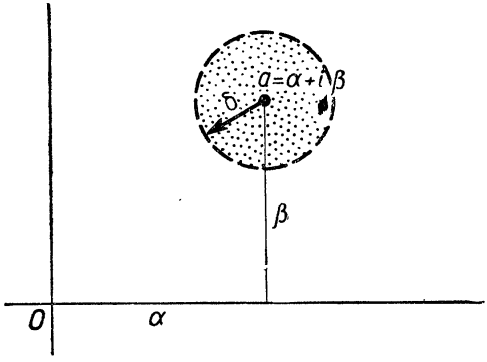
$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots$$

в интервале $(-\infty, +\infty)$.

Если, начиная с некоторого значения n, все коэффициенты ряда равны нулю: $a_{k+1}=a_{k+2}=\ldots=0$, то $f(x)$ есть многочлен. Целая функция, не являющаяся многочленом, называется целой трансцендентной функцией. Примерами целых трансцендентных функций могут служить e^x, $\sin x$, $\cos x$. Целая функция является аналитической в интервале $(-\infty, +\infty)$.

§ 64. Понятие об аналитических функциях комплексного аргумента

Мы предполагаем, что основные свойства поля комплексных чисел, а также геометрическое изображение комплексных чисел точками плоскости известны читателю из алгебры. Пусть $a=\alpha+\beta i$ — данное комплексное число;



Черт. 152.

δ-окрестностью точки a *называется множество всех комплексных чисел* $z=x+iy$, *удовлетворяющих неравенству*:

$$|z-a|<\delta, \text{ т. е.}$$

$$\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}<\delta.$$

Геометрически δ-окрестность точки a интерпретируется как внутренность круга радиуса δ с центром в точке a, т. е. как δ-окрестность точки a на плоскости (черт. 152).

Можно рассматривать функции комплексного аргумента, подразумевая в определении понятия функции (как соответствия) под значениями аргумента (или аргументов) и функции комплексные числа.

Если $w=f(z)$ — функция комплексного аргумента, то каждому значению $z=x+iy$ аргумента в области определения функции соответствует значение $w=u+iv$. Геометрически каждой точке (x, y) данного множества точек плоскости XOY соответствует определенная точка (u, v) другой плоскости UOV. Таким образом, задание функции комплексного аргумента можно геометрически интерпретировать как

отображение некоторого множества $\mathfrak{M}_z$ точек плоскости XOY на некоторое множество точек $\mathfrak{M}_w$ в плоскости UOV.

Понятия ограниченной и неограниченной функции, предела функции в данной точке, основные теоремы о пределах, о действиях над пределами *, понятие функции, непрерывной в данной точке, непрерывной на данном множестве, и теоремы о непрерывных функциях *переносятся на функции комплексного аргумента.*

Так, например, $\lim\limits_{z\to a} f(z) = A$ означает выполнение неравенства

$$|f(z) - A| < \varepsilon, \quad \text{если} \quad 0 < |z - a| < \delta.$$

Выполнение неравенства

$$|f(z) - f(a)| < \varepsilon, \quad \text{если} \quad |z - a| < \delta$$

означает непрерывность функции в точке a. Для функции комплексного аргумента при геометрической интерпретации этих неравенств вместо окрестностей на прямой (интервалы) следует рассматривать окрестность на плоскости (круги).

Примечание. Перенесение основных теорем о пределах и о непрерывных функциях возможно, разумеется, лишь в тех случаях, когда содержание этих теорем не теряет смысла. Как известно, в поле комплексных чисел понятия «больше» и «меньше» не определяются никак. Поэтому не имеет смысла говорить о наибольшем и наименьшем значениях или о верхней грани комплексной функции. Так, например, теорема о наибольшем и наименьшем значениях функции, непрерывной на замкнутом множестве, теряет смысл применительно к комплексной функции $f(z)$, но остается в силе применительно к действительной неотрицательной функции $|f(z)|$.

Основные положения теории числовых и функциональных рядов, понятия сходящегося ряда и остаточного члена, критерий сходимости Коши, понятие абсолютно сходящегося ряда, теоремы об абсолютно сходящихся рядах, определение равномерной сходимости функционального ряда, теоремы о мажорируемых рядах и т. д. переносятся на ряды с комплексными членами. Соответствующие доказательства остаются в силе.

Всякий степенной ряд $a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots$, сходящийся хотя бы в одной точке z, отличной от точки 0, сходится абсолютно в некотором круге (открытом) $|z| < R$ и расходится вне этого круга. Для ряда, сходящегося во всей комплексной плоскости, считается $R = +\infty$. На всяком замкнутом множестве, содержащемся внутри круга

---

* Заметим, что соотношения

$$|x + y| \leqslant |x| + |y| \quad \text{и} \quad |x \cdot y| = |x| \cdot |y|,$$

существенные для доказательства теорем о действиях над пределами, остаются в силе в поле комплексных чисел, поэтому и воспроизведение самих доказательств не представляет затруднений.

сходимости, степенной ряд сходится равномерно, и следовательно, его сумма есть непрерывная функция в круге сходимости. Доказательства всех этих предложений (§§ 57—59) остаются в силе для степенных рядов, рассматриваемых в множестве комплексных чисел.

Функция $f(z)$ называется аналитической в точке a, если в окрестности этой точки она может быть представлена в виде суммы степенного ряда по степеням $z-a$. Функция называется аналитической в области, если она является аналитической в каждой точке этой области.

Пример.

Рассмотрим геометрическую прогрессию

$$\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+\ldots+z^n+\ldots.$$

Радиус сходимости $R=1$, прогрессия сходится абсолютно в единичном круге $|z|<1$. Представив z в тригонометрической форме $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, получим:

$$\frac{1}{1-z}=\frac{1}{1-r\cos\varphi-ir\sin\varphi}=\frac{(1-r\cos\varphi)+ir\sin\varphi}{1-2r\cos\varphi+r^2}$$

и

$$\sum z^n=\sum r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)=\sum r^n\cos n\varphi+i\sum r^n\sin n\varphi.$$

Приравняв отдельно действительную часть действительной, а мнимую мнимой, находим:

$$\frac{1-r\cos\varphi}{1-2r\cos\varphi+r^2}=1+r\cos\varphi+\ldots+r^n\cos n\varphi+\ldots$$

и

$$\frac{r\sin\varphi}{1-2r\cos\varphi+r^2}=r\sin\varphi+\ldots+r^n\sin n\varphi+\ldots$$

при условии $|r|<1$.

§ 65. Аналитическое определение показательной и тригонометрических функций

Представление аналитической функции в виде суммы степенного ряда может служить средством исследования свойств данной функции. Ниже показано такого рода исследование на примере показательной и тригонометрических функций.

Показательная функция. В основу аналитического определения показательной функции положено ее представление при помощи степенного ряда.

Определение. *Показательной функцией называется функция*

$$f(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots.$$

Степенной ряд сходится во всей комплексной плоскости и определяет показательную функцию для всех комплексных значений x.

Из определения показательной функции вытекает следующее ее основное свойство:

$$f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$$

при произвольных комплексных значениях x и y.

В самом деле, произведя умножение рядов

$$f(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots,$$

$$f(y)=1+y+\frac{y^2}{2!}+\ldots+\frac{y^n}{n!}+\ldots,$$

получим ряд-произведение с общим членом:

$$\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\cdot\frac{y}{1!}+\frac{x^{n-2}}{(n-2)!}\cdot\frac{y^2}{2!}+\ldots+\frac{x^{n-k}}{(n-k)!}\cdot\frac{y^k}{k!}+\ldots+\frac{y^n}{n!}=$$

$$=\frac{1}{n!}\left(x^n+\ldots+\frac{n!}{(n-k)!\,k!}x^{n-k}y^k+\ldots+y^n\right)=\frac{1}{n!}(x+y)^n.$$

Итак,

$$f(x)\cdot f(y)=1+(x+y)+\ldots+\frac{(x+y)^n}{n!}+\ldots=f(x+y).$$

Методом индукции устанавливается равенство:

$$f(x_1)f(x_2)\ldots f(x_n)=f(x_1+x_2+\ldots+x_n).$$

Положив $x=-y$, получим:

$$f(x)f(-x)=f(0)=1, \qquad \text{откуда } f(-x)=\frac{1}{f(x)}.$$

Положив $x_1=x_2=\ldots=x_n=x$, получим:

$$[f(x)]^n=f(nx). \tag{1}$$

Заменив x на $\frac{x}{n}$, найдем:

$$\left[f\left(\frac{x}{n}\right)\right]^n=f(x). \tag{2}$$

Докажем, что показательная функция $f(x)$ при действительных значениях x совпадает с функцией e^x, где

$$e=f(1)=1+1+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots.$$

В самом деле, положив $x=1$, получим $f(1)=e$; из равенства (1) найдем:

$$f(n)=f(1\cdot n)=[f(1)]^n=e^n;$$

из равенства (2) найдем ($x = 1$):

$$\left[f\left(\frac{1}{n}\right)\right]^n = e, \text{ откуда } f\left(\frac{1}{n}\right) = \sqrt[n]{e} = e^{\frac{1}{n}}.$$

Положив $x = \frac{m}{n}$, получим:

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = f\left(m \cdot \frac{1}{n}\right) = mf\left(\frac{1}{n}\right) = e^{\frac{m}{n}};$$

положив $x = -\frac{m}{n}$, получим:

$$f\left(-\frac{m}{n}\right) = \frac{1}{f\left(\frac{m}{n}\right)} = e^{-\frac{m}{n}}.$$

Итак, на множестве всех рациональных чисел функция $f(x)$ совпадает с e^x. Так как обе функции непрерывны при всех действительных значениях x, то они совпадают и при иррациональных значениях аргумента. В самом деле, если α—иррациональное число, то

$$f(\alpha) = \lim_{r \to \alpha} f(r) = \lim (e^r) = e^\alpha \text{ (где } r \text{ — рациональное число).}$$

Тригонометрические функции. В элементарной математике тригонометрические функции определяются геометрически и их основные свойства устанавливаются на основании теорем геометрии. Средствами элементарной математики представляется возможным дать аналитическое определение тригонометрических функций путем непосредственного указания действий, которые следует выполнить над значением аргумента, чтобы получить соответствующее значение функции. Аппарат теории рядов позволяет дать чисто аналитическое определение тригонометрических функций, не опирающееся на геометрию.

Определение. *Функциями* $\sin x$ *и* $\cos x$ *называются функции*

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots.$$

Следовательно, функции $\sin x$ и $\cos x$ суть целые трансцендентные функции, бесконечно дифференцируемые при всех действительных значениях x. Почленным дифференцированием степенных рядов получим:

$$(\sin x)' = 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots = \cos x$$

и

$$(\cos x)' = -x + \frac{x^2}{3!} - \ldots = -\sin x.$$

Рассматриваемые степенные ряды сходятся при всех комплексных значениях x, а потому определяют функции $\sin x$ и $\cos x$ во всей комплексной плоскости.

Теорема. *Тригонометрические и показательная функции связаны следующими формулами Эйлера*:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad \text{и} \quad e^{-ix} = \cos x - i \sin x.$$

Доказательство. В силу определения показательной функции при произвольном комплексном x имеем:

$$e^{ix} = 1 + ix + \frac{i^2x^2}{2!} + \ldots + \frac{i^nx^n}{n!} + \ldots.$$

Пользуясь абсолютной сходимостью ряда, произведем следующую перегруппировку его членов:

$$e^{ix} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \ldots + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots\right) = \cos x + i \sin x.$$

Заменив x на $-x$, получим вторую формулу Эйлера, ч. т. д.

Из формул Эйлера можно тригонометрические функции выразить через показательную:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}; \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Из формул Эйлера получается следующее выражение для комплексной степени числа e:

$$e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y).$$

Из определения тригонометрических функций при помощи степенных рядов вытекают их основные свойства:

1° $\sin(-x) = -\sin x$ и $\cos(-x) = \cos x$

(достаточно в степенном ряде заменить x на $-x$).

2° $$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y.$$

Для доказательства этого тождества достаточно вычислить правую часть посредством умножения рядов. Вычисления проводятся по тому же образцу, как при доказательстве основного свойства показательной функции; предоставляем эти вычисления читателю в виде упражнения*.

3° $$\cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

Для доказательства достаточно в предыдущем тождестве заменить y на $-x$.

---

* Можно вычислить правую часть, выразив предварительно тригонометрические функции через показательную и воспользовавшись свойствами показательной функции.

Аналогично выводятся формулы сложения для синуса и прочие формулы гониометрии (см. для образца том I, § 55, гиперболические функции).

Рассмотрим функции $\sin x$ и $\cos x$ (на основе аналитического определения) при действительных значениях x. В интервале (0,2) имеем:

$$\sin x = x\left[1 - \frac{x^2}{2\cdot 3}\right] + \frac{x^5}{5!}\left[1 - \frac{x^2}{6\cdot 7}\right] + \ldots > 0$$

(так как получился знакоположительный ряд). В том же интервале

$$\frac{d\cos x}{dx} = -\sin x < 0.$$

Следовательно, функция $\cos x$ убывает.

Вычислим значения $\cos x$ в точках 0 и 2; имеем: $\cos 0 = 1 > 0$ и

$$\cos 2 = 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} - \frac{2^6}{6!}\left(1 - \frac{2^2}{7\cdot 8}\right) - \frac{2^8}{8!}\left(1 - \frac{2^2}{9\cdot 10}\right) - \ldots =$$
$$= -\frac{1}{3} - \frac{2^6}{6!}\left(1 - \frac{4}{7\cdot 8}\right) - \ldots < 0.$$

Следовательно, на сегменте [0, 2] существует единственная (в силу монотонности) точка x, в которой $\cos x = 0$. Обозначим эту точку так: $x = \frac{\pi}{2}$. Так как $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, то из соотношения $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ получим $\sin^2\frac{\pi}{2} = 1$ и $\sin\frac{\pi}{2} = 1$ $\left(\text{заметим, что } \sin\frac{\pi}{2} > 0\right)$.

Из формул сложения могут быть выведены известные из тригонометрии формулы приведения:

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x\cos\frac{\pi}{2} - \sin x\sin\frac{\pi}{2} = -\sin x$$

и аналогично

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$$

(при произвольном комплексном значении x).

Последовательным прибавлением $\frac{\pi}{2}$ к аргументу устанавливаются все прочие формулы приведения и, в частности, свойство периодичности тригонометрических функций:

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x; \quad \cos(x + 2\pi) = \cos x.$$

Докажем, что тригонометрические функции $\sin x$ и $\cos x$ при действительных значениях аргумента имеют геометрическую интерпретацию, которая в элементарной математике полагается в основу их

определения. Рассмотрим дугу, заданную параметрически на сегменте $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ $\left(\text{где } \frac{\pi}{2} \text{ — наименьшее положительное решение уравнения } \cos x = 0\right)$:

$$x = \cos t, \qquad y = \sin t.$$

Как было доказано, на сегменте $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ функция $\cos x$ убывает от 1 до 0. Функция $\sin x$ на сегменте $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ возрастает от 0 до 1.

В самом деле, $(\sin x)' = \cos x > 0$ и $\sin 0 = 0$, $\sin \frac{\pi}{2} = 1$.

Из соотношения

$$x^2 + y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

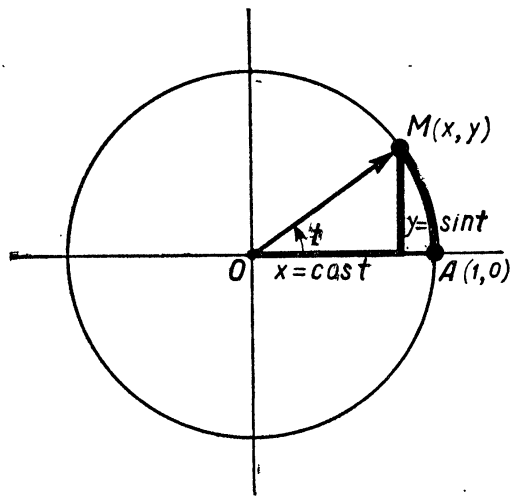
следует, что рассматриваемая дуга есть четверть единичной окружности, расположенная в первом квадранте.

Докажем, что параметр t есть длина дуги, отсчитываемой от точки A (1,0).

Имеем:

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt = \int_0^t \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2}\, dt = \int_0^t dt = t.$$

Значит, t есть радианная мера угла, образованного отрезком $\overline{OM}$ (черт. 153) с осью абсцисс. Отсюда вытекает интерпретация функций $\sin t$ и $\cos t$ как «линии синуса» и «линии косинуса» угла t. На основе формул приведения нетрудно доказать, что на сегментах $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, $\left[\pi, \frac{3}{2}\pi\right]$ и $\left[\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right]$ получается параметрическое представление прочих четвертей единичной окружности. Из сказанного следует, что число $\frac{\pi}{2}$ выражает длину четверти единичной окружности, а 2π — длину всей окружности.



Черт. 153.

Примечание. Распространение показательной функции в множество комплексных чисел позволяет придать смысл понятию логарифма применительно к комплексным числам. Пусть $z = x + iy$ — данное, отличное от 0, комплексное число; представив это число в тригонометрической форме, получим:

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) = |z|e^{i\varphi} = e^{\ln|z|}e^{i\varphi}.$$

Здесь $\ln|z|$ — обычный логарифм положительного числа $|z|$.

Итак, имеем $z = e^{\ln|z| + i\varphi}$. Следовательно, для получения z число e надлежит возвести в степень $\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\varphi$.

Логарифм $\operatorname{Ln} z$ имеет бесконечное множество значений. В самом деле, пусть φ_0 — значение аргумента z, взятое в промежутке $-\pi < \varphi_0 \leqslant \pi$. Значения аргумента z суть $\varphi = \varphi_0 + 2k\pi$, а потому

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i(\varphi_0 + 2k\pi).$$

Число

$$\ln z = \ln|z| + i\varphi_0$$

называется главным значением логарифма. Так, например, $-1 = 1(\cos\pi + i\sin\pi)$, а потому:

$$\ln(-1) = \ln 1 + i\pi = i\pi \quad \text{и} \quad \operatorname{Ln}(-1) = i(2k+1)\pi.$$

Подробное изучение логарифмической функции комплексного аргумента выходит за рамки настоящей книги.

§ 66. Представление функций при помощи рядов. Приближенное вычисление значений функции

В силу определения, *суммирование числового ряда есть нахождение предела числовой последовательности.* Таким образом, присоединение суммирования рядов к основным арифметическим операциям над числами есть присоединение операции предельного перехода. Представление функции в виде суммы ряда (функционального) есть ее представление в виде предельной функции некоторой функциональной последовательности.

При помощи элементарных функций возможно аналитическое изображение лишь очень ограниченного класса функций. Однако в математике и в ее приложениях нередко приходится встречаться с функциями, которые не могут быть выражены посредством элементарных функций. Присоединение операции предельного перехода к числу основных операций позволяет значительно расширить класс функций, изобразимых формулой. Так, например, функция $\int_0^x e^{-x^2}dx$, не выражающаяся в элементарных функциях, имеет простое представление в виде степенного ряда:

$$\int_0^x e^{-x^2}dx = \int_0^x \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots\right)dx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{2!\,5} - \frac{x^7}{3!\,7} + \ldots.$$

Представление функции в виде суммы ряда может служить средством исследования ее свойств. Такое исследование, основанное непосредственно на представлении функции в виде ряда, показано на примере функции e^x, $\sin x$, $\cos x$.

Разложение функции в ряд может служить средством вычисления ее значений с какой угодно степенью точности. На этом осно-

вано широкое применение рядов в вычислительной практике. Если функция $f(x)$ представлена в виде суммы сходящегося ряда

$$f(x)=u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots,$$

то ее значение в данной точке может быть вычислено с любой степенью точности при помощи частных сумм этого ряда. С практической точки зрения важно знать границу ошибки, которая допускается при замене суммы ряда его частной суммой. Иными словами, важно знать оценку остаточного члена ряда. Невозможно указать стандартных правил, позволяющих установить требуемую оценку. При оценке погрешностей иногда приходится применять сложные и искусственные приемы. На практике нередко оказывается возможным выполнить оценку остаточного члена на основании теоремы о знакопеременных рядах.

Если ряд

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots$$

является мажорируемым $|u_n(x)|\leqslant C_n$, то для оценки остаточного члена может быть использовано неравенство:

$$|R_n(x)|\leqslant C_{n+1}+C_{n+2}+\ldots+C_{n+k}+\ldots.$$

Ниже приводятся наиболее существенные примеры применения теории рядов к приближенным вычислениям.

Примеры.

1. Вычисление тригонометрических функций. Как известно, таблицы функций $\sin x$ и $\cos x$ составляются на сегменте $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}$. В этом промежутке значения синуса и косинуса легко вычисляются посредством рядов

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots;\qquad \cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots.$$

Так как $\frac{\pi}{4}<1$, то и подавно $x<1$. При этом условии члены каждого из этих рядов убывают, а потому (по теореме о знакопеременных рядах) ошибка, допущенная при замене суммы ряда его частной суммой, меньше абсолютной величины первого отброшенного члена.

Так, например, для угла 1° имеем выражение в радианах:

$$x=\frac{\pi}{180}=0{,}017453\quad\text{и}\quad\sin x\approx x=0{,}01745.$$

Допущенная при этом ошибка меньше, чем

$$\frac{x^3}{6}<\frac{(0{,}02)^3}{6}<0{,}000002.$$

2. Вычисление логарифмов.

Ряды

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots \qquad (1)$$

и

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots - \frac{x^n}{n} - \ldots \qquad (2)$$

неудобны для вычисления логарифмов, так как эти ряды сходятся лишь в интервале (—1, 1).

Вычитая ряд (2) из ряда (1), найдем:

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left[x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots\right] \qquad (3)$$

в интервале (—1, 1).

Положим $\frac{1+x}{1-x} = \frac{N+1}{N}$, где N — некоторое положительное число. Из этого равенства найдем:

$$x = \frac{1}{2N+1}.$$

Подставив в равенство (3), получим:

$$\ln(N+1) = \ln N + 2\left[\frac{1}{2N+1} + \frac{1}{3(2N+1)^3} + \frac{1}{5(2N+1)^5} + \ldots\right].$$

Эта формула позволяет, зная логарифм числа N, вычислить логарифм числа $N+1$. Если в ряде отбросить члены, начиная с $\frac{1}{(2n+1)(2N+1)^{2n+1}}$, то для остаточного члена получится оценка:

$$R = \frac{2}{(2n+1)(2N+1)^{2n+1}} + \frac{2}{(2n+3)(2N+1)^{2n+3}} + \ldots <$$
$$< \frac{2}{(2n+1)(2N+1)^{2n+1}}\left[1 + \frac{1}{(2N+1)^2} + \frac{1}{(2N+1)^4} + \ldots\right] <$$
$$< \frac{2}{(2n+1)(2N+1)^{2n+1}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{(2N+1)^2}},$$

или окончательно:

$$R < \frac{1}{(2n+1)(2N+1)^{2n-1}\,2N(N+1)}.$$

Положив $N=1$, получим ряд для вычисления $\ln 2$:

$$\ln 2 = 2 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3 \cdot 3^3} + 2 \cdot \frac{1}{5 \cdot 3^5} + 2 \cdot \frac{1}{7 \cdot 3^7} + \ldots.$$

Если, например, ограничиться написанными членами, то будет совершена ошибка, меньшая чем ($N=1$, $n=4$):

$$\frac{1}{9 \cdot 3^7 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{1}{4 \cdot 3^9} < \frac{1}{60000}.$$

Вычислив $\ln 2 = 0{,}6931471$, положим $N=2$, тогда получим:

$$\ln 3 = \ln 2 + \frac{2}{5} + \frac{2}{3 \cdot 5^3} + \frac{2}{5 \cdot 5^5} + \frac{2}{7 \cdot 5^7} + \ldots.$$

Если ограничиться написанными числами, то получится ошибка, меньшая, чем

$$\frac{1}{9\cdot 5^7\cdot 4\cdot 3} < \frac{1}{300000}.$$

На этом примере видно, что по мере увеличения N остаточный член быстро уменьшается. Зная $\ln 2$ и $\ln 3$, находим $\ln 4 = 2\ln 2$ и $\ln 6 = \ln 2 + \ln 3$, а $\ln 5$ можно вычислить при помощи ряда, и так далее.

Для вычисления десятичных логарифмов достаточно найденные натуральные логарифмы чисел умножить на модуль перехода:

$$M = \frac{1}{\ln 10}.$$

3. Вычисление π. Наиболее простые формулы для вычисления π можно получить, исходя непосредственно из ряда

$$\operatorname{arc\,tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots.$$

Положив, например, $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, получим:

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3}\frac{1}{(\sqrt{3})^3} + \frac{1}{5}\frac{1}{(\sqrt{3})^5} - \ldots,$$

откуда

$$\pi = 2\sqrt{3}\left(1 - \frac{1}{3\cdot 3} + \frac{1}{5\cdot 3^2} - \ldots\right).$$

Оценку погрешности при пользовании этим рядом можно произвести на основании теоремы Лейбница о знакопеременных рядах. Так, например, сохранив в этом разложении 8 членов, получим:

$$\pi = 2\sqrt{3}\left(1 - \frac{1}{9} + \frac{1}{45} - \frac{1}{189} + \frac{1}{729} - \frac{1}{2673} + \frac{1}{9477} - \frac{1}{32805}\right)$$

с ошибкой, меньшей, чем 9-й член:

$$\frac{2\sqrt{3}}{75537} < \frac{3{,}5}{70000} = 0{,}00005.$$

Нетрудно составить ряды, более удобные для вычисления. Так, например, заметив, что

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3} = \operatorname{arc\,tg}\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{6}} = \operatorname{arc\,tg} 1 = \frac{\pi}{4},$$

найдем:

$$\pi = 4\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}\right) = 4\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3\cdot 2^3} + \frac{1}{5\cdot 2^5} - \ldots\right) + 4\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3\cdot 3^3} + \frac{1}{5\cdot 3^5} - \ldots\right).$$

4. Вычисление корней. Пусть, например, требуется вычислить $\sqrt[5]{245}$; имеем:

$$245 = 243 + 2 = 3^5 + 2,$$

и, следовательно,

$$\sqrt[5]{245}=\sqrt[5]{3^5+2}=3\left(1+\frac{2}{3^5}\right)^{\frac{1}{5}}.$$

Положив в биномиальном ряде

$$(1+x)^k=1+kx+\frac{k(k-1)}{1\cdot 2}x^2+\ldots$$

$k=\frac{1}{5}$ и $x=\frac{2}{3^5}$, получим:

$$\sqrt[5]{245}=3\left(1+\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{3^5}-\frac{4}{(1\cdot 2)\cdot 5^2}\cdot\frac{2^2}{3^{10}}+\ldots\right).$$

Как нетрудно видеть, получился знакопеременный ряд с убывающими членами. Если положить

$$\sqrt[5]{245}=3\left(1+\frac{2}{5\cdot 3^5}\right),$$

то получится ошибка, меньшая, чем

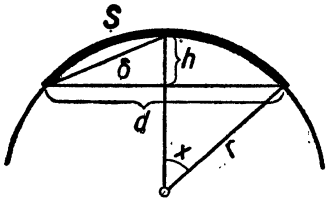
$$\frac{3\cdot 2^3}{5^2\cdot 3^{10}}<\frac{1}{10000}.$$

5. Положив в равенстве

$$\int_0^x e^{-x^2}dx=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{2!5}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{n!(2n+1)}+\ldots$$

$x=1$ и сохранив 7 первых членов ряда, получим:

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{10}-\frac{1}{42}+\frac{1}{216}-\frac{1}{1320}+\frac{1}{9360}$$



Черт. 154.

с ошибкой, не превосходящей восьмого члена (по теореме о знакопеременных рядах):

$$R_7<\frac{1}{75600}<0{,}00002.$$

Отсюда найдем:

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx\approx 0{,}7468.$$

6. При малом центральном угле для вычисления дуги окружности существует следующая приближенная формула:

$$S=\sqrt{d^2+\frac{16}{3}h^2},$$ где d — длина хорды, h — высота сегмента.

Пусть x — половина центрального угла, стягиваемого хордой d (черт. 154), r — радиус круга. Докажем, что эта приближенная формула дает возможность

вычислить длину дуги с точностью до пятой степени x. Имеем:

$$d = 2r \sin x = r\left(2x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{60} - \ldots\right),$$

$$h = r(1 - \cos x) = r\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720} - \ldots\right).$$

Возведя в квадрат ряды, удержим члены до шестой степени:

$$d^2 = 4r^2\left(x^2 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{2}{45}x^6 - \ldots\right)$$

и

$$\frac{16}{3}h^2 = 4r^2\left(\frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{18}x^6 + \ldots\right),$$

откуда

$$d^2 + \frac{16}{3}h^2 = 4r^2\left(x^2 - \frac{1}{90}x^6 + \ldots\right)$$

и, наконец,

$$\sqrt{d^2 + \frac{16}{3}h^2} = 2rx\sqrt{1 - \left(\frac{1}{90}x^4 + \ldots\right)}.$$

Положив $\alpha = \frac{1}{90}x^4 + \ldots$, применим формулу бинома Ньютона:

$$\sqrt{1 - \alpha} = 1 - \frac{1}{2}\alpha + \ldots;$$

сохранив лишь члены с четвертой степенью x, получим:

$$\sqrt{d^2 + \frac{16}{3}h^2} = 2rx\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{90}x^4 + \ldots\right) + \ldots\right] = 2rx - \frac{r}{90}x^5 + \ldots.$$

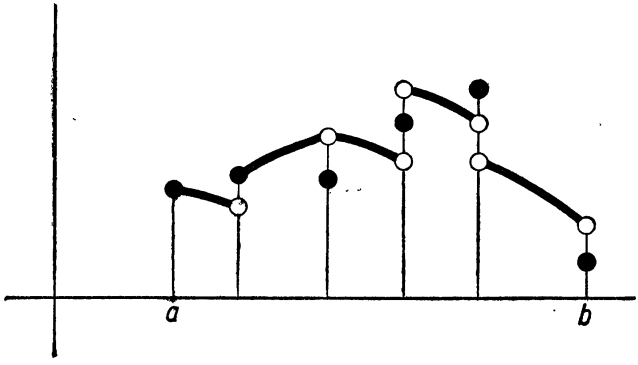
Истинное значение длины дуги равно $2rx$; оно отличается от приближенного значения членами, содержащими пятую и более высокие степени x.

ГЛАВА VII

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ. РЯДЫ ФУРЬЕ

§ 67. Ортогональные системы функций

Определение. *Функция $f(x)$ называется кусочно непрерывной на сегменте $[a, b]$, если она либо непрерывна на этом сегменте, либо имеет конечное множество точек разрыва, причем в каждой точке разрыва существуют конечные односторонние пределы $f(x+0)$ и $f(x-0)$.*



Черт. 155.

Итак, точками разрыва кусочно непрерывной функции могут быть либо точки разрыва 1-го рода, т. е. точки, в которых $f(c+0) \neq f(c-0)$, либо точки, в которых $\lim\limits_{x \to c} f(x) \neq f(c)$ (черт. 155). Всякая функция, кусочно непрерывная на некотором сегменте, ограничена на этом сегменте.

Все рассматриваемые ниже функции будем предполагать кусочно непрерывными на данном сегменте $[a, b]$.

Определение. *Средним квадратичным отклонением функции $\varphi(x)$ от функции $f(x)$ называется число*

$$\rho(f, \varphi) = \sqrt{\int_a^b [f(x) - \varphi(x)]^2 dx}.$$

Среднее квадратичное отклонение обладает следующими свойствами.

I_ρ. *Среднее квадратичное отклонение есть неотрицательное число*: $\rho(f, \varphi) \geqslant 0$.

При этом $\rho(f, \varphi) = 0$ в том и только в том случае, когда $f(x) = \varphi(x)$ на сегменте $[a, b]$, за исключением, быть может, конечного множества точек. В самом деле, пусть $\rho(f, \varphi) = 0$, т. е.

$\int_a^b (f-\varphi)^2\,dx = 0$, последнее равенство при непрерывных функциях f и φ возможно лишь, если $f-\varphi=0$, т. е. если функции f и φ совпадают. Если хотя бы одна из функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ не является непрерывной, то равенство $f(x)=\varphi(x)$ может нарушаться только в точках разрыва хотя бы одной из данных функций, а таких точек (по условию) имеется лишь конечное множество. В самом деле, пусть $f(c)\neq\varphi(c)$ в точке c, в которой обе функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны; функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны в некоторой окрестности точки c (в силу условия кусочной непрерывности) и $f(x)\neq\varphi(x)$ в этой окрестности, но тогда

$$\rho^2(f,\varphi)=\int_a^b [f-\varphi]^2\,dx>0.$$

II_ρ. *Свойство симметрии*:

$$\rho(f,\varphi)=\rho(\varphi,f).$$

Это свойство следует непосредственно из определения среднего квадратичного отклонения.

III_ρ. *Неравенство треугольника*:

$$\rho(f,\varphi)\leqslant\rho(f,\psi)+\rho(\varphi,\psi).$$

В самом деле, имеем:

$$\rho^2(f,\varphi)=\int_a^b (f-\varphi)^2\,dx=\int_a^b [(f-\psi)+(\psi-\varphi)]^2\,dx=$$

$$=\int_a^b (f-\psi)^2\,dx+\int_a^b (\psi-\varphi)^2\,dx+2\int_a^b (f-\psi)(\psi-\varphi)\,dx. \qquad (1)$$

В силу неравенства Буняковского (том I, § 133) имеем:

$$\left|\int_a^b (f-\psi)(\psi-\varphi)\,dx\right|\leqslant\sqrt{\int_a^b (f-\psi)^2\,dx\cdot\int_a^b (\psi-\varphi)^2\,dx}=$$

$$=\rho(f,\psi)\rho(\psi,\varphi).$$

Из равенства (1) и неравенства Буняковского следует неравенство

$$\rho^2(f,\varphi)\leqslant\rho^2(f,\psi)+\rho^2(\varphi,\psi)+2\rho(f,\psi)\rho(\varphi,\psi),$$

эквивалентное неравенству треугольника.

Для непрерывных функций среднее квадратичное отклонение обладает тремя характеристическими свойствами, присущими расстоянию между двумя точками в евклидовом пространстве. Свойства II_ρ и III_ρ остаются в силе применительно к функциям, кусочно непрерывным на сегменте $[a, b]$, свойство I_ρ справедливо с оговоркой относи-

тельно возможного несовпадения функций f и φ на конечном множестве точек, когда $\rho(f, \varphi) = 0$.

Определения. 1°. *Скалярным произведением* $(f\varphi)$ *функции* f *и* φ *называется интеграл*

$$(f\varphi) = \int_a^b f\varphi\, dx.$$

2°. *Интеграл* $N(f) = \sqrt{\int_a^b f^2\, dx}$ *называется нормой функции* $f(x)$.

3°. *Функции* $f(x)$ и $\varphi(x)$ *называются ортогональными на сегменте* $[a, b]$, *если их скалярное произведение равно нулю*:

$$(f\varphi) = \int_a^b f\varphi\, dx = 0.$$

В силу определения 2° норма функции есть ее среднее квадратичное отклонение от нуля:

$$N(f) = \rho(f, 0) = \sqrt{\int_a^b f^2\, dx}.$$

Рассмотрим бесконечную последовательность функций

$$\varphi_1(x), \ \varphi_2(x), \ \ldots, \ \varphi_n(x), \ \ldots, \qquad \{\varphi_n\}$$

кусочно непрерывных на сегменте $[a, b]$.

Определение. *Последовательность* $\{\varphi_n\}$ *называется ортогональной системой на* $[a, b]$, *если две различные функции этой последовательности ортогональны и каждая из функций* φ_n *имеет норму, отличную от нуля*:

$$\int_a^b \varphi_i\varphi_j\, dx = 0, \quad \text{если} \quad i \neq j \quad \text{и} \quad \int_a^b \varphi_i^2\, dx = N_i^2 \neq 0.$$

Функция $\psi_i = \dfrac{\varphi_i(x)}{N_i}$ имеет норму, равную 1, так как

$$\int_a^b \psi_i^2(x)\, dx = \frac{1}{N_i^2} \int_a^b \varphi_i^2(x)\, dx = 1.$$

Последовательность функций

$$\frac{\varphi_1}{N_1}, \ \frac{\varphi_2}{N_2}, \ \ldots, \ \frac{\varphi_n}{N_n}, \ \ldots$$

есть ортогональная система функций, имеющих (каждая) норму, равную 1; такие системы называются ортогональными нормированными, или кратко — ортонормальными.

Примеры.

1. Тригонометрическая система

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\ \ldots,\ \cos nx,\ \sin nx,\ \ldots$$

является ортогональной на любом сегменте $[a,\ a+2\pi]$.

В самом деле, во-первых,

$$\int_a^{a+2\pi} 1\cdot\cos x\,dx = [\sin x]_a^{a+2\pi} = 0;\qquad \int_a^{a+2\pi} 1\cdot\sin x\,dx = 0;$$

$$\int_a^{a+2\pi} \sin mx\cos nx\,dx = \frac{1}{2}\int_a^{a+2\pi}\sin(m+n)x\,dx + \frac{1}{2}\int_a^{a+2\pi}\sin(m-n)x\,dx = 0$$

и аналогично при $m \neq n$

$$\int_a^{a+2\pi}\cos mx\cos nx\,dx = \int_a^{a+2\pi}\sin mx\sin nx\,dx = 0.$$

Во-вторых, каждая из функций системы имеет норму, отличную от нуля:

$$\int_a^{a+2\pi} 1\,dx = 2\pi \quad\text{и}\quad \int_a^{a+2\pi}\sin^2 nx\,dx = \int_a^{a+2\pi}\cos^2 nx\,dx = \pi.$$

Соответствующая ортонормальная тригонометрическая система есть

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}},\ \ldots,\ \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}},\ \ldots.$$

2. В томе I, § 140 доказано, что полиномы Лежандра

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n\cdot n!}\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}$$

образуют ортогональную систему на сегменте $[-1,\ 1]$. Это следует из основного свойства многочлена $P_n(x)$: многочлен $P_n(x)$ ортогонален любому многочлену $Q(x)$ степени более низкой, чем n:

$$\int_{-1}^{1} Q(x)P_n(x)\,dx = 0.$$

В частности, при $n \neq m$ получим:

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\,dx = 0.$$

Норму полиномов Лежандра нетрудно вычислить интегрированием по частям; имеем:

$$\int_{-1}^{1}\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}\cdot\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}\,dx = \left[\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}\cdot\frac{d^{n-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-1}}\right]_{x=-1}^{x=+1} -$$

$$-\int_{-1}^{1}\frac{d^{n+1}(x^2-1)^n}{dx^{n+1}}\cdot\frac{d^{n-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-1}}\,dx=\ldots$$

$$\ldots=(-1)^n\int_{-1}^{1}\frac{d^{2n}(x^2-1)^n}{dx^{2n}}(x^2-1)^n\,dx=(2n)!\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\,dx.$$

Для вычисления последнего интеграла делаем подстановку $x=\sin t$:

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\,dx=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n+1}t\,dt=2\,\frac{2\cdot4\ldots(2n)}{1\cdot3\cdot5\ldots(2n+1)}.$$

После элементарных преобразований получим:

$$\int_{-1}^{1}P_n^2\,dx=\frac{2}{2n+1};$$

многочлены соответствующей ортонормальной системы суть:

$$\frac{1}{\sqrt{2}},\ \sqrt{\frac{3}{2}}x,\ \sqrt{\frac{5}{2}}\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}\right),\ \ldots,\ \sqrt{\frac{2n+1}{2}}\,\frac{1}{2^n n!}\,\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}.$$

§ 68. Ряд Фурье

Будем предполагать данную ортогональную систему $\{\varphi_i\}$ нормированной.

Определение. *Рядом Фурье функции $f(x)$, кусочно непрерывной на сегменте $[a, b]$, называется ряд:*

$$c_1\varphi_1(x)+c_2\varphi_2(x)+\ldots+c_n\varphi_n(x)+\ldots,$$

в котором коэффициенты $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$, называемые коэффициентами Фурье функции $f(x)$, суть скалярные произведения функции $f(x)$ на соответственные функции данной ортонормальной системы:

$$c_1=\int_a^b f\varphi_1\,dx,\quad c_2=\int_a^b f\varphi_2\,dx,\quad \ldots,\quad c_n=\int_a^b f\varphi_n\,dx,\quad \ldots.$$

Всякой функции $f(x)$, кусочно непрерывной на сегменте $[a, b]$, соответствует ее ряд Фурье; символически это записывается так:

$$f(x)\sim c_1\varphi_1+c_2\varphi_2+\ldots+c_n\varphi_n+\ldots=\sum c_n\varphi_n.$$

Для составления ряда Фурье можно пользоваться следующим правилом: заменив мысленно знак соответствия $\sim$ знаком равенства, умножим обе части на $\varphi_n(x)$ и проинтегрируем почленно в пределах

от a до b, тогда получим (формально):

$$\int_a^b f(x)\,\varphi_n(x)\,dx = c_n.$$

В самом деле, в силу ортонормальности системы $\{\varphi_n\}$ интеграл $\int_a^b \varphi_i\varphi_n\,dx$ равен 0 при $i \neq n$ и 1 при $i = n$. Разумеется, что это правило носит мнемонический характер и не дает основания для каких-либо заключений о сходимости ряда Фурье к функции $f(x)$.

Рассмотрим линейную комбинацию (с произвольными коэффициентами) n первых функций данной ортонормальной системы:

$$\psi_n = k_1\varphi_1 + k_2\varphi_2 + \ldots + k_n\varphi_n.$$

Вычислим среднее квадратичное отклонение функции ψ_n от данной кусочно непрерывной функции f:

$$\rho^2(f, \psi_n) = \int_a^b [f - \psi_n]^2\,dx = \int_a^b f^2\,dx - 2\int_a^b f\psi_n\,dx + \int_a^b \psi_n^2\,dx.$$

Заменив ψ_n развернутым выражением, получим:

$$\int_a^b f\psi_n\,dx = \int_a^b f\sum_{i=1}^n k_i\varphi_i\,dx = \sum_{i=1}^n k_i\int_a^b f\varphi_i\,dx = \sum_{i=1}^n k_i c_i$$

и

$$\int_a^b \psi_n^2\,dx = \int_a^b \left(\sum_{i=1}^n k_i\varphi_i(x)\right)^2 dx = \sum_{i=1}^n k_i^2,$$

где c_i — коэффициенты Фурье функции $f(x)$, и, следовательно:

$$\rho^2(f, \psi_n) = \int_a^b f^2\,dx - 2\sum_{i=1}^n k_i c_i + \sum_{i=1}^n k_i^2. \qquad (1)$$

Теорема. *Из всех линейных комбинаций* $\psi_n = \sum_{i=1}^n k_i\varphi_i$ *(при данном* n*) наименьшее квадратичное отклонение от функции* $f(x)$ *имеет* n*-я частная сумма ряда Фурье этой функции.*

Доказательство. Требуется доказать, что при произвольных действительных значениях $k_1, k_2, \ldots, k_n$ имеет место неравенство:

$$\rho\left(f, \sum_{i=1}^n c_i\varphi_i\right) \leqslant \rho\left(f, \sum_{i=1}^n k_i\varphi_i\right),$$

В самом деле, прибавим и вычтем в правой части равенства (1) сумму $\sum_{i=1}^{n} c_i^2$; тогда получим:

$$\rho^2(f, \psi_n) = \int_a^b f^2\,dx + \sum_{i=1}^{n}(c_i - k_i)^2 - \sum_{i=1}^{n} c_i^2.$$

Отсюда следует, что среднее квадратичное отклонение имеет наименьшее значение, если

$$k_1 = c_1, \quad k_2 = c_2, \quad \ldots, \quad k_n = c_n, \tag{2}$$

т. е. если $\psi_n(x)$ есть n-я частная сумма ряда Фурье функции $f(x)$, ч. т. д.

Для среднего квадратичного отклонения n-й частной суммы ряда Фурье получается (при $k_i = c_i$) формула:

$$\rho^2\left(f, \sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_i\right) = \int_a^b f^2\,dx - \sum_{i=1}^{n} c_i^2.$$

Из этой формулы следует, что последовательность $\rho\left(f, \sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_i\right)$ средних квадратичных отклонений частных сумм ряда Фурье функции $f(x)$ от $f(x)$ является невозрастающей и что для произвольной кусочно непрерывной функции $f(x)$ и при произвольном натуральном n имеет место неравенство:

$$\int_a^b f^2\,dx - \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \geqslant 0 \quad \text{или} \quad \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \leqslant \int_a^b f^2\,dx.$$

Из этого неравенства следует, что при любой кусочно непрерывной функции $f(x)$ частные суммы знакоположительного ряда $\sum_{i=1}^{+\infty} c_i^2$ ограничены. Отсюда как следствия получаются общие основные предложения, справедливые для любой ортонормальной системы $\{\varphi_i\}$ на сегменте $[a, b]$ и любой кусочно непрерывной функции $f(x)$.

1°. *Ряд, составленный из квадратов коэффициентов Фурье, сходится, и имеет место неравенство Бесселя*:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\,dx.$$

В самом деле,

$$\sum_{i=1}^{+\infty} c_i^2 = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\,dx.$$

2°. *Последовательность* $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ *коэффициентов Фурье сходится к нулю.*

В самом деле, c_n^2 есть общий член сходящегося ряда, а потому $\lim c_n = 0$.

§ 69. Сходимость в среднем, замкнутые ортонормальные системы

Определение. *Последовательность функций* $\{f_n(x)\}$ *называется сходящейся в среднем на сегменте* $[a, b]$ *к функции* $f(x)$, *если последовательность* $\rho(f, f_n)$ *средних квадратичных отклонений сходится к нулю, т. е.*

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b [f - f_n]^2 \, dx = 0.$$

Нетрудно видеть, что если последовательность $\{f_n\}$ сходится в среднем к функциям $f(x)$ и $F(x)$, то $f(x) = F(x)$, за исключением, быть может, конечного множества точек на сегменте $[a, b]$.

В самом деле, если $\lim \rho(f, f_n) = 0$ и $\lim \rho(F, f_n) = 0$, тогда при всех достаточно больших значениях n имеем:

$$\rho(f, f_n) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{и} \quad \rho(F, f_n) < \frac{\varepsilon}{2},$$

откуда (неравенство треугольника):

$$\rho(F, f) \leqslant \rho(f, f_n) + \rho(f_n, F) < \varepsilon.$$

При произвольном $\varepsilon > 0$ это возможно лишь, если $\rho(F, f) = 0$, откуда $F = f$ (за исключением, быть может, конечного множества точек).

Теорема. *Если последовательность функций*

$$f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots \qquad \{f_n\}$$

на сегменте $[a, b]$ *равномерно сходится к функции* $f(x)$, *то эта последовательность сходится в среднем к функции* $f(x)$.

Доказательство. Предположим, что $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на сегменте $[a, b]$; докажем, что $\lim \rho(f, f_n) = 0$. В самом деле, функция $f(x)$ интегрируема (см. § 21) и

$$\rho^2(f, f_n) = \int_a^b [f - f_n]^2 \, dx.$$

В силу равномерной сходимости возможен переход к пределу под знаком интеграла, а потому:

$$\lim \rho^2(f, f_n) = \lim \int_a^b [f - f_n]^2 \, dx = \int_a^b \lim [f - f_n]^2 \, dx = 0 \,^*,$$

ч. т. д.

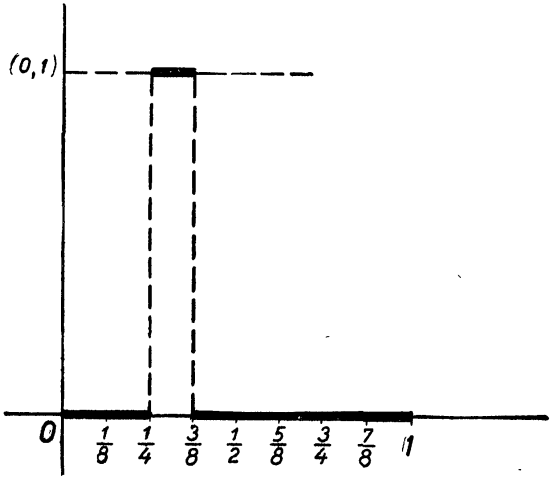
---

* Заметим, что $[f(x) - f_n(x)]^2 \rightrightarrows 0$. В самом деле, при $n > N$ и при всех значениях $x \in [a, b]$ будем иметь $|f - f_n| < \sqrt{\varepsilon}$, но тогда $[f - f_n]^2 < \varepsilon$.

Примечание. В общем случае из существования предельной функции $f(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x)$ не вытекает сходимость в среднем данной последовательности. Точно так же из сходимости в среднем последовательности $\{f_n(x)\}$ не следует ее сходимость в обычном смысле.

Примеры.

1. Последовательность $f_n = n\sqrt{nxe^{-nx}}$ сходится к нулю на сегменте $[0, 1]$ однако эта последовательность не является сходящейся в среднем. В самом деле, для среднего квадратичного отклонения f_n от нуля имеем:



Черт. 156.

$$\rho^2(f_n, 0) = \int_0^1 n^3 x e^{-nx}\, dx \text{ и}$$

$\lim \rho(f_n, 0) = +\infty$ (пример 4, стр. 100).

Если бы данная последовательность сходилась в среднем к функции $f(x)$, то мы имели бы $\lim \rho(f, f_n) = 0$, что невозможно, так как (неравенство треугольника)

$$\rho(f_n, f) \geqslant \rho(f_n, 0) - \rho(f, 0).$$

2. Последовательность $f_n(x) = \sqrt[4]{n}\, e^{-\frac{1}{2}n^2x^2}$ на сегменте $[-1, 1]$ сходится в среднем к нулю. В самом деле,

$$\rho^2(f_n, 0) = \int_{-1}^{1} [f_n(x)]^2\, dx = \sqrt{n} \int_{-1}^{1} e^{-n^2x^2}\, dx < \sqrt{n} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-n^2x^2}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{n}}\,*;$$

откуда $\lim \rho(f_n, 0) = 0$.

На сегменте $[-1, 1]$ данная последовательность не является сходящейся. Так, например, она расходится в точке 0:

$$\lim f_n(0) = \lim \sqrt[4]{n} = +\infty.$$

3. Если $n = 2^k + p$, где $0 \leqslant p < 2^k$, то положим $f_n(x) = 1$ на сегменте $\left[\frac{p}{2^k}, \frac{p+1}{2^k}\right]$ и $f(x) = 0$ вне этого сегмента. На чертеже 156 представлен график $f_{10}(x)$ (имеем $k = 3$, $p = 2$). Эта последовательность расходится в любой точке сегмента $[0, 1]$ и вместе с тем сходится в среднем к нулю на этом

---

* Мы пользуемся равенством $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-n^2x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{n}$ (см. пример 1 § 114, интеграл Пуассона).

сегменте:

$$\lim_{n\to+\infty}\rho^2(f_n, 0)=\lim_{k\to+\infty}\int\limits_{\frac{p}{2^k}}^{\frac{p+1}{2^k}} dx=\lim\frac{1}{2^k}=0.$$

В последующих рассуждениях будем считать данными сегмент $[a, b]$ и ортонормальную систему $\{\varphi_n(x)\}$ на этом сегменте.

Теорема. *Необходимым и достаточным условием сходимости в среднем ряда Фурье кусочно непрерывной функции $f(x)$ к данной функции $f(x)$ является выполнение равенства Парсеваля:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} c_n^2=\int_a^b [f(x)]^2\,dx,$$

где c_n — коэффициенты Фурье функции $f(x)$.

Иными словами, *необходимым и достаточным условием сходимости в среднем ряда Фурье кусочно непрерывной функции $f(x)$ к этой функции является обращение неравенства Бесселя в равенство.* Это равенство принято называть равенством Парсеваля.

Доказательство. Пусть $s_n(x)$ есть n-я частная сумма ряда Фурье функции $f(x)$; квадрат среднего квадратичного отклонения $s_n(x)$ от $f(x)$ выражается равенством:

$$\rho^2(s_n, f)=\int_a^b f^2\,dx-\sum_{k=1}^{n} c_k^2.$$

Следовательно, $\lim\rho(s_n, f)=0$ в том и только в том случае, когда

$$\lim\sum_{k=1}^{n} c_k^2=\sum_{k=1}^{+\infty} c_k^2=\int_a^b f^2\,dx,$$

ч. т. д.

Определение. *Ортонормальная система $\{\varphi_n(x)\}$ называется замкнутой (в множестве кусочно непрерывных функций), если ряд Фурье произвольной кусочно непрерывной на сегменте $[a, b]$ функции $f(x)$ сходится в среднем к данной функции.*

Из этого определения и предшествующей теоремы следует, что необходимым и достаточным условием замкнутости ортонормальной системы является выполнение равенства Парсеваля

$$\sum_{n=1}^{+\infty} c_n^2=\int_a^b f^2\,dx$$

для произвольной кусочно непрерывной на сегменте $[a, b]$ функции $f(x)$.

Замкнутая ортонормальная система обладает нижеследующим свойством полноты.

Теорема (о полноте). *Если кусочно непрерывная функция $f(x)$ ортогональна к каждой функции замкнутой ортонормальной системы $\{\varphi_n\}$, то $f(x)=0$ на сегменте $[a, b]$, за исключением, быть может, конечного множества точек.*

Доказательство. Если функция $f(x)$ ортогональна к каждой функции данной замкнутой ортонормальной системы, то при всех значениях n имеем:

$$c_n = \int_a^b f\varphi_n\,dx = 0.$$

Следовательно, все коэффициенты Фурье функции $f(x)$ равны нулю.

В силу равенства Парсеваля

$$\int_a^b f^2\,dx = \sum c_n^2 = 0.$$

Значит, $f(x)=0$ на сегменте $[a, b]$, за исключением, быть может, конечного множества точек, ч. т. д.

Всякая функция, равная нулю на сегменте $[a, b]$ (кроме, быть может, конечного множества точек), ортогональна к любой функции данной ортогональной системы. Для замкнутой ортонормальной системы $\{\varphi_i\}$ не существует никаких других функций, ортогональных к каждой функции системы. Таким образом, *замкнутую ортонормальную систему невозможно пополнить присоединением к ней новых функций так, чтобы полученная система продолжала оставаться ортогональной.*

Теорема единственности. *Если две кусочно непрерывные функции $f(x)$ и $F(x)$ имеют один и тот же ряд Фурье в замкнутой ортонормальной системе, то $f(x)=F(x)$ на сегменте $[a, b]$ (за исключением, быть может, конечного множества точек).*

В частности, две различные непрерывные функции не могут иметь один и тот же ряд Фурье. Две кусочно непрерывные функции, имеющие один и тот же ряд Фурье, могут отличаться значениями лишь в точках разрыва.

Доказательство. Если функции $f(x)$ и $F(x)$ имеют один и тот же ряд Фурье, то частные суммы $s_n(x)$ этого ряда сходятся в среднем к данным функциям: $\lim \rho(f, s_n)=0$ и $\lim \rho(F, s_n)=0$, что возможно лишь при условии $f=F$ (за исключением, быть может, конечного множества точек), ч. т. д.

Теорема. *Если в замкнутой ортонормальной системе ряд Фурье функции $f(x)$ равномерно сходится на сегменте $[a, b]$, то его сумма равна данной функции:*

$$f(x)=c_1\varphi_1(x)+c_2\varphi_2(x)+\ldots+c_n\varphi_n(x)+\ldots$$

(за исключением, быть может, конечного множества точек).

В частности, если функции данной ортонормальной системы и функция $f(x)$ непрерывны и если ряд Фурье функции $f(x)$ равномерно сходится, то его сумма равна $f(x)$ всюду на сегменте $[a, b]$.

Доказательство. Если последовательность частных сумм ряда Фурье равномерно сходится

$$s_n(x) \rightrightarrows F(x),$$

то $s_n(x)$ сходится в среднем к той же функции. Но, с другой стороны $\{s_n(x)\}$ сходится в среднем к $f(x)$. Следовательно, $f(x) = F(x)$ (за исключением, быть может, конечного множества точек), ч. т. д.

Доказанная теорема дает достаточное условие, при котором функция $f(x)$ разлагается в ряд Фурье по функциям замкнутой ортонормальной системы. Если (составленный формально) ряд Фурье функции $f(x)$ окажется равномерно сходящимся, то его сумма равна функции $f(x)$ (за исключением, быть может, конечного множества точек).

§ 70. Тригонометрическая система

Тригонометрические функции

$$1, \cos x, \sin x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots$$

на любом сегменте $[a, a+2\pi]$ длины 2π образуют ортогональную систему с одной и той же нормой, равной $\sqrt{\pi}$, кроме первой функции, имеющей норму, равную $\sqrt{2\pi}$. Таким образом, для перехода к соответствующей ортонормальной системе достаточно все функции, кроме 1, умножить на один и тот же коэффициент, равный $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$, а 1 умножить на $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. Всякой кусочно непрерывной на данном сегменте функции $f(x)$ соответствует тригонометрический ряд Фурье: $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + \ldots + (a_n \cos nx + b_n \sin nx) + \ldots$*, где коэффициенты a_n и b_n определяются формулами

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} f(x) \cos nx \, dx \quad (\text{где } n = 0, 1, 2, \ldots)$$

и

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} f(x) \sin nx \, dx \quad (\text{где } n = 1, 2, \ldots).$$

---

* Первый коэффициент обозначен через $\frac{a_0}{2}$ лишь для симметрии в последующих формулах.

Коэффициенты a_0, a_1, b_1, ..., a_n, b_n, ... обычно называют коэффициентами Фурье функции $f(x)$ в тригонометрической системе.

Эти коэффициенты, кроме первого, отличаются от соответствующих коэффициентов функции $f(x)$ в ортонормальной тригонометрической системе лишь общим множителем, равным $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$; именно, в ортонормальной тригонометрической системе имеем:

$$f(x) \sim \frac{a_0\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \sqrt{\pi} \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} + b_n \sqrt{\pi} \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} \right),$$

и соответственные коэффициенты суть:

$$\frac{a_0\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}},\ a_1\sqrt{\pi},\ b_1\sqrt{\pi},\ \ldots,\ a_n\sqrt{\pi},\ b_n\sqrt{\pi},\ \ldots.$$

Применительно к тригонометрической системе неравенство Бесселя запишется так:

$$\frac{\pi a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (\pi a_n^2 + \pi b_n^2) \leqslant \int_a^{a+2\pi} f^2(x)\,dx$$

или

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2) \leqslant \frac{1}{\pi} \int_0^{a+2\pi} f^2(x)\,dx.$$

Для всякой кусочно непрерывной на сегменте $[a,\ a+2\pi]$ функции последовательность коэффициентов Фурье сходится к нулю (см. § 68):

$$\lim a_n = \lim b_n = 0.$$

Значит,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^{a+2\pi} f(x) \cos nx\,dx = \lim \int_a^{a+2\pi} f(x) \sin nx\,dx = 0.$$

Следствие. *Для всякой функции $f(x)$, кусочно непрерывной на произвольном сегменте $[a,\ b]$,*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(x) \cos nx\,dx = \lim \int_a^b f(x) \sin nx\,dx = 0. \qquad (1)$$

В самом деле, утверждение справедливо, если сегмент $[a,\ b]$ имеет длину, равную 2π. Пусть $[a,\ b]$ — произвольный сегмент; разобьем этот

сегмент следующим образом:

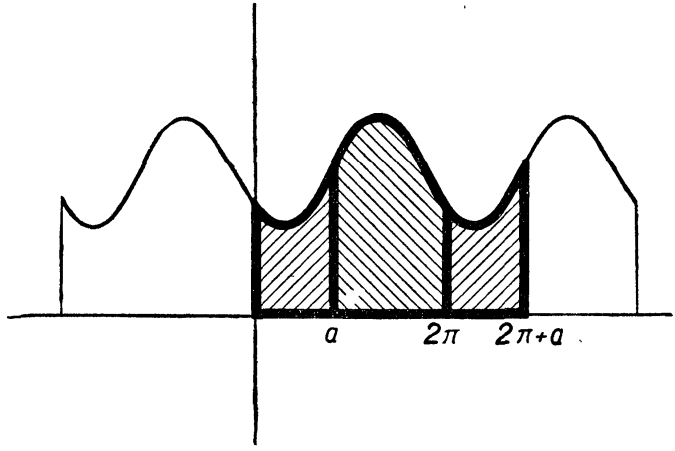
$$[a,\ a+2\pi],\ [a+2\pi,\ a+4\pi],\ \ldots,\ [a+2(k-1)\pi,\ a+2k\pi],$$
$$[a+2k\pi,\ b],$$

где последний сегмент по длине не больше 2π.

Продолжим функцию $f(x)$ вправо за точку b, условившись считать $f(x)=0$ в полуинтервале $(b,\ a+2(k+1)\pi]$, тогда получим:

$$\int_a^b f(x)\cos nx\,dx = \int_a^{a+2\pi} + \int_{a+2\pi}^{a+4\pi} + \ldots + \int_{a+2k\pi}^{a+2(k+1)\pi}.$$

Каждый из интегралов в правой части имеет предел, равный 0, отсюда очевидна справедливость равенств (1) для произвольного сегмента $[a,\ b]$.



Черт. 157.

Пусть $\Phi(x)$ — произвольная периодическая функция с периодом, равным 2π. В силу предположенной периодичности функции $\Phi(x)$ при произвольном значении a имеет место равенство:

$$\int_a^{a+2\pi} \Phi(x)\,dx = \int_0^{2\pi} \Phi(x)\,dx.$$

В самом деле,

$$\int_a^{a+2\pi} \Phi(x)\,dx = \int_a^{2\pi} \Phi(x)\,dx + \int_{2\pi}^{a+2\pi} \Phi(x)\,dx.$$

Сделав во втором интеграле (в правой части) подстановку $x=t+2\pi$ и воспользовавшись свойством периодичности подинтегральной функ-

ции $\Phi(t+2\pi)=\Phi(t)$, получим (черт. 157):

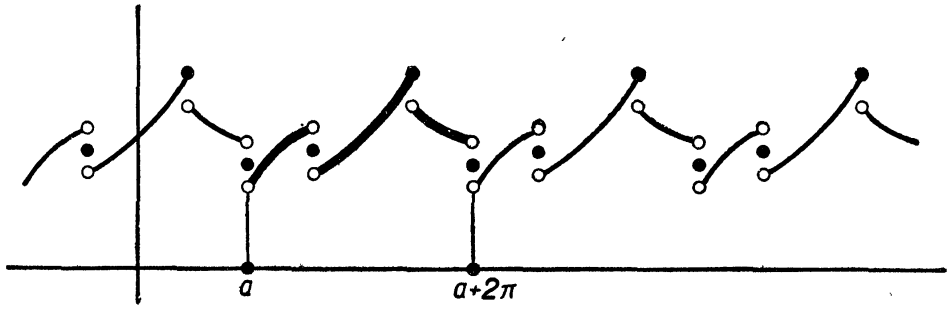
$$\int_a^{a+2\pi}\Phi(x)\,dx=\int_a^{2\pi}\Phi(x)\,dx+\int_0^{a}\Phi(t+2\pi)\,dt=$$

$$=\int_a^{2\pi}\Phi(x)\,dx+\int_0^{a}\Phi(t)\,dt=\int_0^{2\pi}\Phi(x)\,dx.$$

Рассмотрим кусочно непрерывную функцию $f(x)$, заданную на сегменте $[a,\ a+2\pi]$. Определим функцию $f^*(x)$ следующим законом соответствия:

$$f^*(x)=\begin{cases} f(x) & \text{в интервале } (a,\ a+2\pi)\\ f(x-2k\pi) & \text{в интервале } (a+2k\pi,\ a+2(k+1)\pi),\end{cases}$$

где k — произвольное целое число.



Черт. 158.

В точках $a+2k\pi$ значение $f^*(a+2k\pi)$ можно считать равным какому угодно числу (какому именно — для дальнейшего не существенно). Для определенности принято значение $f^*(a+2k\pi)$ считать равным среднему арифметическому правого предела $f(x)$ в точке a и левого предела в точке $a+2\pi$:

$$f^*(a+2k\pi)=\frac{f(a+0)+f(a+2\pi-0)}{2}.$$

Таким образом, $f^*(x)$ есть периодическая функция с периодом 2π, совпадающая с функцией $f(x)$ в интервале $(a,\ a+2\pi)$ (черт. 158).

Будем называть функцию $f^*(x)$ периодическим продолжением (с данным периодом 2π) функции $f(x)$.

Функция $f^*(x)\cos nx$ есть периодическая функция с периодом 2π, а потому

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi}f^*(x)\cos nx\,dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^*(x)\cos nx\,dx.$$

Аналогичное равенство имеет место для коэффициентов b_n. Таким образом, функцию $f(x)$ (не изменяя значений коэффициентов Фурье) можно заменить ее периодическим продолжением $f^*(x)$ и рассматривать последнюю функцию в интервале $(-\pi, \pi)$ (или $(0, 2\pi)$). В дальнейшем будем предполагать это продолжение выполненным и с самого начала считать данную функцию $f(x)$ периодической с периодом, равным 2π.

§ 71. Интегральное представление частной суммы ряда Фурье

Рассмотрим ряд Фурье кусочно непрерывной периодической функции $f(x)$:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Преобразуем k-й член этого ряда, представив коэффициенты Фурье в виде интегралов:

$$a_k \cos kx + b_k \sin kx = \frac{1}{\pi} \cos kx \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt \, dt +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \sin kx \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt \, dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos k(t - x) \, dt.$$

Составим частную сумму ряда Фурье:

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[\frac{1}{2} + \cos(t - x) + \cos 2(t - x) + \ldots + \right.$$

$$\left. + \cos n(t - x) \right] dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)(t - x)}{2 \sin \frac{t - x}{2}} \, dt \, *.$$

---

* Мы пользуемся следующей элементарной формулой суммирования:

$$\frac{1}{2} + \cos\alpha + \cos 2\alpha + \ldots + \cos n\alpha = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\alpha}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}.$$

Эту формулу получим, умножив (почленно) левую часть на $2 \sin \frac{\alpha}{2}$ и

Сделаем подстановку, положив $t - x = z$; получим:

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(z+x) \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)z}{2\sin\frac{z}{2}}\,dz =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(z+x) \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)z}{2\sin\frac{z}{2}}\,dz.$$

Эта формула дает представление частной суммы ряда Фурье в виде интеграла, в котором подинтегральная функция содержит аргумент x в качестве параметра.

Разбив промежуток интеграции на две части $[-\pi, 0]$ и $[0, \pi]$, получим:

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x+z) \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)z}{2\sin\frac{z}{2}}\,dz +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} f(x+z) \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)z}{2\sin\frac{z}{2}}\,dz =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} [f(x+z) + f(x-z)] \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)z}{2\sin\frac{z}{2}}\,dz$$

(во втором интеграле заменить z на $-z$).

Положим, в частности, $f(x) = \text{const} = 1$, тогда все коэффициенты ряда Фурье, кроме a_0, обратятся в нуль, а потому будем иметь

преобразовав каждое слагаемое по формуле:

$$2\cos k\alpha \sin\frac{\alpha}{2} = \sin\left(k+\frac{1}{2}\right)\alpha - \sin\left(k-\frac{1}{2}\right)\alpha.$$

После сокращения получим в левой части $\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha$.

$s_n(x) = \text{const} = 1$. Положив в интегральной формуле $f(x) = 1$, получим:

$$1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)z}{2\sin\frac{z}{2}}\,dz = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)z}{\sin\frac{z}{2}}\,dz$$

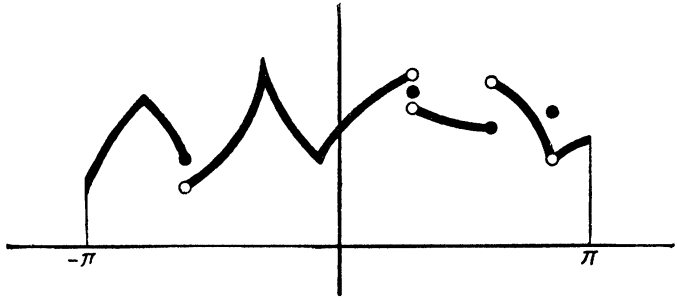
при всех натуральных значениях n.

§ 72. Сходимость ряда Фурье

Ниже будет исследована сходимость тригонометрического ряда Фурье при следующих предположениях:

1°. *Функция $f(x)$ является периодической с периодом 2π.*

2°. *Функция $f(x)$ и ее производная $f'(x)$ являются кусочно непрерывными на сегменте* $[-\pi, \pi]$.



Черт. 159.

Таким образом, в силу условия 2° функция $f(x)$ на любом конечном промежутке непрерывна, за исключением, быть может, конечного множества точек разрыва 1-го рода. Следовательно, в каждой точке существуют оба односторонние предела (конечные) $f(x+0)$ и $f(x-0)$. Эти пределы равны, за исключением, быть может, конечного множества точек.

Производная $f'(x)$ непрерывна, за исключением, быть может, конечного множества точек разрыва 1-го рода. Производная не существует, во-первых, в точках разрыва функции $f(x)$ и, во-вторых, в точках разрыва $f'(x)$. Но в каждой точке существуют конечные односторонние производные:

$$f'_+(x) = \lim_{h\to 0+} \frac{f(x+h)-f(x+0)}{h} \quad \text{и} \quad f'_-(x) = \lim_{h\to 0+} \frac{f(x-h)-f(x-0)}{-h}.$$

График функции, удовлетворяющий условиям 1° и 2° на сегменте $[-\pi, \pi]$, может быть составлен из конечного числа гладких дуг, при этом допускается не более конечного числа точек разрыва и угловых точек (черт. 159).

Теорема. *Если периодическая функция $f(x)$ с периодом 2π и ее производная кусочно непрерывны, то ряд Фурье $f(x)$ сходится в каждой точке x к среднему арифметическому односторонних пределов функции $f(x)$ в точке x:*

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx).$$

В частности, в каждой точке x, в которой функция $f(x)$ непрерывна, ряд Фурье сходится к ее значению в этой точке, так как в точках непрерывности

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=f(x).$$

Доказательство. Воспользовавшись тождеством

$$1=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)z}{\sin\frac{z}{2}}\,dz,$$

представим среднее арифметическое односторонних пределов функции $f(x)$ в интегральной форме:

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[f(x+0)+f(x-0)]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)z}{2\sin\frac{z}{2}}\,dz.$$

Для доказательства теоремы достаточно доказать, что разность

$$R_n(x)=s_n(x)-\frac{f(x+0)-f(x-0)}{2}$$

имеет предел $\lim\limits_{n\to+\infty}R_n(x)$, равный нулю. Представим $R_n(x)$ в интегральной форме:

$$R_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[f(x+z)+f(x-z)]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)z}{2\sin\frac{z}{2}}\,dz-$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[f(x+0)+f(x-0)]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)z}{2\sin\frac{z}{2}}\,dz,$$

откуда

$$R_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[f(x+z)-f(x+0)]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)z}{2\sin\frac{z}{2}}\,dz+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[f(x-z)-f(x-0)]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)z}{2\sin\frac{z}{2}}\,dz.$$

Рассмотрим первый интеграл в правой части последнего равенства:

$$I_1=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[f(x+z)-f(x+0)]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)z}{2\sin\frac{z}{2}}\,dz.$$

Функция

$$F(z)=\frac{f(x+z)-f(x+0)}{2\sin\frac{z}{2}},$$

рассматриваемая на сегменте $0\leqslant z\leqslant\pi$ в точке $z=0$, имеет точку устранимого разрыва, так как

$$\lim_{z\to 0}F(z)=\lim\frac{f(x+z)-f(x+0)}{2\sin\frac{z}{2}}=\lim E\,\frac{f(x+z)-f(x+0)}{z}=$$

$$=f'_+(x)\quad(\text{где }\lim_{z\to 0}E=1).$$

Согласно принципу продолжения по непрерывности следует положить $F(0)=f'_+(x)$. Функция $F(z)$ кусочно непрерывна на сегменте $0\leqslant z\leqslant\pi$, так как вместе с функцией $f(z)$ она может иметь лишь конечное множество точек разрыва 1-го рода. Следовательно, имеем (следствие, стр. 336):

$$\lim_{n\to+\infty}I_1=\lim\int_0^{\pi}F(z)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)z\,dz=$$

$$=\lim\int_0^{\pi}F(z)\cos\frac{z}{2}\sin nz\,dz+\lim\int_0^{\pi}F(z)\sin\frac{z}{2}\cos nz\,dz=0.$$

Аналогично можно доказать, что

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi}[f(x-z)-f(x-0)]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)z}{2\sin\frac{z}{2}}\,dz=0.$$

Итак,

$$\lim R_n(x)=0,\ \text{т. е.}\ \lim_{n\to+\infty}s_n(x)=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2},\ \text{ч. т. д.}$$

Следствие. Если при соблюдении всех условий теоремы функция $f(x)$ непрерывна, то ряд Фурье $f(x)$ сходится к $f(x)$ в интервале $(-\infty, +\infty)$:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum(a_n\cos nx+b_n\sin nx).$$

Примечание. Сходимость ряда Фурье к данной функции имеет место для более широкого класса функций, чем функции с кусочно непрерывной производной. Так, например, для справедливости теоремы достаточно, чтобы $f(x)$ была функцией с ограниченной вариацией (том I, § 145). Однако для произвольной функции теорема не имеет места: можно построить пример непрерывной функции, для которой ряд Фурье не является сходящимся *.

Отметим историческое значение рядов Фурье в развитии понятия функции. Тригонометрические ряды дают возможность во многих случаях представить «единым аналитическим выражением» функции, которые в различных промежутках задаются разными формулами. Открытие этого положения, относящееся к первой половине прошлого века, явилось одной из причин, заставивших математиков отказаться от господствовавшей в XVIII веке концепции функции как «единого аналитического выражения» — формулы.

§ 73. Разложение функций в тригонометрические ряды

Периодические функции с произвольным периодом. Пусть $f(x)$ — периодическая функция с периодом, равным $2l$. Линейная функция $t=\pi\frac{x}{l}$ взаимно однозначно и непрерывно отображает сегмент $-l\leqslant x\leqslant l$ на сегмент $-\pi\leqslant t\leqslant\pi$. Следовательно, $\varphi(t)=f\left(\frac{l}{\pi}t\right)$ есть периодическая функция с периодом 2π; в самом деле:

$$\varphi(t+2\pi)=f\left(\frac{l}{\pi}(t+2\pi)\right)=f\left(\frac{l}{\pi}t+2l\right)=f\left(\frac{l}{\pi}t\right)=\varphi(t).$$

* См., например, В. Немыцкий, М. Слудская и А. Черкасов, Курс математического анализа, том II.

Для преобразования интеграла от функции $f(x)$ имеет место формула:

$$\int_{-l}^{l} f(x)\,dx = \frac{l}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(t\,\frac{l}{\pi}\right)dt \quad \text{или} \quad \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)\,dt.$$

При помощи преобразования периода из тригонометрической системы

$$1,\ \cos t,\ \sin t,\ \ldots,\ \cos nt,\ \sin nt,\ \ldots$$

получается тригонометрическая система функций

$$1,\ \cos\frac{\pi}{l}x,\ \sin\frac{\pi}{l}x,\ \ldots,\ \cos n\frac{\pi x}{l},\ \sin n\frac{\pi x}{l},\ \ldots$$

с периодом $2l$, ортогональных на сегменте $[-l, l]$. Эти функции имеют общую норму, равную $\sqrt{l}$, кроме первой функции, 1, норма которой равна $\sqrt{2l}$. Произвольной кусочно непрерывной на сегменте $[-l, l]$ функции $f(x)$ соответствует ряд Фурье

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum\left(a_n \cos n\frac{\pi x}{l} + b_n \sin n\frac{\pi x}{l}\right),$$

где коэффициенты a_n и b_n определяются по формулам

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos n\frac{\pi x}{l}\,dx, \quad b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin n\frac{\pi x}{l}\,dx.$$

Теорема о сходимости ряда Фурье, доказанная для случая периодической функции с периодом 2π (см. предыдущий параграф), остается в силе применительно к функциям с произвольным периодом.

В самом деле, из соотношений

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)\cos nt\,dt$$

и

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)\sin nt\,dt$$

следует, что преобразование периода преобразует ряд Фурье функции $f(x)$ в ряд Фурье функции $\varphi(t) = f\left(\frac{l}{\pi}t\right)$ с периодом 2π. Таким образом, исследование сходимости ряда Фурье функции $f(x)$ сводится к исследованию сходимости ряда Фурье функции $\varphi(t)$.

Пусть $f(x)$ — произвольная кусочно непрерывная функция, рассматриваемая в данном интервале (a, b). Приняв в качестве периода число

$2l = b - a$, продолжим данную функцию по периодичности, тогда получим функцию $f^*(x)$, определенную в интервале $(-\infty, +\infty)$ и равную $f(x)$ в интервале (a, b). При соблюдении условий теоремы о сходимости ряда Фурье (см. предыдущий параграф) ряд Фурье функции $f^*(x)$ сходится к функции $f(x)$ в интервале (a, b).

Ряды Фурье четных и нечетных функций. Пусть $f(x)$ — данная периодическая функция; для определенности будем считать период $f(x)$ равным 2π.

Теорема. *Если $f(x)$ — четная функция, то ее ряд Фурье содержит только члены с косинусами:*

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + \ldots + a_n \cos nx + \ldots.$$

Если $f(x)$ — нечетная функция, то ее ряд Фурье содержит только члены с синусами:

$$f(x) \sim b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \ldots + b_n \sin nx + \ldots.$$

Доказательство. Требуется доказать, что если $f(x)$ — четная функция, то $b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 0$, а если $f(x)$ — нечетная функция, то $a_0 = a_1 = \ldots = a_n = 0$.

Для доказательства достаточно принять во внимание, что если $F(x)$ — нечетная функция, то

$$\int_{-a}^{a} F(x)\,dx = 0.$$

В самом деле

$$\int_{-a}^{a} F(x)\,dx = \int_{-a}^{0} F(x)\,dx + \int_{0}^{a} F(x)\,dx;$$

заменив в первом интеграле x на $-x$ и воспользовавшись свойством нечетности,

$$F(-x) = -F(x),$$

получим:

$$\int_{-a}^{a} F(x)\,dx = -\int_{0}^{a} F(x)\,dx + \int_{0}^{a} F(x)\,dx = 0.$$

Если $f(x)$ — четная функция, то $f(x)\sin nx$ — нечетная функция, а потому $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = 0$.

Если $f(x)$ — нечетная функция, то $f(x)\cos nx$ — также нечетная функция, а потому

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = 0, \text{ ч. т. д.}$$

Для вычисления коэффициентов Фурье от четных и нечетных функций обычно пользуются следующими формулами:

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \quad \text{если } f(x) \text{ — четная функция,}$$

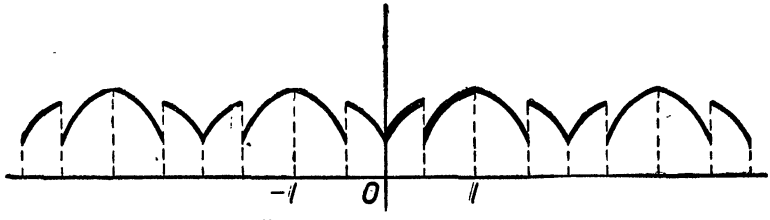
и

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx, \quad \text{если } f(x) \text{ — нечетная функция.}$$

В самом деле, достаточно принять во внимание, что в обеих формулах подинтегральная функция является четной, а для всякой четной функции $F(x)$ имеем:

$$\int_{-a}^{a} F(x)\,dx = \int_{-a}^{0} F(x)\,dx + \int_0^a F(x)\,dx = 2\int_0^a F(x)\,dx.$$

Пусть $f(x)$ — произвольная кусочно непрерывная вместе со своей производной функция, заданная на сегменте $[0, l]$. Функцию, опреде-



ЧЁТНОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ

Черт. 160а.

ленную на сегменте $[-l, l]$ законом соответствия:

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x) & (\text{если } 0 < x \leqslant l), \\ f(-x) & (\text{если } -l \leqslant x < 0), \\ f(+0) & (\text{если } x = 0), \end{cases}$$

и продолженную периодически с периодом $2l$, будем называть четным продолжением функции $f(x)$ (черт. 160а). Функция $f^*(x)$ разлагается в ряд Фурье по косинусам. В точках сегмента $[0, l]$,

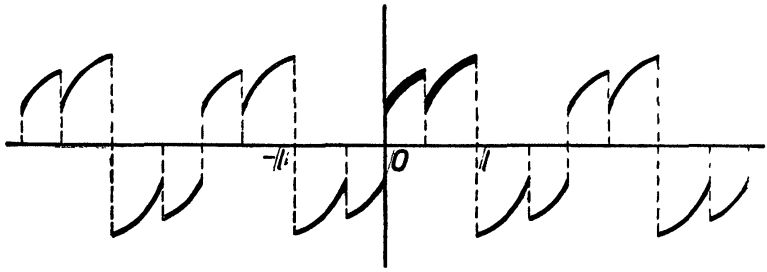
в которых функция $f(x)$ непрерывна, этот ряд сходится к $f(x)$:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\cos\frac{n\pi x}{l};$$

в точках разрыва данной функции сумма ряда равна $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$.

Коэффициенты Фурье a_n вычисляются по формуле:

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx.$$



НЕЧЁТНОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ

Черт. 160b.

Аналогично можно рассматривать нечетное продолжение данной функции $f(x)$ (черт. 160b).

$$f^*(x)=\begin{cases} f(x) & (\text{при } 0<x\leqslant l),\\ -f(-x) & (\text{при } -l\leqslant x<0),\\ 0 & (\text{при } x=0).\end{cases}$$

Ряд Фурье функции $f^*(x)$ дает разложение функции $f(x)$ на сегменте $[0, l]$ в тригонометрический ряд по синусам:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} b_n\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

Таким образом, на сегменте $[0, l]$ данную функцию $f(x)$ можно разложить в ряд по синусам, а также в ряд по косинусам; вне сегмента $[0, l]$ этот ряд изображает в первом случае нечетное, а во втором случае четное продолжение данной функции.

Примеры.

1. Разложить в ряд по синусам функцию $f(x)=x$ в промежутке $(0, \pi)$. Вычисляем коэффициенты Фурье:

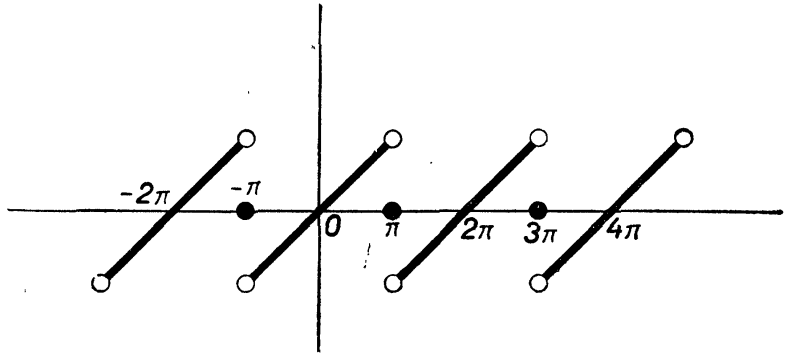
$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\sin nx\,dx=\frac{2}{\pi}\left[-x\frac{\cos nx}{n}\right]_0^\pi+\frac{2}{\pi n}\int_0^\pi\cos nx\,dx=$$

$$=-\frac{2\cos n\pi}{n}=2\frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Следовательно, в интервале $(0, \pi)$ имеет место равенство:

$$x = 2\left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots\right).$$

Вне интервала $(0, \pi)$ полученный ряд изображает нечетное продолжение рассматриваемой функции. Следовательно, равенство остается в силе во всем интервале $(-\pi, \pi)$. Вне интервала $(-\pi, \pi)$ ряд изображает периодическое продолжение функции x (черт. 161), при этом в точках $x = k\pi$ ряд сходится к нулю.

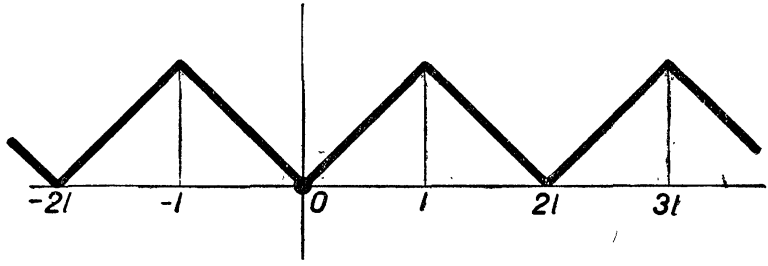


Черт. 161.

2. Разложить в ряд по косинусам функцию $f(x) = x$ в промежутке $(0, l)$. Вычисляем коэффициенты Фурье:

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l x \cos\frac{n\pi x}{l}\,dx = -\frac{2}{n\pi}\int_0^l \sin\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{2l}{n^2\pi^2}\left[\cos(n\pi) - 1\right],$$

при $n \neq 0$, и $a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l x\,dx = l$.



Черт. 162.

Четное продолжение функции x на сегменте $[-l, l]$ есть $|x|$. Следовательно, имеем:

$$|x| = \frac{l}{2} - \frac{4l}{\pi^2}\left[\cos\frac{\pi x}{l} + \frac{1}{3^2}\cos\frac{3\pi x}{l} + \dots + \frac{1}{(2n-1)^2}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{l} + \dots\right]$$

на сегменте $[-l, l]$, вне этого сегмента ряд изображает периодическое (с периодом $2l$) продолжение функции $|x|$ (черт. 162). Положив $l = 1$ и $x = 0$,

получим:

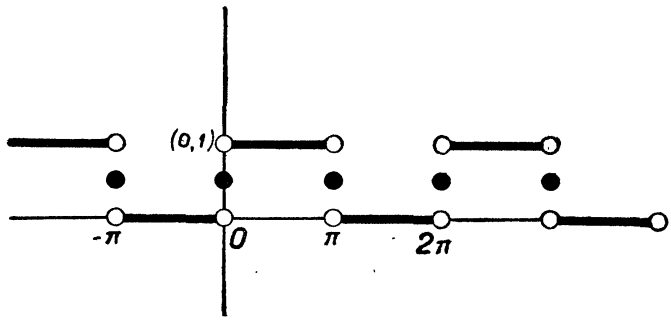
$$1+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{(2n+1)^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{8}.$$

3. Разложить в ряд Фурье на сегменте $[-\pi, \pi]$ функцию $f(x)=x^2$. Данная функция четная, а потому имеем:

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos nx\,dx=-\frac{4}{\pi n}\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx=\frac{4}{\pi n^2}[x\cos nx]_0^{\pi}-$$

$$-\frac{4}{\pi n^2}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx=\frac{4}{n^2}(-1)^n,$$

при $n\neq 0$, и $a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\,dx=\frac{2}{3}\pi^2$.



Черт. 163.

Таким образом, получим на сегменте $[-\pi, \pi]$:

$$x^2=\frac{\pi^2}{3}-4\left(\cos x-\frac{1}{4}\cos 2x+\frac{1}{9}\cos 3x-\ldots\right).$$

Положив $x=0$, получим:

$$1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{12}.$$

Положив $x=\pi$, получим:

$$1+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{6}.$$

4. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$, заданную на сегменте $[0, 2\pi]$, следующим законом соответствия:

$$f(x)=\begin{cases}1 & (\text{при } 0<x<\pi),\\ 0 & (\text{при } \pi<x<2\pi),\\ \frac{1}{2} & (\text{при } x=0,\ \pi,\ 2\pi)\ \text{(черт. 163).}\end{cases}$$

Вычисляем коэффициенты Фурье:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx = 0, \text{ если } n \neq 0 \text{ и } a_0 = 1;$$

$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx = \frac{1}{n\pi}[1-\cos n\pi]$. Следовательно:

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left[\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \ldots + \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1} + \ldots\right].$$

5. Пусть μ — произвольное нецелое число. Разложим в ряд Фурье функцию $\cos \mu x$ в интервале $(-\pi, \pi)$. Так как данная функция четная, то имеем:

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos \mu x\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[\cos(\mu+n)x + \cos(\mu-n)x]\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(\mu+n)\pi}{\mu+n} + \frac{\sin(\mu-n)\pi}{\mu-n}\right] = \frac{2}{\pi}\frac{\mu\sin\mu\pi}{\mu^2-n^2}\cos n\pi = \frac{(-1)^n}{\pi}\cdot\frac{2\mu}{\mu^2-n^2}\sin\mu\pi.$$

Следовательно,

$$\cos\mu x = \frac{2\mu\sin\mu\pi}{\pi}\left[\frac{1}{2\mu^2} - \frac{1}{\mu^2-1}\cos x + \frac{1}{\mu^2-2^2}\cos 2x - \ldots\right].$$

Положим в последней формуле $x = \pi$, тогда получим:

$$\cos\mu\pi = \frac{2\mu\sin\mu\pi}{\pi}\left[\frac{1}{2\mu^2} + \frac{1}{\mu^2-1} + \frac{1}{\mu^2-2^2} + \ldots + \frac{1}{\mu^2-n^2} + \ldots\right],$$

откуда найдем:

$$\operatorname{ctg}\mu\pi = \frac{2\mu}{\pi}\left[\frac{1}{2\mu^2} + \frac{1}{\mu^2-1} + \ldots + \frac{1}{\mu^2-n^2} + \ldots\right].$$

Последняя формула справедлива при любом нецелом μ. Обозначим $\mu\pi = x$, где $x \neq k\pi$ (k — целое число), тогда получим:

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2x}{x^2-(n\pi)^2}. \qquad (1)$$

Эта формула дает разложение функции $\operatorname{ctg} x$ на элементарные дроби. В отличие от разложения рациональной функции (где множество дробей конечно) мы получили бесконечный ряд, членами которого являются простейшие дроби. Рассмотрим произвольный сегмент $-q \leqslant x \leqslant q$, где $q \neq k\pi$, пусть $k\pi < q < (k+1)\pi$. Перепишем формулу (1) в следующем виде:

$$\operatorname{ctg} x - \left(\frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{k}\frac{2x}{x^2-(n\pi)^2}\right) = -\sum_{n=k+1}^{+\infty}\frac{2x}{(n\pi)^2-x^2}. \qquad (2)$$

Предоставляем учащимся проверить, что в каждой из точек $x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots, \pm k\pi$ существует конечный предел левой части, т. е. что

каждая из указанных точек есть точка устранимого разрыва. Ряд в правой части является мажорируемым на сегменте $-q \leqslant x \leqslant q$, так как при $|x| \leqslant q$ члены $\left|\frac{2x}{(n\pi)^2 - x^2}\right|$ не превосходят соответствующих членов сходящегося ряда $\sum_{n=k+1}^{+\infty} \frac{2q}{(n\pi)^2 - q^2}$. Интегрируя от 0 до x, получим в левой части:

$$\int_0^x \left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{k} \frac{2x}{x^2 - n^2\pi^2}\right) dx =$$

$$= \int_0^x \frac{d}{dx} \ln \left| \frac{\sin x}{x\,(x^2 - \pi^2)\,(x^2 - 4\pi^2) \ldots (x^2 - k^2\pi^2)} \right| =$$

$$= \ln \left| \frac{\sin x}{x\,(x^2 - \pi^2) \ldots (x^2 - k^2\pi^2)} \right| + \ln |\,\pi^2 \cdot (4\pi^2) \ldots (k^2\pi^2)\,| \,^* =$$

$$= \ln \left| \frac{\sin x}{x\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right) \ldots \left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)} \right|.$$

Интегрируя почленно правую часть равенства (2), получим (почленно интегрирование возможно в силу равномерной сходимости):

$$\int_0^x \left(-\sum_{n=k+1}^{+\infty} \frac{2x}{(n\pi)^2 - x^2}\right) dx = \sum_{n=k+1}^{+\infty} \ln \left| 1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2} \right|,$$

откуда:

$$\ln \left| \frac{\sin x}{x\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right) \ldots \left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)} \right| = \sum_{n=k+1}^{+\infty} \ln \left| 1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2} \right|$$

и, следовательно:

$$\ln |\sin x| = \ln |x| + \sum_{n=1}^{+\infty} \ln \left| 1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2} \right|.$$

Потенцируя, получим:

$$|\sin x| = |x|\, e^{\sum_{n=1}^{+\infty} \ln \left| 1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2} \right|}.$$

Правую часть можно представить в виде предела:

$$\lim_{N \to +\infty} |x|\, e^{\sum_{n=1}^{N} \ln \left| 1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2} \right|} = \lim \left[|x| \left| 1 - \frac{x^2}{\pi^2} \right| \left| 1 - \frac{x^2}{4\pi^2} \right| \ldots \left| 1 - \frac{x^2}{N^2\pi^2} \right| \right].$$

* Нетрудно видеть, что выражение под знаком логарифма в каждой точке $x = 0$, $x = \pm\pi$, $\pm 2\pi$, ..., $\pm k\pi$ имеет устранимый разрыв и является знакопостоянным, неположительным или неотрицательным на сегменте $[0, x]$, где $|x| \leqslant q$.

Этот предел записывается в виде бесконечного произведения

$$|x|\left|1-\frac{x^2}{\pi^2}\right|\left|1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right|\ldots\left|1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right|\ldots.$$

Нетрудно видеть (по числу отрицательных сомножителей), что если опустить знаки абсолютных величин, то получится произведение, знак которого при всех значениях x совпадает со знаком функции $\sin x$, откуда получается формула, дающая представление функции $\sin x$ в виде бесконечного произведения:

$$\sin x = x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\ldots\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)\ldots$$

при всех значениях x.

§ 74. Равномерная сходимость ряда Фурье

Лемма. *Если a_n и b_n — коэффициенты Фурье кусочно непрерывной функции, то ряд*

$$\frac{a_0}{2}+(a_1+b_1)+\left(\frac{a_2}{2}+\frac{b_2}{2}\right)+\ldots+\left(\frac{a_n}{n}+\frac{b_n}{n}\right)+\ldots$$

абсолютно сходится.

Доказательство. Из тождественного неравенства $\left(|a_n|-\frac{1}{n}\right)^2\geqslant 0$ следует

$$\frac{|a_n|}{n}\leqslant\frac{1}{2}\left(a_n^2+\frac{1}{n^2}\right)\quad\text{и аналогично}\quad\frac{|b_n|}{n}\leqslant\frac{1}{2}\left(b_n^2+\frac{1}{n^2}\right),$$

откуда

$$\frac{|a_n|}{n}+\frac{|b_n|}{n}\leqslant\frac{1}{2}(a_n^2+b_n^2)+\frac{1}{n^2}.$$

Знакоположительный ряд $\sum(a_n^2+b_n^2)$, составленный из квадратов коэффициентов Фурье, сходится, ряд $\sum\frac{1}{n^2}$ также сходится, следовательно, сходится и ряд $\sum\left(\frac{|a_n|}{n}+\frac{|b_n|}{n}\right)$, ч. т. д.

Теорема. *Если периодическая функция $f(x)$ непрерывна и имеет кусочно непрерывную производную, то ее ряд Фурье равномерно сходится к $f(x)$ в интервале $(-\infty, +\infty)$.*

Доказательство. Пусть $\xi_1<\xi_2<\ldots<\xi_k$ — точки разрыва производной $f'(x)$, содержащиеся в интервале $(-\pi, \pi)$; интегрируя по частям и принимая во внимание, что (в силу периодичности) $f(\pi)=f(-\pi)$, получим:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{\xi_1}+\int_{\xi_1}^{\xi_2}+\ldots+\int_{\xi_k}^{\pi}\right]=$$

$$= \frac{1}{n\pi}[f(x)\sin nx]_{-\pi}^{\xi_1} + \frac{1}{n\pi}[f(x)\sin nx]_{\xi_1}^{\xi_2} + \ldots + \frac{1}{n\pi}[f(x)\sin nx]_{\xi_k}^{\pi} -$$

$$- \frac{1}{n\pi}\sum \int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} f'(x)\sin nx\,dx = -\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin nx\,dx.$$

Следовательно, $a_n = -\frac{1}{n}b'_n$ и аналогично $b_n = \frac{a'_n}{n}$, где a'_n и b'_n — коэффициенты Фурье кусочно непрерывной функции $f'(x)$. Ряд Фурье функции $f(x)$ является мажорируемым, так как

$$|a_n\cos nx + b_n\sin nx| \leqslant |a_n| + |b_n| = \frac{|b'_n|}{n} + \frac{|a'_n|}{n}$$

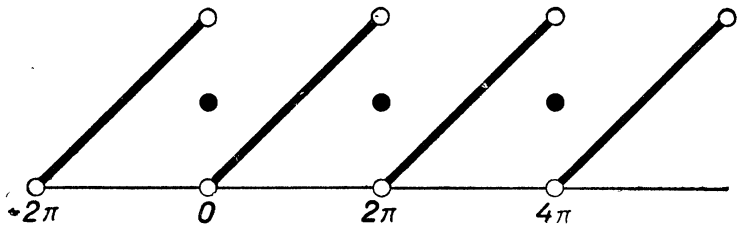
и (согласно лемме) ряд

$$\frac{|a'_0|}{2} + \sum\left(\frac{|a'_n|}{n} + \frac{|b'_n|}{n}\right)$$

сходится.

Следовательно, ряд Фурье функции $f(x)$ сходится равномерно. Так как функция $f(x)$ имеет кусочно непрерывную производную, то ряд Фурье сходится к данной функции, ч. т. д.

Теорема. *Если функция $f(x)$ кусочно непрерывна вместе со своей производной, то ряд Фурье $f(x)$ сходится равномерно на любом сегменте не содержащем точек разрыва $f(x)$.*



Черт. 164.

Доказательство. Разложим в ряд Фурье периодическое продолжение функции $\psi(x) = x$, заданной в интервале $(0, 2\pi)$ (черт. 164):

$$\psi(x) = \pi - 2\left[\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \ldots + \frac{\sin nx}{n} + \ldots\right].$$

Теорема справедлива для функции $\psi(x)$; в самом деле, как показывает признак Дирихле (см. § 55), полученный ряд сходится равномерно на любом сегменте $[2k\pi + \delta,\ 2(k+1)\pi - \delta]$, не содержащем точек разрыва $x = 0$, $(\pm 2\pi,\ \pm 4\pi, \ldots)$.

Пусть $f(x)$ — произвольная кусочно непрерывная вместе со своей производной периодическая функция, имеющая в пределах периода от 0 до 2π точки разрыва $x = \xi_1$, $x = \xi_2, \ldots, x = \xi_k$.

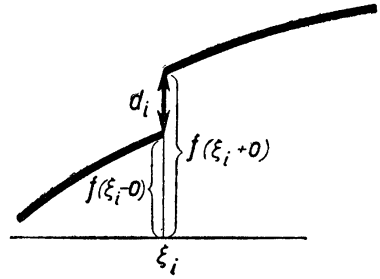
Обозначим через d_i «скачок» $f(x)$ в точке ξ_i:

$$d_i = f(\xi_1 + 0) - f(\xi_i - 0) \quad \text{(черт. 165).}$$

Рассмотрим функцию $\frac{d_i}{2\pi}\psi(x-\xi_i)$. Эта функция имеет в точке ξ_i скачок, равный $-d_i$. Функция

$$f(x) + \frac{d_1}{2\pi}\psi(x-\xi_1) + \frac{d_2}{2\pi}\psi(x-\xi_2) + \ldots + \frac{d_k}{2\pi}\psi(x-\xi_k) = \Phi(x)$$

непрерывна и имеет кусочно непрерывную производную. Следовательно, $\Phi(x)$ разлагается в ряд Фурье, равномерно сходящийся в интервале $(-\infty, +\infty)$.



Черт. 165.

Так как

$$f(x) = \Phi(x) - \sum \frac{d_i}{2\pi}\psi(x-\xi_i),$$

то на любом сегменте, не содержащем точек $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$, ряд Фурье функции $f(x)$ равномерно сходится, так как на всяком таком сегменте равномерно сходятся ряды Фурье каждой из функций $\Phi(x)$, $\psi(x-\xi_1)$, $\psi(x-\xi_2)$, ..., и $\psi(x-\xi_k)$, ч. т. д.

§ 75. Замкнутость тригонометрической системы

Лемма I. *Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$, то при любом заданном $\varepsilon > 0$ существует непрерывная функция $l(x)$, имеющая кусочно непрерывную производную и удовлетворяющая неравенству:*

$$|f(x) - l(x)| < \varepsilon \quad \textit{при всех значениях} \quad x \in [a, b].$$

Иначе лемму формулируют так: *всякая функция, непрерывная на сегменте, может быть с любой заданной точностью ε равномерно аппроксимирована посредством кусочно гладкой функции.*

Доказательство. Предположим, что функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$, рассмотрим произвольное достаточно мелкое разбиение данного сегмента:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b.$$

В силу равномерной непрерывности функции $f(x)$, ячейки $\sigma_i = [x_{i-1}, x_i]$ этого разбиения можно выбрать настолько мелкими, чтобы на каждой из них колебание функции $f(x)$ было меньше, чем ε:

$$M_i - m_i < \varepsilon,$$

где M_i и m_i — наибольшее и наименьшее значения $f(x)$ в ячейке σ_i.

Рассматриваемому разбиению (σ) сегмента $[a, b]$ соответствует ломаная линия, вписанная в дугу графика $y = f(x)$ (черт. 166). Эта

ломаная имеет вершины в точках

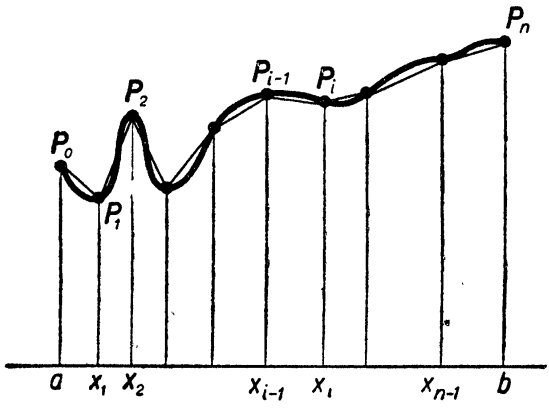
$$P_0(a,\ f(a)),\quad P_1(x_1,\ f(x_1)),\ \ldots,\ P_n(b,\ f(b)).$$

Пусть $l(x)$ есть функция, графиком которой является построенная ломаная линия. На сегменте $[x_{i-1},\ x_i]$ функция $l(x)$ может быть задана формулой:

$$l(x)=f(x_{i-1})+(x-x_{i-1})\frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}}\quad (\text{где } x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i).$$

Нетрудно видеть, что неравенство $|f(x)-l(x)|<\varepsilon$ выполняется в каждой ячейке σ_i. В самом деле, в ячейке σ_i значение $l(x)$ содержится между граничными значениями $f(x_{i-1})$ и $f(x_i)$, а следовательно, и подавно между наибольшим и наименьшим значениями M_i и m_i. Откуда получим:

$$|f(x)-l(x)|\leqslant M_i-m_i<\varepsilon.$$



Черт. 166.

Будучи справедливым в каждой ячейке, это неравенство справедливо на всем сегменте $[a, b]$. Непрерывная функция $l(x)$ имеет кусочно непрерывную производную и удовлетворяет условиям леммы, ч. т. д.

Следствие. *Всякая функция $f(x)$, непрерывная на сегменте $[a, b]$, может быть представлена в виде предельной функции равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций с кусочно непрерывными производными.*

В самом деле, выбрав произвольную убывающую, сходящуюся к нулю последовательность чисел

$$\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \ldots,\ \varepsilon_n\ \ldots,$$

достаточно построить последовательность функций $\{l_n(x)\}$ при условии

$$|f(x)-l_n(x)|<\varepsilon_n \quad \text{на сегменте} \quad [a, b].$$

Лемма II. *Если функция $f(x)$ кусочно непрерывна на сегменте $[a, b]$, то при произвольном заданном $\varepsilon>0$ существует непрерывная функция $\varphi(x)$, отклоняющаяся в среднем от $f(x)$ меньше, чем на ε:*

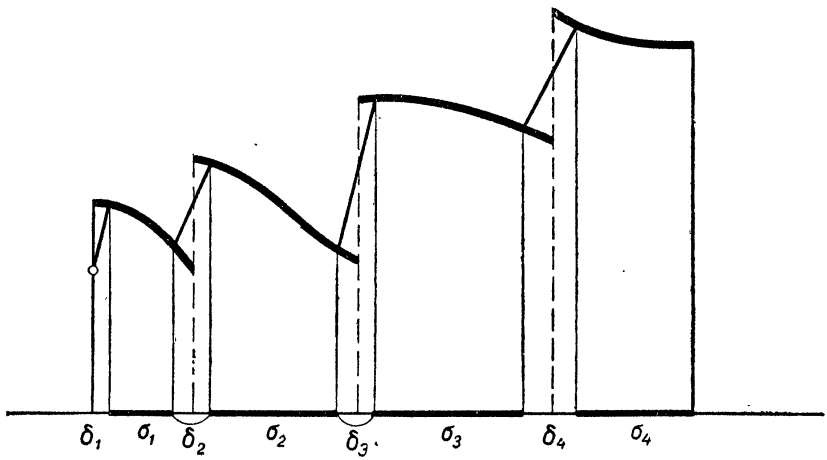
$$\rho(f,\ \varphi)<\varepsilon.$$

Доказательство. Если функция $f(x)$ непрерывна, то утверждение теоремы тривиально: в этом случае можно положить $\varphi=f$, и тогда $\rho(f,\ \varphi)=0<\varepsilon$.

Допустим, что функция $f(x)$ не является непрерывной. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$ — точки ее разрыва, а $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k$ — окрестности этих точек, с общей суммой длин, меньшей δ:

$$\delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_k < \delta.$$

Исключив из сегмента $[a, b]$ интервалы $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k$, получим некоторое конечное множество сегментов $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$, на каждом из которых функция $f(x)$ непрерывна. Рассмотрим непрерывную функцию



Черт. 167.

$\varphi(x)$, определенную следующим законом соответствия: $\varphi(x) = f(x)$ на сегментах $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ и линейна на каждом из интервалов $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k$ (черт. 167). Если $|f(x)| < M$, то имеем также $|\varphi(x)| < M$. Разность $f(x) - \varphi(x)$ равна нулю на сегментах $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ и имеет следующую оценку в интервалах $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k$:

$$|f(x) - \varphi(x)| \leqslant |f(x)| + |\varphi(x)| < 2M.$$

Следовательно:

$$\rho(f, \varphi) = \sqrt{\int_a^b (f-\varphi)^2 dx} = \sqrt{\sum \int_{\delta_i} (f-\varphi)^2 dx} < 2M\sqrt{\sum \delta_i} <$$

$< 2M\sqrt{\delta}$. Выбрав $\delta < \frac{\varepsilon^2}{4M^2}$, получим $\rho(f, \varphi) < \varepsilon$, ч. т. д.

Теорема. *Тригонометрическая система является замкнутой в множестве кусочно непрерывных функций.*

Доказательство. Требуется доказать, что ряд Фурье всякой кусочно непрерывной функции $f(x)$ на сегменте $[-\pi, \pi]$ сходится

в среднем к $f(x)$. Пусть

$$S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n} a_k\cos kx+b_k\sin kx$$

— частная сумма ряда Фурье функции $f(x)$.

1°. Если периодическое продолжение функции $f(x)$ есть непрерывная функция с кусочно непрерывной производной, то ряд Фурье равномерно сходится к $f(x)$:

$$S_n(x)\rightrightarrows f(x),$$

но тогда и $\lim \rho(S_n, f)=0$, т. е. ряд Фурье сходится в среднем к $f(x)$.

2°. Если периодическое продолжение функции $f(x)$ есть непрерывная функция, то в силу леммы I существует непрерывная кусочно гладкая функция $l(x)$, удовлетворяющая неравенству $|f(x)-l(x)|<\varepsilon'$ на сегменте $[-\pi, \pi]$. Следовательно,

$$\rho(f, l)<\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}(f-l)^2\,dx}<\varepsilon'\sqrt{2\pi}.$$

Так как ряд Фурье функции $l(x)$ сходится в среднем к $l(x)$ (предыдущий пункт), то существует такая частная сумма этого ряда:

$$S_n^{(l)}(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(A_k\cos kx+B_k\sin kx), \quad \text{что} \quad \rho\left(l, S_n^{(l)}\right)<\varepsilon''.$$

Как известно, из всех линейных комбинаций вида (при данном n)

$$\alpha_0+(\alpha_1\cos x+\beta_1\sin x)+\ \ldots\ +(\alpha_n\cos nx+\beta_n\sin nx)$$

наименьшее квадратичное отклонение от функции $f(x)$ на сегменте $[-\pi, \pi]$ имеет n-я частная сумма $S_n(x)$ ряда Фурье функции $f(x)$, а потому:

$$\rho(f, S_n)\leqslant\rho\left(f, S_n^{(l)}\right);$$

но

$$\rho\left(f, S_n^{(l)}\right)\leqslant\rho(f, l)+\rho\left(l, S_n^{(l)}\right)<\varepsilon'\sqrt{2\pi}+\varepsilon''.$$

Выбрав $\varepsilon'<\frac{\varepsilon}{2\sqrt{2\pi}}$ и $\varepsilon''<\frac{\varepsilon}{2}$, получим и подавно $\rho(f, S_n)<\varepsilon$.

Итак, невозрастающая неотрицательная последовательность чисел $\rho(f, S_n)$ содержит члены меньшие, чем ε. При произвольном $\varepsilon>0$ это возможно лишь, если $\lim \rho(f, S_n)=0$.

Значит, частные суммы ряда Фурье произвольной непрерывной функции $f(x)$ сходятся в среднем к этой функции.

3°. Пусть $f(x)$ — произвольная кусочно непрерывная на сегменте $[-\pi, \pi]$ функция. В силу леммы II существует непрерывная функция $\varphi(x)$, отклоняющаяся в среднем от функции $f(x)$ меньше, чем на $\frac{\varepsilon}{2}$:

$$\rho(f, \varphi) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Так как ряд Фурье непрерывной функции $\varphi(x)$ сходится в среднем к этой функции, то существует частная сумма $S_n^{(\varphi)}(x)$ ряда Фурье функции $\varphi(x)$, такая, что

$$\rho\left(\varphi, S_n^{(\varphi)}(x)\right) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Откуда на основании неравенств (ср. предыдущий пункт)

$$\rho(f, S_n) \leqslant \rho\left(f, S_n^{(\varphi)}\right) \leqslant \rho(f, \varphi) + \rho\left(\varphi, S_n^{(\varphi)}\right) < \varepsilon$$

заключаем о сходимости в среднем ряда Фурье функции $f(x)$ к этой функции.

Итак, для произвольной кусочно непрерывной периодической функции ряд Фурье сходится в среднем к данной функции, и, следовательно, тригонометрическая система является замкнутой в множестве кусочно непрерывных функций, ч. т. д.

Следствие I. *Для всякой кусочно непрерывной на сегменте* $[-\pi, \pi]$ *функции* $f(x)$ *имеет место равенство Парсеваля:*

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx.$$

В самом деле, выполнение равенства Парсеваля является необходимым и достаточным условием замкнутости ортогональной системы, а по доказанному тригонометрическая система является замкнутой.

Следствие II. Будучи замкнутой, тригонометрическая система является полной и, следовательно, *не существует кусочно непрерывной функции, кроме функции, равной нулю (за исключением конечного множества точек), ортогональной к каждой функции тригонометрической системы.*

Следствие III. *Две кусочно непрерывные на сегменте* $[-\pi, \pi]$ *функции, имеющие один и тот же ряд Фурье, тождественны, за исключением, быть может, конечного множества значений аргумента.*

На основании изложенного может быть легко доказана теорема о равномерной аппроксимации непрерывной функции при помощи многочленов.

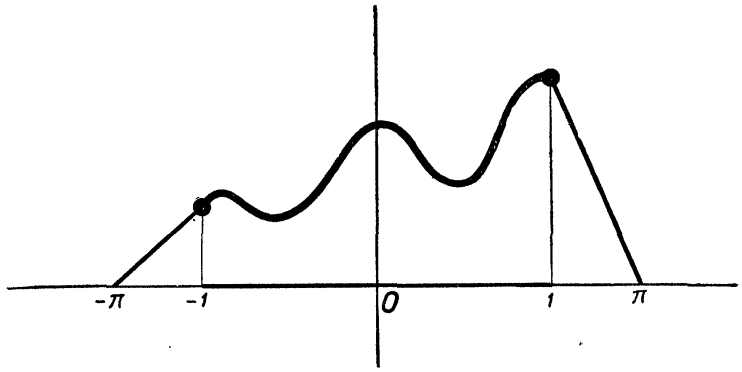
Теорема. *Если функция* $f(x)$ *непрерывна на сегменте* $[a, b]$, *то при любом* $\varepsilon > 0$ *существует многочлен* $P(x)$, *удовлетворяющий неравенству* $|f(x) - P(x)| < \varepsilon$ *при всех значениях* x *на сегменте* $[a, b]$.

Доказательство. Не умаляя общности, предположим, что функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[-1, 1]$. В самом деле, подстановкой

$$x = a + (b - a)\frac{t+1}{2}$$

функция $f(x)$, непрерывная на сегменте $[a, b]$, преобразуется в функцию $\varphi(t)$, непрерывную на сегменте $[-1, 1]$.

Продолжим функцию $f(x)$ на сегмент $[-\pi, \pi]$ произвольным образом, но так, чтобы в результате этого продолжения получилась функция, непрерывная на сегменте $[-\pi, \pi]$, и чтобы ее периодическое продолжение также было



Черт. 168.

непрерывной функцией (черт. 168). В силу доказанного выше существует периодическая непрерывная функция с кусочно непрерывной производной $l(x)$, удовлетворяющая неравенству $|f(x) - l(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ при всех значениях x.

Ряд Фурье функции $l(x)$ равномерно сходится, а поэтому можно указать его частную сумму:

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

удовлетворяющую неравенству $|l(x) - s_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ при всех значениях x.

Наконец, будучи линейной комбинацией синусов и косинусов, функция $s_n(x)$ может быть разложена в ряд Маклорена, равномерно сходящийся в любом конечном промежутке.

Пусть $P(x)$ есть многочлен — частная сумма ряда Маклорена, — удовлетворяющий неравенству:

$$|s_n(x) - P(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

на сегменте $[-1, 1]$. Сопоставляя написанные неравенства, получим:

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon$$

при всех значениях x на сегменте $[-1, 1]$, ч. т. д.

Следствие. *Всякая функция, непрерывная на сегменте, может быть представлена в виде предельной функции равномерно сходящейся последовательности многочленов.*

В самом деле, выбрав произвольную убывающую, сходящуюся к нулю последовательность чисел $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k, \ldots$, достаточно построить последовательность многочленов $\{P_n(x)\}$ при условии $|f(x) - P_n(x)| < \varepsilon_n$ на сегменте $[-1, 1]$.

Теорема о равномерной аппроксимации непрерывной функции многочленами имеет многочисленные применения в анализе, она позволяет во многих случаях свести исследование свойств непрерывной функции к исследованию свойств многочленов. Для примера приведем доказательство интегрируемости произвольной функции, непрерывной на данном сегменте.

1°. Многочлен есть интегрируемая функция, так как он может быть получен из интегрируемых функций $f(x) = \text{const}$ и $\varphi(x) = x$ путем действия сложения и умножения.

2°. Всякая непрерывная функция, будучи предельной функцией равномерно сходящейся последовательности интегрируемых функций (многочленов), интегрируема.

§ 76. Понятие о приложениях рядов Фурье

В физике и в технике тригонометрические ряды играют важную роль в изучении периодических процессов, как, например, колебательное движение, распространение волн, движение механизма паровой машины, сила и напряжение переменного тока и т. п. Простейшее периодическое движение характеризуется гармоническим или синусоидальным колебанием:

$$y = A \sin(\omega t + \alpha),$$

где A — амплитуда, ω — частота колебания, $T = \frac{2\pi}{\omega}$ — период колебания. Движение, характеризующееся уравнением

$$y = a \cos \omega t + b \sin \omega t,$$

есть гармоническое колебание. В самом деле, определим угол α из условий

$$\sin \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \quad \cos \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

тогда получим:

$$y = A \sin(\omega t + \alpha), \quad \text{где} \quad A = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Пусть $y = f(t)$ — уравнение произвольного периодического движения с периодом l. Возможность разложения функции $f(t)$ в ряд Фурье (эта возможность реализуется для большинства встречающихся в приложениях функций):

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos \frac{n\pi t}{l} + b_n \sin \frac{n\pi t}{l},$$

или, что то же,

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi t}{l} + \alpha_n\right),$$

показывает, что произвольное периодическое движение может быть рассматриваемо как результат наложения (совместного действия) бесконечного множества простейших гармонических колебаний с периодами, равными

$$l, \frac{l}{2}, \frac{l}{3}, \ldots, \frac{l}{n}, \ldots .$$

Гармоническое колебание, характеризующееся членом $A_n \sin\left(\frac{n\pi t}{l} + a_n\right)$, называется n-й гармоникой функции $f(t)$.

Для приближенного представления функции $f(t)$ может служить частная сумма

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} A_k \sin\left(\frac{k\pi t}{l} + \alpha_k\right)$$

ряда Фурье.

На чертеже 169 изображены: 1) нечетное продолжение функции, заданной на сегменте $[0, \pi]$ уравнениями:

$$f(x) = \begin{cases} x & \left(\text{если } 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\right), \\ \pi - x & \left(\text{если } \frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi\right), \end{cases}$$

и ее первая гармоника; 2) функция $f(x)$, третья гармоника и сумма первой и третьей гармоник; 3) функция $f(x)$, пятая гармоника и сумма первой, третьей и пятой гармоник; это суть последовательные три частные суммы ряда Фурье:

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left(\sin x - \frac{\sin 3x}{9} + \frac{\sin 5x}{25} - \ldots\right)$$

(четные гармоники отсутствуют).

Для нахождения некоторого числа первых гармоник для случая, когда функция $f(x)$ задается графически (например, в результате экспериментальных исследований), сконструированы механические приборы — гармонические анализаторы, указывающие автоматически значения первых коэффициентов Фурье функции $f(x)$ по заданному ее графику.

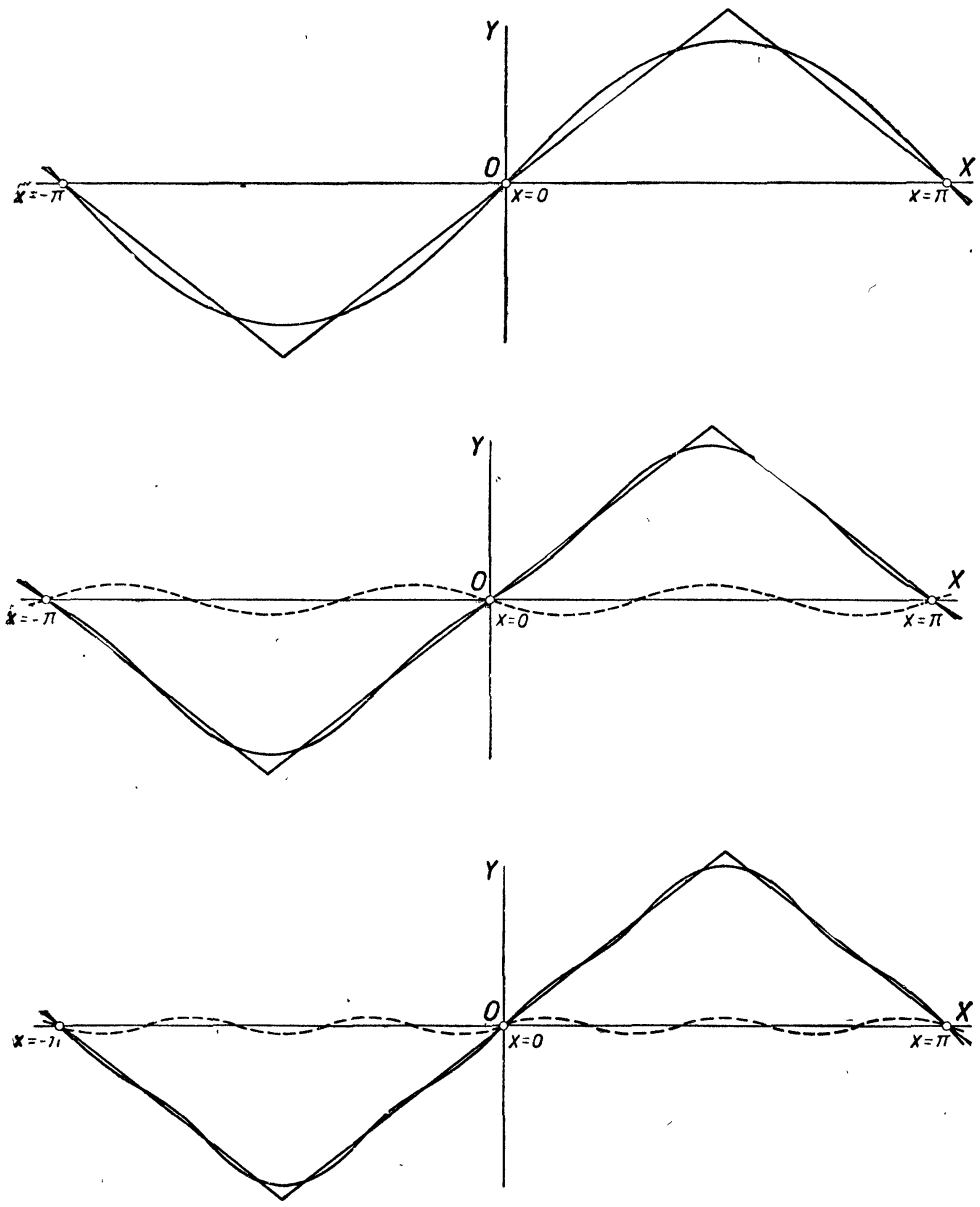
Ортогональные системы (не только тригонометрические) имеют многочисленные применения в различных вопросах математической физики.

Укажем одну из простейших задач, с которой приходится встречаться в механике и физике. Математически эта задача формулируется так: требуется найти решения дифференциального уравнения

$$y'' + \lambda \rho(x)\, y = 0,$$

где λ — параметр, а $\rho(x)$ — непрерывная положительная функция, удовлетворяющие следующим граничным условиям:

$$y(a) = y(b) = 0.$$



Черт. 169.

Пусть λ_m и λ_n — два значения параметра, при которых существуют искомые функции $y_m(x)$ и $y_n(x)$. Докажем, что функции $\sqrt{\rho(x)}\,y_m(x)$ и $\sqrt{\rho(x)}\,y_n(x)$ ортогональны на сегменте $[a, b]$. Как нетрудно убедиться,

$$y_n'' y_m - y_m'' y_n = \frac{d}{dx}\left[y_n' y_m - y_m' y_n\right].$$

В силу дифференциального уравнения имеем:

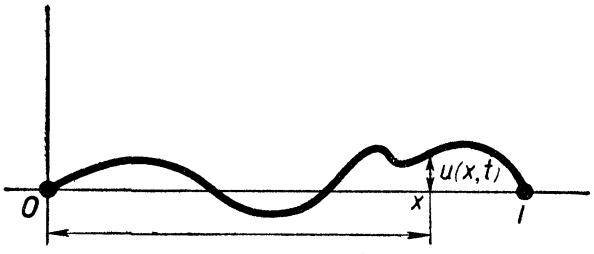
$$y_n'' = -\lambda_n \rho(x)\, y_n,$$
$$y_m'' = -\lambda_m \rho(x)\, y_m.$$

Умножив первое равенство на y_m, второе на y_n, вычтем второе из первого и проинтегрируем на сегменте $[a, b]$; тогда получим:

$$(\lambda_m - \lambda_n)\int_a^b \rho(x)\, y_m(x)\, y_n(x)\, dx = [y_n'(x)\, y_m(x) - y_m'(x)\, y_n(x)]_a^b = 0.$$

Следовательно, при $\lambda_m \neq \lambda_n$ имеем $\int_a^b \rho y_m y_n = 0$, т. е. функции $\sqrt{\rho}\, y_m$ и $\sqrt{\rho}\, y_n$ ортогональны на сегменте $[a, b]$.

Рассмотрим классическую задачу о свободном колебании струны, закрепленной в двух концах (0, 0) и $(0, l)$. Обозначим через $u(x, t)$ отклонение в момент времени t точки струны с абсциссой x (черт. 170).



Черт. 170.

Как устанавливается в математической физике, при малых колебаниях функция $u(x, t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad (1)$$

где a — константа (при данных струне и ее натяжении).

Пусть в начальный момент времени $t = 0$ струна выведена из состояния покоя и ей придана форма линии:

$$u = \varphi(x),$$

тогда под действием силы натяжения струна будет совершать колебания.

Для простоты будем считать, что точкам струны в момент времени $t = 0$ не сообщается никакой начальной скорости. Математически задача сводится к нахождению функции $u(x, t)$, удовлетворяющей уравнению (1) и начальным условиям:

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad \text{и} \quad u_t'(x, 0) = 0,$$

выражающим, что при $t = 0$ струна имеет заданную форму и что начальная скорость точек струны равна нулю, и граничным условиям:

$$u(0, t) = u(l, t) = 0,$$

выражающим, что концы струны находятся в состоянии покоя.

Будем искать частное решение данного дифференциального уравнения в виде произведения двух функций $X(x)$ и $T(t)$ от аргументов x и t. Предлагаем читателю непосредственной подстановкой убедиться, что при произвольном C_k функция

$$u_k(x, t) = C_k \cos a \frac{k\pi}{l} t \sin \frac{k\pi}{l} x$$

удовлетворяет уравнению (1), граничным условиям $u_k(0, t) = u_k(l, t) = 0$ и второму начальному условию $\left[\frac{\partial u_k}{\partial t}\right]_{t=0} = 0$. Чтобы удовлетворить первому начальному условию, положим $k = 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ и составим из соответствующих частных решений бесконечный ряд:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x, t) = \sum C_k \cos \frac{ak\pi}{l} t \sin \frac{k\pi}{l} x.$$

Как нетрудно убедиться, этот ряд (во всяком случае формально) удовлетворяет уравнению (1). Для определения коэффициентов C_k положим $t = 0$; тогда получим:

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} C_k \frac{\sin k\pi}{l} x.$$

Следовательно, C_k суть коэффициенты Фурье в разложении функции $\varphi(x)$ в тригонометрический ряд по синусам:

$$C_k = \frac{2}{l} \int_0^l \sin \frac{k\pi x}{l} \varphi(x)\, dx.$$

В настоящем элементарном изложении мы лишь стремились дать понятие о задачах математической физики, в которых применяются ряды Фурье, и не касались исследования условий, при которых законны все выполненные операции.

ГЛАВА VIII

ЧИСЛЕННЫЕ И ГРАФИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА

§ 77. Точечное интерполирование. Формула Лагранжа

В основе теории интерполяции лежат следующие теоремы алгебры.

Теорема I. *Если значения двух многочленов* $P_n(x)$ и $Q_n(x)$ *степени не выше* n *при* $n+1$ *различных значениях аргумента* $x_0, x_1, \ldots, x_n$ равны:

$$P_n(x_0)=Q_n(x_0),\quad P_n(x_1)=Q_n(x_1),\quad \ldots,\quad P_n(x_n)=Q_n(x_n),$$

то многочлены $P_n(x)$ *и* $Q_n(x)$ *тождественны*:

$$P_n(x)\equiv Q_n(x).$$

Доказательство. В самом деле, разность $P_n(x)-Q_n(x)$ есть многочлен степени не выше n, имеющий по меньшей мере $n+1$ корней $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Следовательно, эта разность есть нуль-многочлен, т. е.

$$P_n(x)-Q_n(x)\equiv 0,\quad \text{откуда}\quad P_n(x)\equiv Q_n(x),\qquad \text{ч. т. д.}$$

Теорема II. *Существует единственный многочлен* $P_n(x)$ *степени не выше* n, *значения которого в* $n+1$ *данных различных точках* $x_0, x_1, \ldots, x_n$ *соответственно равны данным числам* $y_0, y_1, \ldots, y_n$:

$$P_n(x_0)=y_0,\quad P_n(x_1)=y_1,\quad \ldots,\quad P_n(x_n)=y_n.$$

Доказательство. Рассмотрим многочлен степени n:

$$p_i(x)=a(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n),$$

где a — числовой коэффициент.

Определив число a из условия $p_i(x_i)=y_i$, получим многочлен:

$$p_i(x)=y_i\frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)},$$

обращающийся в нуль в точках $x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$ и имеющий в точке x_i значение, равное y_i (в чем можно убедиться и непосред-

ственно). Сумма $\sum_{i=1}^{n} p_i(x)$ есть единственный (в силу теоремы I) многочлен степени не выше n, имеющий в данных точках $x_0, x_1, \ldots, x_n$ данные значения $y_0, y_1, \ldots, y_n$ (соответственно). Следовательно:

$$P_n(x) = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_n)} + \\ + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_n)} + \ldots + \\ + y_n \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\ldots(x_n-x_{n-1})}, \qquad \text{ч. т. д.}$$

Многочлен $P_n(x)$ называется интерполяционным полиномом, построенным для данных точек (x_i, y_i), где $i = 0, 1, \ldots, n$.

Геометрическая интерпретация. Существует единственная парабола $y = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ порядка не выше n, проходящая через $n+1$ данных точек плоскости $M_0(x_0, y_0)$, $M_1(x_1, y_1)$, $\ldots$, $M_n(x_n, y_n)$.

Пример.

Построить интерполяционный полином $P_3(x)$ по следующим данным значениям:

x	-1	0	1	2
y	-1	1	3	11

Полагая $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$ и соответственно $y_0 = -1$, $y_1 = 1$, $y_2 = 3$, $y_3 = 11$, получим:

$$P_3(x) = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} + \\ + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + y_3 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \\ = -\frac{x(x-1)(x-2)}{(-1)(-2)(-3)} + \frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{1\cdot(-1)(-2)} + 3\frac{(x+1)x(x-2)}{2\cdot 1\cdot(-1)} + \\ + 11\frac{(x+1)x(x-1)}{3\cdot 2\cdot 1} = x^3 + x + 1.$$

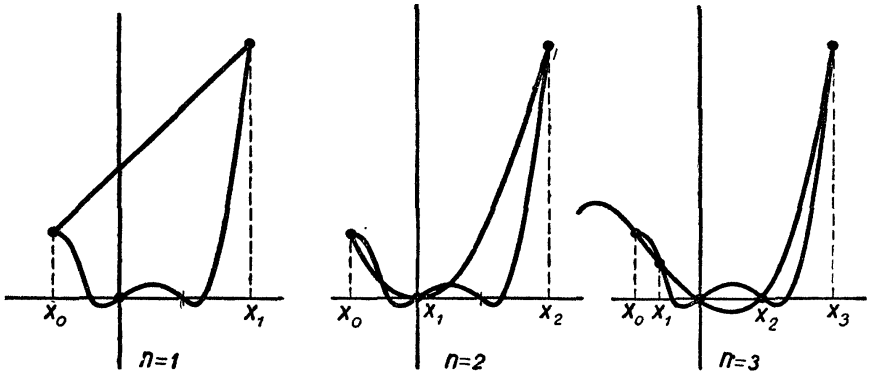
Пусть даны функция $f(x)$, непрерывная в некотором промежутке, и $n+1$ точек $x_0, x_1, \ldots, x_n$ в этом промежутке. Интерполяционный полином, построенный для $n+1$ точек $M_i(x_i, y_i)$, где $y_i = f(x_i)$ и $i = 0, 1, \ldots, n$, есть многочлен степени не выше n, совпадающий с данной функцией $f(x)$ в $n+1$ точках $x = x_0, x_1, \ldots, x_n$. Следовательно, линия $y = f(x)$ и парабола n-го порядка $y = P_n(x)$ имеют по меньшей мере $n+1$ общих точек.

На чертеже 171 изображены график некоторой функции и графики интерполяционных полиномов при $n = 1, 2, 3$.

Нахождение интерполяционного полинома для функции $f(x)$, совпадающего с $f(x)$ в $n+1$ данных точках $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$,

называется интерполированием этой функции при данных узлах $x_i (i = 0, 1, 2, \ldots, n)$.

Во многих случаях, когда непосредственное вычисление значения функции $f(x)$ затруднительно, оказывается возможным, в пределах допустимой погрешности, заменить (в некотором промежутке) данную функцию ее интерполяционным полиномом и в качестве приближенных значений брать значения этого полинома в точках, промежуточных между узлами. Простейший пример интерполяции известен из правил пользования логарифмическими таблицами. Именно, при вычислении логарифмов для промежуточных значений аргумента (не указанных



Черт. 171.

в таблице) к табличному значению функции прибавляется поправка, для нахождения которой приближенно считают малое приращение функции пропорциональным приращению аргумента (линейная интерполяция). Фактически это означает замену в малом промежутке логарифмической функции линейной функцией ($n = 1$), совпадающей с ней в концах промежутка.

Интерполяцией пользуются также для построения формулы, приближенно изображающей функцию (в некотором промежутке), для которой известно конечное множество значений. Допустим, например, что значение некоторой физической величины y определяется значением другой величины x. Допустим далее, что при помощи измерения найдены значения величины y при значениях $x = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$. Полученные данные не дают основания ставить вопрос о нахождении функции $y = f(x)$, в точности изображающей исследуемый закон соответствия, так как

во-первых, существует бесконечное множество непрерывных функций, имеющих данные значения $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$ в соответственных точках $x_0, x_1, \ldots, x_n$;

во-вторых, сами значения y_i, полученные при помощи измерения, являются приближенными, так как всякое измерение практически выполняется лишь с некоторой степенью точности.

Во многих случаях интерполяционный полином, построенный для полученных точек $M_i(x_i, y_1)$, дает практически достаточно удовлетворительное приближенное представление исследуемой функции.

Формула

$$P_n(x) = f(x_0)\frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_n)} + \\ + f(x_1)\frac{(x-x_0)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_n)} + \\ + \dots + f(x_n)\frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\dots(x_n-x_{n-1})},$$

дающая выражение интерполяционного полинома для функции $f(x)$ при данных узлах x_i, называется интерполяционной формулой Лагранжа.

Использование интерполяционного полинома для представления (приближенного) данной функции вне интервала (x_0, x_n) нередко называется экстраполяцией. Следует заметить, что (при экстраполяции) для значений аргумента, достаточно удаленных от концов сегмента $[x_0, x_n]$, интерполяционный полином может значительно отличаться от данной функции и не быть пригодным для ее приближенного представления. Так, например, функция $\sin x$ ограничена, тогда как любой полином в интервале $(-\infty, +\infty)$ является неограниченной функцией. Поэтому никакой интерполяционный полином не может быть использован для вычисления значений синуса во всем интервале $(-\infty, +\infty)$, а может служить этой цели лишь в некотором конечном промежутке.

Пример.

В таблице даны соответственные значения x и $\lg x$:

x	321,0	322,8	324,2	325,0
$y = \lg x$	2,50651	2,50893	2,51081	2,51188

Требуется вычислить $\lg 323{,}5$. Положив в формуле Лагранжа $n = 3$, $x_0 = 321{,}0$, $x_1 = 322{,}8, \dots$, $y_0 = 2{,}50651$ и т. д. и $x = 323{,}5$, получим:

$$\lg 323{,}5 = \frac{(323{,}5-322{,}8)(323{,}5-324{,}2)(323{,}5-325{,}0)}{(321-322{,}8)(321-324{,}2)(321-325)}\cdot 2{,}50651 + \\ + \frac{(323{,}5-321)(323{,}5-324{,}2)(323{,}5-325)}{(322{,}8-321)(322{,}8-324{,}2)(322{,}8-325)}\cdot 2{,}50893 + \\ + \frac{(323{,}5-321)(323{,}5-322{,}8)(323{,}5-325)}{(324{,}2-321)(324{,}2-322{,}8)(324{,}2-325)}\cdot 2{,}51081 + \\ + \frac{(323{,}5-321)(323{,}5-322{,}8)(323{,}5-324{,}2)}{(325-321)(325-322{,}8)(325-324{,}2)}\cdot 2{,}51188 = \\ = -0{,}07996 + 1{,}18794 + 1{,}83897 - 0{,}43708 = 2{,}50987,$$

§ 78. Разности различных порядков и факториальные полиномы

Пусть $f(x)$ — данная функция, а $h=\Delta x$ — данное число, которое будем рассматривать как приращение аргумента.

Определение. *Функция*

$$\Delta f(x)=f(x+h)-f(x)$$

называется разностью первого порядка функции $f(x)$.

Разность от разности первого порядка

$$\Delta^2 f(x)=\Delta(\Delta f(x))$$

называется разностью второго порядка и т. д., разность от разности n — 1-*го порядка называется разностью* n-*го порядка функции* $f(x)$:

$$\Delta^n f(x)=\Delta(\Delta^{n-1}f(x)).$$

Нетрудно составить общую формулу, выражающую разность n-го порядка через значения функции $f(x)$ в точках x, $x+h$, $x+2h$, ..., $x+nh$. В самом деле, при помощи непосредственного подсчета получим:

$$\Delta^2 f(x)=\Delta(\Delta f(x))=\Delta(f(x+h)-f(x))=[f(x+2h)-f(x+h)]-$$
$$-[f(x+h)-f(x)]=f(x+2h)-2f(x+h)+f(x),$$

и аналогично:

$$\Delta^3 f(x)=f(x+3h)-3f(x+2h)+3f(x+h)-f(x).$$

Методом полной индукции устанавливается общая формула:

$$\Delta^n f(x)=f(x+nh)-nf(x+(n-1)h)+\ldots+$$
$$+(-1)^k C_n^k f(x+(n-k)h)+\ldots+(-1)^n f(x).$$

Введем следующие обозначения:

$$f(x)=y_0,\ f(x+h)=y_1,\ \ldots,\ f(x+kh)=y_k,\ \ldots,\ f(x+nh)=y_n;$$
$$\Delta y_k=y_{k+1}-y_k \quad \text{или} \quad y_{k+1}=y_k+\Delta y_k;$$
$$\Delta^2 y_k=\Delta y_{k+1}-\Delta y_k \quad \text{или} \quad \Delta y_{k+1}=\Delta y_k+\Delta^2 y_k;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\Delta^n y_k=\Delta^{n-1}y_{k+1}-\Delta^{n-1}y_k \quad \text{или} \quad \Delta^{n-1}y_{k+1}=\Delta^{n-1}y_k+\Delta^n y_k.$$

Общая формула для $\Delta^n f(x)=\Delta^n y_0$ запишется так:

$$\Delta^n y_0=y_n-ny_{n-1}+\ldots+(-1)^k C_n^k y_{n-k}+\ldots+(-1)^n y_0.$$

Обычно значения разностей записывают в виде следующей таблицы:

y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	. . . . .
y_0	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$	.
y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_1$	.
y_2	Δy_2	$\Delta^2 y_2$	$\Delta^3 y_2$	.
y_3	Δy_3	$\Delta^2 y_3$		
y_4	Δy_4			
y_5				

В этой таблице последней выписана разность $\Delta^3 y_2$. Нетрудно видеть (в силу определения разностей), что если известна следующая разность $\Delta^3 y_3$, то для вычисления значения y_6 достаточно выполнить ряд последовательных сложений:

$$\Delta^2 y_4 = \Delta^2 y_3 + \Delta^3 y_3, \qquad \Delta y_5 = \Delta y_4 + \Delta^2 y_4, \qquad y_6 = y_5 + \Delta y_5.$$

Разности обладают следующим свойством дистрибутивности (доказательство предоставляем читателю):

$$\Delta [C_1 f(x) + C_2 \varphi(x)] = C_1 \Delta f(x) + C_2 \Delta \varphi(x);$$

. . . . . .

$$\Delta^n [C_1 f(x) + C_2 \varphi(x)] = C_1 \Delta^n f(x) + C_2 \Delta^n \varphi(x).$$

Теорема. *Разность первого порядка (при данном приращении аргумента h) многочлена степени n есть многочлен степени $n-1$.*

Доказательство. Достаточно доказать, что разность 1-го порядка степенной функции Δx^k (где k — натуральное число) есть многочлен степени $k-1$. В самом деле:

$$\Delta x^k = (x+h)^k - x^k = khx^{k-1} + \frac{k(k-1)}{1 \cdot 2} h^2 x^{k-2} + \ldots + h^k.$$

Следовательно (при данном h), разность Δx^k есть многочлен степени $k-1$. Теорема справедлива для произвольного многочлена $P_n(x)$ степени n, так как $P_n(x)$ есть линейная комбинация степенных функций, ч. т. д.

Следствие. *Разность k-го порядка многочлена $P_n(x)$ степени n есть многочлен степени $n-k$:*

$$\Delta^k P_n(x) = P_{n-k}(x).$$

В частности, разность n-го порядка от многочлена степени n есть число, отличное от нуля, а все последующие разности равны нулю. Именно, если

$$P_n(x) = a_0 x^n + \ldots + a_n,$$

то

$$\Delta^n P_n(x) = a_0 n!\, h^n = \text{const}, \text{ а } \Delta^{n+k} P_n(x) = 0.$$

Пример.

Рассмотрим многочлен $y = x^3$. Положим $h = 1$ и $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$. Составим соответствующую таблицу разностей (в таблице цифры выделены жирным шрифтом).

y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	
−1	**1**	**0**	**6**	
0	**1**	**6**	6	
1	**7**	12	6	
8	19	18		
27	37			
64				

Так как $\Delta^3 y = 6 = \text{const}$, то таблицу нетрудно продолжить (цифры напечатаны обычным шрифтом), что дает способ последовательного вычисления кубов натуральных чисел посредством сложения.

Пусть $x_0 = a$ — данная начальная точка, а h — данное число — приращение аргумента.

Определение. *Факториальными полиномами (при данных a и h) называются многочлены*

$$\Phi_0(x) = 1, \quad \Phi_1(x) = x - a, \quad \Phi_2(x) = (x-a)(x-a-h),$$
$$\Phi_3(x) = (x-a)(x-a-h)(x-a-2h), \ldots,$$
$$\Phi_n(x) = (x-a)(x-a-h)\ldots[x-a-(n-1)h].$$

Разности факториальных полиномов имеют простой вид, внешне напоминающий формулы последовательного дифференцирования степенной функции. Имеем:

$$\begin{aligned}\Delta\Phi_n(x) &= \Phi_n(x+h) - \Phi_n(x) = \\ &= (x-a+h)(x-a)\ldots[x-a-(n-2)h] - \\ &- (x-a)(x-a-h)\ldots[x-a-(n-1)h] = \\ &= nh(x-a)(x-a-h)\ldots[x-a-(n-2)h],\end{aligned}$$

или, что то же,

$$\Delta\Phi_n(x) = hn\Phi_{n-1}(x).$$

Последовательно применяя эту формулу, получим:

$$\Delta^k\Phi_n(x) = h^k n(n-1)\ldots(n-k+1)\Phi_{n-k}(x).$$

Пусть $P_n(x)$ — данный многочлен степени n. Если известны значения $P_n(x)$ в узлах

$$x_0 = a,\ x_1 = a + h,\ x_2 = a + 2h,\ \ldots,\ x_n = a + nh,$$

то при помощи формул

$$\Delta y_0 = \Delta P_n(a) = P_n(a + h) - P_n(a),$$
$$\Delta^2 y_0 = \Delta^2 P_n(a) = P_n(a + 2h) - 2P_n(a + h) + P_n(a) \text{ и т. д.}$$

могут быть вычислены значения разностей

$$\Delta P_n(a),\ \Delta^2 P_n(a),\ \ldots,\ \Delta^n P_n(a) \qquad (\Delta)$$

в точке a. Обратно, по значениям $P_n(a)$ и n первых разностей (Δ) в точке a многочлена $P_n(x)$ можно найти значения многочлена в узлах:

$$y_1 = P_n(x_1),\ y_2 = P_n(x_2),\ \ldots,\ y_n = P_n(x_n).$$

Для этого достаточно применить процесс последовательного сложения, приняв во внимание, что $\Delta^n P_n(x) = \Delta^n P_n(a) = \text{const}$:

$$\Delta^{n-1} P_n(x_1) = \Delta^{n-1} P_n(a) + \Delta^n P_n(a),\ \ldots,\ P_n(x_1) = P_n(a) + \Delta P_n(a),$$
$$\Delta^{n-1} P_n(x_2) = \Delta^{n-1} P_n(x_1) + \Delta^n P_n(a) \text{ и т. д.}$$

Следствие. *Существует единственный многочлен $P_n(x)$ степени не выше n, для которого n первых разностей в точке a и $P(a)$ имеют данные значения.*

В самом деле, заданием чисел (Δ) и $P(a)$ определяются значения $y_i = P_n(x_i)$ в $n + 1$ точках (узлах), а этими значениями определяется единственный многочлен $P_n(x)$.

Теорема. *Всякий многочлен $P_n(x)$ степени n может быть разложен по факториальным полиномам:*

$$P_n(x) = P_n(a) + \frac{x - a}{1!\,h}\Delta P(a) + \frac{(x - a)(x - a - h)}{2!\,h^2}\Delta^2 P(a) +$$
$$+ \ldots + \frac{(x - a)(x - a - h)\ldots(x - a - nh + h)}{n!\,h^n}\Delta^n P(a).$$

Кратко эта формула может быть записана так:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!h^k}\Phi_k(x)\Delta^k P(a).$$

Доказательство. Докажем, что всякий многочлен $P_n(x)$ может быть разложен по факториальным полиномам. Для доказательства применим процесс последовательного деления $P_n(x)$ на двучлены $x - a$, $x - a - h$, $\ldots$, $x - a - (n - 1)h$. Имеем

$$P_n(x) = \alpha_0 + P_{n-1}(x)(x - a),$$
$$P_{n-1}(x) = \alpha_1 + P_{n-2}(x)(x - a - h),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$P_1(x) = \alpha_{n-1} + P_0(x)[x - a - (n - 1)h],$$

где $P_0(x)=\alpha_n=\text{const}$. Из этих равенств следует возможность разложения $P_n(x)$ по факториальным полиномам:

$$P_n(x)=\alpha_0+\alpha_1\Phi_1(x)+\alpha_2\Phi_2(x)+\ \ldots\ +\alpha_n\Phi_n(x).$$

Для нахождения коэффициентов α_0, α_1, α_2, ..., α_n составим последовательные разности:

$$\Delta P_n(x)=\alpha_1 h+\alpha_2 2h\Phi_2(x)+\ \ldots\ +\alpha_n nh\Phi_{n-1}(x),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\Delta^n P_n(x)=\alpha_n n!\,h^n.$$

Положив в этих равенствах $x=a$, получим:

$$\alpha_0=P_n(a),\ \alpha_1=\frac{1}{h\cdot 1!}\Delta P_n(a),\ \ldots,\ \alpha_k=\frac{1}{h^k k!}\Delta^k P_n(a),\ \ldots,$$
$$\alpha_n=\frac{1}{h^n n!}\Delta^n P_n(a).$$

x	P	ΔP	$\Delta^2 P$	$\Delta^3 P$	
0	1	10	48	48	
2	11	58	96		
4	69	154			
6	223				

Выполнив подстановку найденных значений, получим доказываемое равенство, ч. т. д.

Пример.

Разложить многочлен x^3+x+1 по факториальным полиномам при $a=0$ и $h=2$. Составляем таблицу разностей.

По формуле имеем:

$$x^3+x+1=1+\frac{x}{2}\cdot 10+\frac{x(x-2)}{2!4}\cdot 48+\frac{x(x-2)(x-4)}{3!8}\cdot 48=$$
$$=1+5x+6x(x-2)+x(x-2)(x-4).$$

§ 79. Интерполяционная формула Ньютона

Предположим, что известны значения функции $f(x)$ в равноотстоящих узлах:

$$a=x_0,\ x_1=a_0+h,\ \ldots,\ x_n=a+nh,\ \ldots.$$

Так, например, в математических таблицах обычно приводятся численные значения функции через равные промежутки значений аргумента. Взяв $n+1$ узлов и соответственные значения функции $f(x)$ в этих узлах, можно составить значения n первых разностей функции $f(x)$ в точке a:

$$\Delta f(a),\ \Delta^2 f(a),\ \ldots,\ \Delta^n f(a).$$

Интерполяционный полином $P_n(x)$, составленный для рассматриваемых узлов, имеет те же значения n первых разностей в начальной точке:

$$\Delta f(a)=\Delta P_n(a),\ \Delta^2 f(a)=\Delta^2 P_n(a),\ \ldots,\ \Delta^n f(a)=\Delta^n P_n(a).$$

Зная значения разностей интерполяционного полинома, можно представить этот полином в следующем виде:

$$P_n(x) = f(a) + \frac{(x-a)}{1!h}\Delta f(a) + \ldots +$$
$$+ \frac{(x-a)(x-a-h)\ldots[x-a-(n-1)h]}{n!h^n}\Delta^n f(a).$$

Полученная формула называется интерполяционной формулой Ньютона.

Примечание. При заданных функции $f(x)$ и узлах формулы Лагранжа и Ньютона дают лишь различные представления одного и того же интерполяционного полинома.

При табличном задании функции интерполяционными формулами обычно пользуются для приближенного вычисления значения функции при промежуточных значениях аргумента (не указанных в таблицах).

Простейшим случаем интерполяции является линейная интерполяция. Положив в формуле Ньютона $n = 1$, получим приближенное равенство:

$$f(x) \approx f(a) + \frac{x-a}{h}\Delta f(a) \text{ или } y \approx y_0 + (x-a)\frac{y_1 - y_0}{h}.$$

При пользовании таблицами к табличному значению y_0 прибавляется линейная поправка, вычисляемая при помощи правила «пропорциональных частей» (partes proportionales).

При $n = 2$ получается следующая формула (приближенная) квадратической интерполяции:

$$f(x) \approx f(a) + \frac{x-a}{h}\Delta f(a) + \frac{(x-a)(x-a-h)}{2h^2}\Delta^2 f(a).$$

Для приближенного вычисления значения функции в точке x, где $a_0 = x_0 < x < x_1$, к начальному значению $f(a)$ прибавляются последовательно линейная поправка, а затем квадратическая поправка. Для вычисления квадратической поправки (например, при пользовании таблицами) берутся два значения функции y_1 и y_2, непосредственно следующие за начальным значением y_0.

При составлении приближенных формул для эмпирических функций можно пользоваться следующим указанием: если в таблице значений функции и последовательных разностей окажется, что разности некоторого порядка k суть числа, сравнительно мало отличающиеся друг от друга, то для приближенного представления данной функции естественно пользоваться интерполяционным полиномом k-го порядка.

В практике иногда бывает удобно вычислить отдельно отношение $\frac{x-a}{h}=t$. В этом обозначении формулы линейной и квадратической интерполяции примут соответственно вид:

$$f(x)\approx f(a)+t\,\Delta f(a)$$

и

$$f(x)\approx f(a)+t\,\Delta f(a)+\frac{t(t-1)}{2}\,\Delta^2 f(a).$$

Примеры.

1. Известны десятичные логарифмы чисел $\lg 10=1$, $\lg 11=0{,}04139$ и $\lg 12=1{,}07918$; найти при помощи интерполяции (линейной и квадратической) $\lg 10{,}5$. Составляем таблицу разностей (в таблице обычно пишут лишь значащие цифры).

x	y	Δy	$\Delta^2 y$
10	1,00000	4139	—360
11	1,04139	3779	
12	1.07918		

Полагаем $x_0=10$, $t=\frac{0{,}5}{1}=0{,}5$.

Линейная интерполяция дает:

$$\lg 10{,}5=1+0{,}5\cdot 0{,}04139=1{,}02069.$$

Вычисляем квадратическую поправку:

$$\frac{t(t-1)}{2}\,\Delta^2 y_0=\frac{0{,}5\cdot(-0{,}5)}{2}(-0{,}00360)=0{,}00045.$$

Квадратическая интерполяция дает:

$$\lg 10{,}5=1{,}02069+0{,}00045=0{,}02114.$$

Сопоставление с таблицами показывает, что верны первые четыре десятичных знака (по таблицам Пржевальского $\lg 10{,}5=1{,}02119$).

2. Нижеследующая таблица содержит результаты измерения сопротивления поездов y (в *кг/м*) в зависимости от скорости x (в *км/час*). Продолжим таблицу, вычислив разности Δy и $\Delta^2 y$.

x	y	Δy	$\Delta^2 y$
20	2,75	1,80	1,10
40	4,55	2,90	1,05
60	7,45	3,95	1,30
80	11,40	5,25	1,10
100	16,65	6,35	
120	23,00		

Так как вторые разности мало отличаются друг от друга, то можно считать, что y выражается через x (приближенно) при помощи многочлена второй степени.

Предположим, что требуется вычислить силу сопротивления поезда для скоростей 102, 104, ..., ..., 118 *км*. Положим

$x_0=100$, $y_0=16{,}65$, $\Delta y_0=6{,}35$, $\Delta^2 y_0=1{,}10$ и $h=20$.

Вычислим искомые значения силы сопротивления по формуле квадратической интерполяции, полагая последовательно

$$t=\frac{2}{20}=0{,}1,\ 0{,}2,\ 0{,}3,\ \ldots,\ 0{,}9.$$

При $t=0{,}1$ линейная поправка равна $0{,}1\cdot 6{,}35=0{,}635$; квадратическая поправка равна

$$\frac{0{,}1\,(-0{,}9)}{2}\cdot 1{,}10=-0{,}049,$$

откуда находим значение сопротивления при скорости 102 *км*:

$$y=16{,}65+0{,}635-0{,}049=17{,}236.$$

Продолжив вычисления, получим окончательно следующую таблицу (сохраняем два знака):

x	y
102	17,24
104	17,83
106	18,44
108	19,06
110	19,69
112	20,33
114	20,98
116	21,64
118	22,32

§ 80. Остаточный член интерполяции

Разность между функцией $f(x)$ и ее интерполяционным полиномом $P_n(x)$ называется остаточным членом интерполяции

$$R(x)=f(x)-P_n(x).$$

Выведем формулу для остаточного члена в предположении, что функция $f(x)$ в рассматриваемом промежутке имеет производную $n+1$-го порядка. В силу построения полинома $P_n(x)$ остаточный член обращается в нуль в интерполяционных узлах $x=x_0, x_1, \ldots, x_n$. Будем считать x данным числом, отличным от узлов. Определим число Q (при данном x) из уравнения

$$R(x)=(x-x_0)(x-x_1)\ \ldots\ (x-x_n)\,Q.$$

Введем вспомогательную функцию аргумента t, положив

$$F(t)=R(t)-(t-x_0)(t-x_1)\ \ldots\ (t-x_n)\,Q.$$

Функция $F(t)$ обращается в нуль в $n+2$ точках: в интерполяционных узлах $t=x_i$ и в точке $t=x$ (в силу определения Q). Следовательно, существует по крайней мере одна точка $t=\xi$, в которой $F^{(n+1)}(\xi)=0$ (см. том I, § 82, следствие теоремы Ролля). Имеем:

$$F^{(n+1)}(t)=R^{(n+1)}(t)-(n+1)!\,Q$$

и

$$R^{(n+1)}(t)=f^{(n+1)}(t)-P_n^{(n+1)}(t)=f^{(n+1)}(t),$$

откуда

$$f^{(n+1)}(\xi)-(n+1)!\,Q=0 \quad \text{и} \quad Q=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

и, следовательно,

$$R(x)=(x-x_0)(x-x_1)\ \ldots\ (x-x_n)\,\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

В частности, для случая равноотстоящих узлов интерполяции $x_i=a+ih$ получим:

$$R(x)=(x-a)(x-a-h)\ \ldots\ (x-a-nh)\,\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

В этой форме пишут остаточный член при пользовании формулой Ньютона.

Примечание. Пусть $f(x)$ — непрерывная функция на сегменте $[a, b]$. Рассмотрим последовательность разбиений $[a, b]$, взятую при следующем условии: наибольший из диаметров ячеек n-го разбиения имеет предел, равный нулю. Примем точки деления для каждого данного разбиения за узлы интерполяции и построим соответствующий интерполяционный полином. Таким образом, рассматриваемой последовательности разбиений можно поставить в соответствие последовательность интерполяционных полиномов:

$$P_1(x),\quad P_2(x),\ \ldots,\ P_n(x),\ \ldots$$

Как показывают более подробные исследования, эта последовательность может не быть сходящейся к функции $f(x)$. Таким образом, неограниченное увеличение числа узлов и соответственное увеличение степени интерполяционного полинома не гарантируют возможности аппроксимации интерполяционными полиномами данной непрерывной функции с какой угодно степенью точности.

Примеры.

1. Составлена таблица десятичных логарифмов целых чисел. Определить ошибку, допускаемую при вычислении посредством интерполяции логарифмов нецелых чисел.

Пусть N — данное число и $0 < x < 1$, положим $a = N$,

$$\Delta \lg N = \lg (N+1) - \lg N.$$

При линейной интерполяции получим:

$$\lg (N+x) \approx \lg N + x\Delta \lg N.$$

Для остаточного члена имеем выражение:

$$R = \frac{x(x-1)}{1\cdot 2}[\lg x]''_{x=\xi} = -\frac{x(1-x)}{1\cdot 2}\frac{\lg e}{(N+\xi)^2}.$$ Так как (при $0 < x < 1$)

$$0 < x(1-x) = x - x^2 = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - x\right)^2 \leqslant \frac{1}{4} \text{ и } 0 < \lg e < \frac{1}{2},$$

то имеем оценку $|R| < \frac{1}{16}\frac{1}{N^2}$.

Так, например, для чисел от 10 до 100 ошибка будет меньше, чем $\frac{1}{16}\cdot 0{,}01 < 0{,}0007$.

Для чисел от 100 до 1000 ошибка будет меньше, чем $\frac{1}{16}\cdot 0{,}0001 < 0{,}000007$.

При квадратической интерполяции получим:

$$\lg (N+x) \approx \lg N + x\Delta \lg N + \frac{x(x-1)}{1\cdot 2}\Delta^2 \lg N,$$

где

$$\Delta^2 \lg N = \lg (N+2) - 2\lg (N+1) + \lg N.$$

Для остаточного члена получим оценку:

$$|R_n| = \left|\frac{x(x-1)(x-2)}{3!}\right| \cdot \frac{2\lg e}{(N+\xi)^3} < \frac{1}{12}\cdot\frac{1}{N^3}$$

$\left(\text{как нетрудно проверить, } |x(x-1)(x-2)| \leqslant \frac{2}{3\sqrt{3}} < 0{,}5\right)$.

Так, например, для чисел от 10 до 100 ошибка будет меньше, чем

$$\frac{1}{12}\,\frac{1}{10^3} < 0{,}0001.$$

2. Определить, с какой степенью точности можно вычислить $\sqrt{115}$, если применить интерполяционную формулу Лагранжа к функции $y = \sqrt{x}$. Полагая $x_0 = 100$, $x_1 = 121$, $x_2 = 144$, имеем: $f'''(x) = \frac{3}{8}\,x^{-\frac{5}{2}}$; положив $x = 115$, получим:

$$|R| = \left|\frac{(x-100)(x-121)(x-144)}{3!}\cdot\frac{3}{8}\,\frac{1}{\sqrt{(x+\xi)^5}}\right| < \frac{15\cdot 6\cdot 29\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 8}\,\frac{1}{\sqrt{100^5}} < 0{,}002.$$

Интерполяционные формулы могут быть применены к выводу формул приближенного интегрирования.

Предположим, например, что промежуток интеграции разбит на n равных частей:

$$x_0 = a,\quad x_1 = a+h,\ \ldots,\quad x_i = a+ih,\ \ldots,\quad x_n = a+nh = b,$$

где $h = \frac{b-a}{n}$. Применим к каждой из ячеек $[x_{i-1},\ x_i]$ формулу линейного интерполирования:

$$f(x) \approx y_{i-1} + \frac{x-x_{i-1}}{h}(y_i - y_{i-1}).$$

Проинтегрировав, получим:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \approx y_{i-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i} dx + \frac{y_i - y_{i-1}}{h}\int_{x_{i-1}}^{x_i}(x-x_{i-1})\,dx =$$

$$= y_{i-1}h + \frac{y_i - y_{i-1}}{h}\,\frac{h^2}{2} = \frac{y_i + y_{i-1}}{2}\,h.$$

Просуммировав, получим «формулу трапеций» (том I, § 150):

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \approx h\left[\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + \frac{y_n}{2}\right].$$

Пользуясь выражением для остаточного члена, можно получить оценку погрешности при приближенном вычислении интеграла по формуле трапеций. Имеем (при $n = 1$) для i-й ячейки:

$$R = \frac{(x-x_{i-1})(x-x_i)}{1\cdot 2}\,f''(\xi).$$

Если $|f''(x)| < M$, то получим оценку погрешности для ячейки $[x_{i-1}, x_i]$:

$$\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i} R\,dx\right| = \left|\int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{(x-x_{i-1})(x-x_i)}{1\cdot 2} f''(\xi)\,dx\right| < \frac{1}{1\cdot 2} M \int_0^h t|t-h|\,dt =$$

$$= \frac{1}{12} Mh^3.$$

Следовательно, общая погрешность при пользовании формулой трапеций будет меньше, чем

$$\frac{1}{12} Mh^3 n = \frac{M(b-a)^3}{12n^2} \quad \text{(ср. том I, § 150).}$$

Разобьем промежуток интеграции на $2n$ равных частей $h = \frac{b-a}{2n}$ и применим к каждому из промежутков $[x_{2(k-1)}, x_{2k}]$ формулу квадратической интерполяции. Проведем подробно выкладки для первого промежутка $[x_0, x_2]$. Имеем:

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{x-x_0}{h}\Delta f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2h^2}\Delta^2 f(x_0).$$

Интегрируя (полагаем $x - x_0 = t$), получим:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx \approx f(x_0)\,2h + \frac{\Delta f(x_0)}{h}\int_0^{2h} t\,dt + \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2h^2}\int_0^{2h} t(t-h)\,dt =$$

$$= 2hy_0 + (y_1 - y_0)\,2h + (y_0 - 2y_1 + y_2)\frac{h}{3} = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

Применив этот результат к последующим промежуткам, после почленного сложения получим формулу приближенного интегрирования Симпсона (ср. том I, § 150):

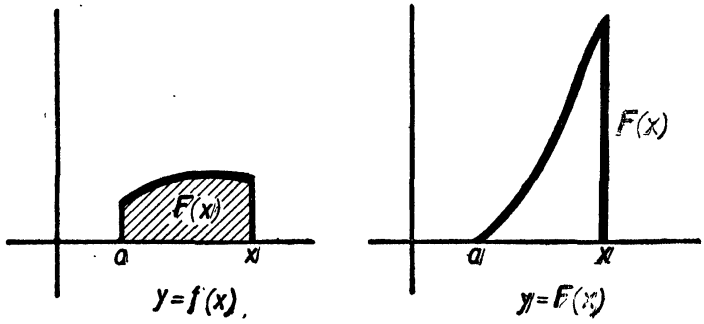
$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6n}[y_0 + y_{2n} + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2n-1}) +$$

$$+ 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2n-2})].$$

Пользуясь выражением для остаточного члена, можно произвести оценку погрешности (предоставляем это читателю в виде упражнения).

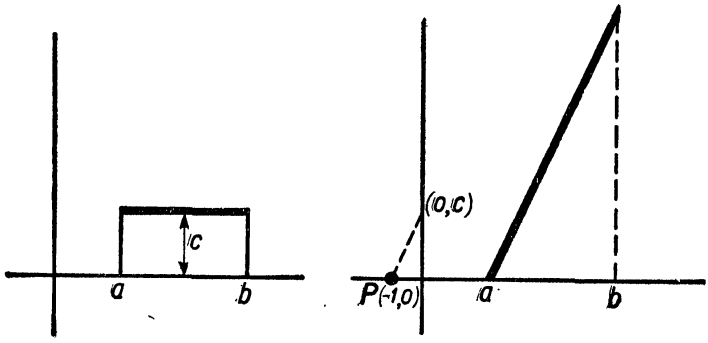
§ 81. Графические методы

Графическое интегрирование. Задача графического интегрирования ставится следующим образом: *по данному графику функции* $y=f(x)$ *построить график функции* $F(x)=\int_a^x f(x)\,dx$;



Черт. 172.

иными словами, требуется построить такую линию $y=F(x)$, чтобы ее ордината в точке x была численно равна площади криволинейной трапеции с основанием $[a, x]$ и ограниченной линией $y=f(x)$ (черт. 172). Соотношение $f(x)=\frac{dF(x)}{dx}$ показывает, что угловой



Черт. 173.

коэффициент касательной к интегральной линии $y=F(x)$ в точке x должен быть численно равен ординате линии $y=f(x)$ в точке x.

Рассмотрим сначала следующие два частные случая построения интегральной линии.

Случай 1°. На сегменте $[a, b]$ функция $f(x)$ постоянна: $f(x)=c$ (черт. 173 левый).

В этом случае

$$\int_a^x f(x)\,dx=c(x-a)=F(x)$$

и, следовательно, графиком интегральной функции является прямая $y = c(x - a)$. Построение этой прямой показано на чертеже 173:

1) на оси ординат (правый чертеж 173) строим точку C $(0, c)$;

2) точку $P(-1, 0)$ (так называемый полюс) соединяем прямолинейным отрезком с точкой $C(0, c)$;

3) через точку $(a, 0)$ проводим прямую, параллельную отрезку PC, до пересечения с прямой $x = b$.

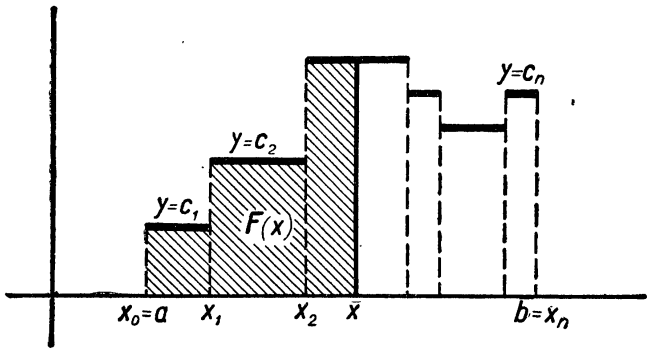
Из описанного построения следует, что полученная прямая имеет угловой коэффициент, равный c, и проходит через точку $(a, 0)$.

Разумеется, что все построения можно выполнять на одном и том же чертеже.

Случай 2°. *Существует такое разбиение сегмента* $[a, b]$, *что функция* $f(x)$ *постоянна в каждой ячейке этого разбиения*

$$f(x) = \begin{cases} c_1 & (\text{если } x_0 < x < x_1), \\ c_2 & (\text{если } x_1 < x < x_2), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_n & (\text{если } x_{n-1} < x < x_n)^*. \end{cases}$$

Функцию $f(x)$, удовлетворяющую сформулированному условию, будем называть кусочно постоянной на данном сегменте $[a, b]$. Графиком кусочно постоянной функции является разрывная «ступенчатая линия» (черт. 174). Значение интегральной функции $F(x)$ есть площадь ступенчатого многоугольника с основанием $[x_0, x]$; этот многоугольник состоит из конечного числа прямоугольников.



Черт. 174.

Для выполнения графического интегрирования соединяем точку C_1 $(0, c_1)$ с полюсом $P(-1, 0)$, проводим через точку $M_0(a, 0)$ луч, параллельный PC_1, до пересечения с прямой $x = x_1$ в точке M_1; через точку M_1 проводим луч, параллельный прямой PC_2 (соединяющей точки P и $C_2(0, c_2)$), до пересечения с прямой $x = x_2$ в точке M_2; через точку M_2 проводим прямую M_2M_3 параллельно прямой PC_3, и так далее (черт. 175). В результате этого построения получается график интегральной функции в виде ломаной линии $M_0 M_1 M_2 \ldots M_n$.

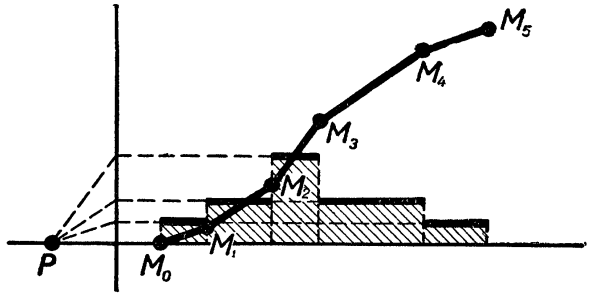
---

* Значения $f(x)$ в точках деления при интегрировании безразличны, а потому их можно не принимать во внимание.

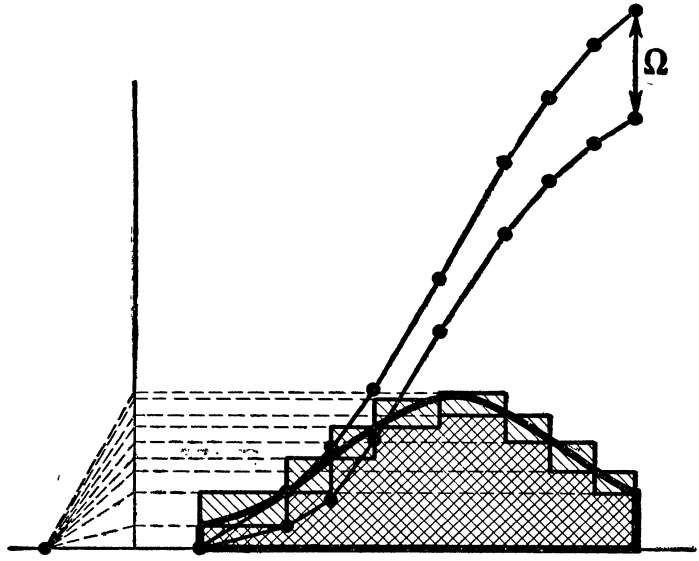
Пусть $f(x)$ — произвольная непрерывная функция на сегменте $[a, b]$. В качестве приближенного значения интеграла $I = \int_a^b f(x)\,dx$ может быть взята какая-либо интегральная сумма

$$S_n = \sum f(\xi_i)\,\sigma_i$$

(так как интеграл есть предел интегральных сумм). Но сумма S_n есть интеграл от кусочно постоянной функции $f_n(x)$, определенной (при данном разбиении и точках ξ_i) следующим образом: $f_n(x) = f(\xi_i)$ в ячейке σ_i. Таким образом, для приближенного построения интегральной линии можно, разбив основание $[a, b]$ данной криволинейной трапеции на некоторое число частей и взяв какую-либо ступенчатую линию, построить для нее интегральную ломаную. На чертеже 176 представлены результаты



Черт. 175.



Черт. 176.

графического интегрирования для ступенчатой входящей и ступенчатой выходящей линий. Интегральная ломаная любой другой ступенчатой линии (при данном разбиении) заключена между построенными «крайними» ломаными. Между крайними ломаными заключена также и интегральная линия функции $f(x)$. Для любого достаточно мелкого δ-разбиения сегмента $[a, b]$ соответствующие крайние лома-

ные заключаются в заданной ε-окрестности интегральной линии. В самом деле, максимум разности ординат крайних ломаных реализуется в точке b, этот максимум равен $\Omega = \sum \omega_i \sigma_i$; но $\Omega < \varepsilon$ для любого достаточно мелкого δ-разбиения сегмента $[a, b]$.

По теореме о среднем значении существует хотя бы одна такая точка $\xi \in [a, b]$, что

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b - a).$$

Положим $f_1(x) = \text{const} = f(\xi)$ на сегменте $[a, b]$. Отрезок, получающийся в результате графического интегрирования функции $f_1(x)$, есть хорда, стягивающая дугу интегральной линии данной функции $f(x)$. В самом деле, обе функции

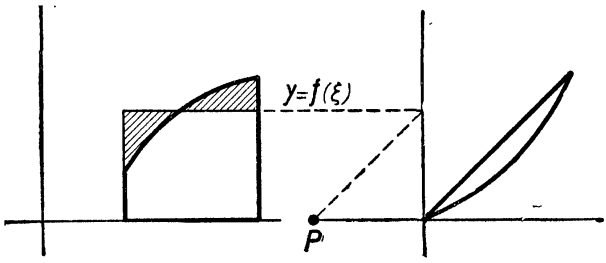
$$F(x) = \int_a^x f(x)\,dx \quad \text{и} \quad F_1(x) = \int_a^x f_1(x)\,dx = f(\xi)(x - a)$$

в концах сегмента имеют соответственно одинаковые значения:

$$F(a) = F_1(a) = 0 \quad \text{и} \quad F(b) = F_1(b) = I.$$

Прямая $y = f(\xi)$, параллельная оси абсцисс, должна быть проведена так, чтобы криволинейная трапеция была равновелика прямоугольнику с основанием $[a, b]$ и с высотой $f(\xi)$.

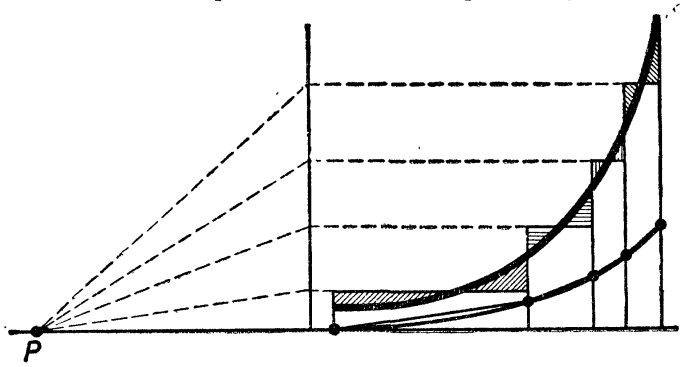
Для линии, представленной на чертеже 177, горизонтальная линия $y = f(\xi)$ должна быть проведена так, чтобы заштрихованные криволинейные треугольники были равновелики.



Черт. 177.

Пусть $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ — произвольное разбиение сегмента $[a, b]$. На каждой из ячеек σ_i построим прямоугольник, равновеликий криволинейной трапеции с основанием σ_i. Интегральная ломаная, построенная для соответствующей ступенчатой линии, состоит из хорд интегральной линии функции $f(x)$. Таким образом, для интегральной линии может быть построена вписанная ломаная с любым данным числом звеньев. Соединяя вершины ломаной плавной линией, можно построить достаточно точно график интегральной линии. На практике точки деления сегмента $[a, b]$ следует брать по возможности частыми на тех участках, на которых данная линия наиболее круто поднимается, либо опускается. Горизонтальные отрезки, составляющие ступенчатую линию, проводятся обычно «на глаз», с тем расчетом, чтобы одинаково заштрихованные

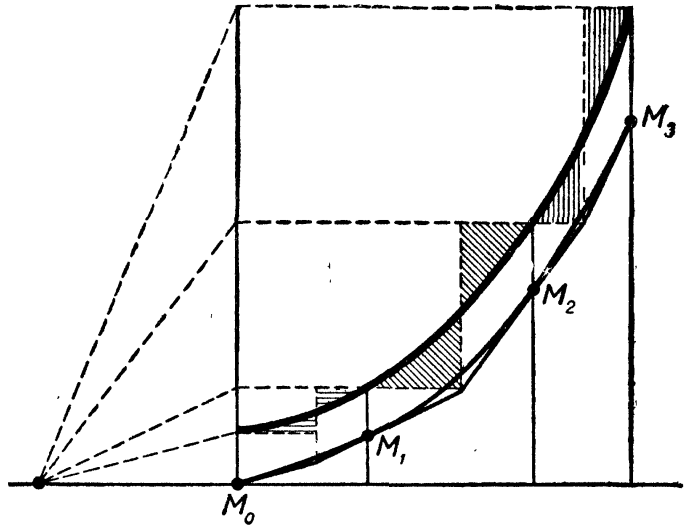
на чертеже 178 криволинейные треугольники были равновелики. Это построение можно выполнить достаточно точно, так как даже незначительное смещение горизонтального отрезка увеличит площадь



Черт. 178.

одного треугольника и уменьшит площадь другого, и неравенство площадей станет заметным «на глаз».

Для более точного приближения можно пользоваться следующим видоизменением описанного метода, которое пояснено на чертеже 179.

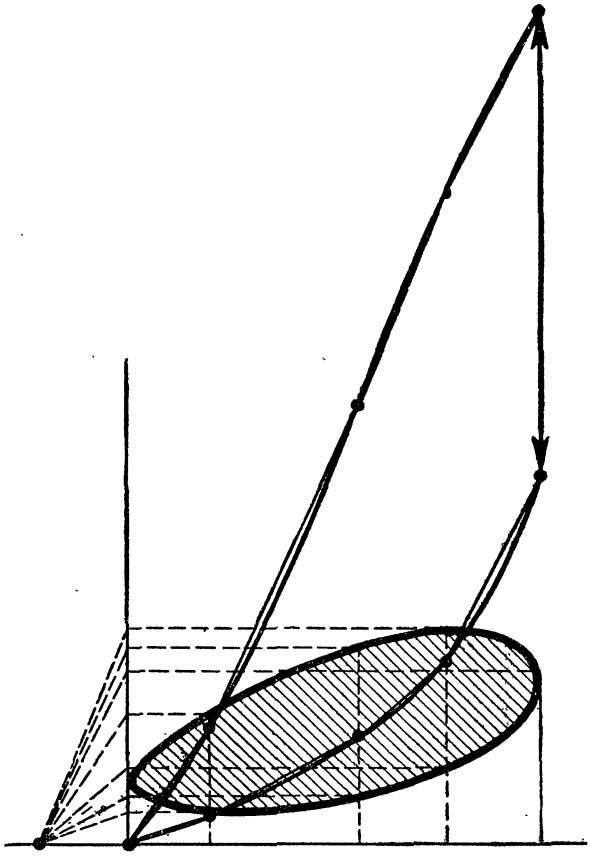


Черт. 179.

Пусть $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ — ячейки разбиения сегмента $[a, b]$. Для каждой ячейки σ_i строим ступенчатую линию, состоящую из двух горизонтальных отрезков так, чтобы одинаково заштрихованные криволинейные треугольники были равновелики.

В результате графического интегрирования полученной ступенчатой линии образуется ломаная линия, касающаяся интегральной

линии в точках M_1, M_2, ..., M_n с абсциссами x_1, x_2, ..., x_n (соответственно). В самом деле, криволинейная трапеция с основанием $[a, x_i]$ и соответствующий ступенчатый многоугольник равновелики, а потому обе интегральные линии проходят через точку M_i. Кроме того, согласно построению, угловой коэффициент звена, проходящего через точку M_i, равен $f(x_i) = F'(x_i)$. На чертеже 180 пояснено графическое вычисление площади фигуры, ограниченной замкнутой линией. В рассматриваемом случае достаточно построить интегральные линии для линий, ограничивающих эту фигуру сверху и снизу. Разность ординат интегральных линий в точке b численно равна площади фигуры.



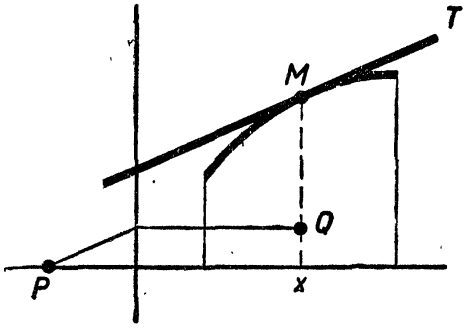
Черт. 180.

Графическое дифференцирование. Задача графического дифференцирования ставится следующим образом: *по заданному графику функции* $y = f(x)$ *построить график производной* $y = f'(x)$.

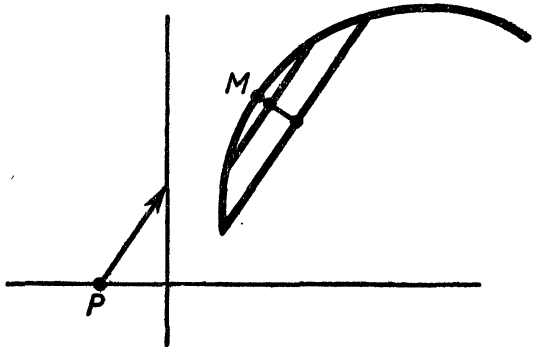
Предположим, что при данном x построена касательная MT в соответствующей точке линии $y = f(x)$ (черт. 181); проведем через полюс $P(-1,0)$ прямую, параллельную MT, а через точку пересечения этой прямой с осью ординат проведем параллель оси OX до пересечения с параллелью оси ординат, проходящей через точку M. Полученная точка Q принадлежит графику производной, так как ее ордината равна угловому коэффициенту касательной MT, т. е. значению производной в точке x.

Практическое осуществление этого способа встречает следующее затруднение. Трудно достаточно точно проводить касательные в заданных точках линии. Поэтому поступают так: задают направление касательной и отыскивают на линии точку касания. Для приближенного нахождения точки касания M можно провести две малые хорды заданного направления и найти точку пересечения данной линии с прямой, соединяющей середины проведенных хорд (черт. 182).

Для линии второго порядка указанное построение является точным, так как в этом частном случае точка касания является точкой пере-



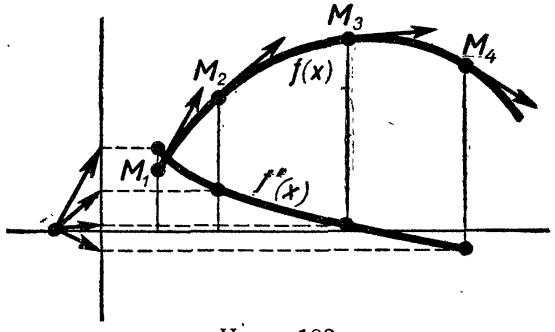
Черт. 181.



Черт. 182.

сечения диаметра, сопряженного хордам данного направления, с линией второго порядка. Для произвольной линии этот способ является приближенным, основанным на рассмотрении малых дуг данной линии как дуг линий второго порядка.

На основании изложенного можно сформулировать следующее правило графического дифференцирования: через полюс проводится (до пересечения с OY) ряд лучей, на данной линии находятся точки, в которых касательные параллельны этим лучам, по найденным точкам касания строятся точки графика $y = f'(x)$, как показано на чертеже 183.



Черт. 183.

Следует иметь в виду, что методы графического дифференцирования не обладают большой точностью и могут служить лишь для грубого построения графика производной.

ГЛАВА IX

КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§ 82. Квадрируемые фигуры

В элементарной геометрии рассматриваются площади многоугольников. Всякой фигуре F, составленной из конечного числа многоугольников, в качестве ее меры можно поставить в соответствие число $\operatorname{mes} F$ (называемое площадью), удовлетворяющее следующим условиям:

I. *Конгруэнтные (равные) фигуры имеют равные площади.*

II. (Аддитивность). *Если фигура F составлена из конечного числа фигур $F_1, F_2, \ldots, F_n$, не имеющих попарно общих внутренних точек, то*

$$\operatorname{mes} F = \operatorname{mes} F_1 + \operatorname{mes} F_2 + \ldots + \operatorname{mes} F_n.$$

III. *Площадь единичного квадрата (т. е. квадрата со стороной, равной единице длины) считается равной 1.*

Будем (для простоты терминологии) называть фигурой произвольное множество точек плоскости. Вопрос об измерении произвольной фигуры усложняется, так как не очевидна возможность приписать произвольному множеству в качестве его меры число, чтобы соблюдались условия I, II и III. Не касаясь в общем виде вопроса об измерении произвольных множеств, мы выделим класс таких фигур, для которых проблема меры решается в положительном смысле.

Две системы прямых

$$x = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm k, \ldots, \text{ и } y = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm k, \ldots$$

параллельных координатным осям, делят плоскость на бесконечное множество конгруэнтных единичных квадратов. Назовем это разбиение плоскости первым квадрильяжем (Q_1).

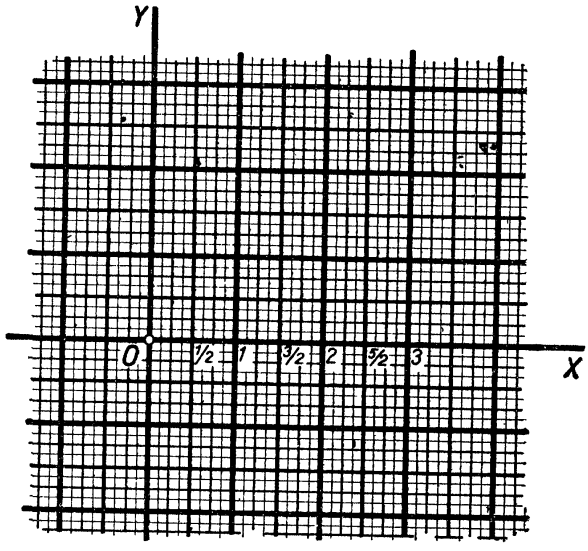
Две системы прямых

$$x = 0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1, \ldots, \pm\frac{n}{2}, \ldots \text{ и } y = 0, \pm\frac{1}{2}, \ldots, \pm\frac{n}{2}, \ldots$$

разбивают плоскость на конгруэнтные квадраты со стороной, равной $\frac{1}{2}$. При этом каждый квадрат первого квадрильяжа разбивается на четыре квадрата. Это разбиение назовем вторым квадрильяжем (Q_2).

Системы прямых $x = \frac{n}{4}$, $y = \frac{n}{4}$ (где n — любое целое число) разбивают плоскость на конгруэнтные квадраты со стороной, равной $\frac{1}{4}$. Назовем это разбиение третьим квадрильяжем (Q_3).

Описанный процесс может быть продолжаем неограниченно, в результате k-го шага мы получим две системы прямых $x = \frac{n}{2^{k-1}}$ и $y = \frac{n}{2^{k-1}}$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$), разбивающих плоскость на конгруэнтные квадраты со стороной, равной $\frac{1}{2^{k-1}}$, и с площадью, равной $\left(\frac{1}{2^{k-1}}\right)^2$. Это разбиение плоскости будем называть k-м квадрильяжем (Q_k) (черт. 184).



Черт. 184.

Пусть F — данная ограниченная плоская фигура. Квадраты (замкнутые) всякого квадрильяжа (Q_k) можно разбить на три класса:

1° квадраты, лежащие (вместе с границей) внутри фигуры F;

2° квадраты, имеющие с границей F хотя бы одну общую точку;

3° квадраты, внешние относительно фигуры F (черт. 185).

В силу ограниченности фигуры F существует лишь конечное множество квадратов класса 1° и конечное множество квадратов класса 2°.

Квадраты класса 1° составляют многоугольник, содержащийся в F. Будем называть этот многоугольник k-м (для квадрильяжа Q_k) входящим в F полигоном. Квадраты класса 2° составляют многоугольник, который будем называть k-м полигоном, покрывающим границу F.

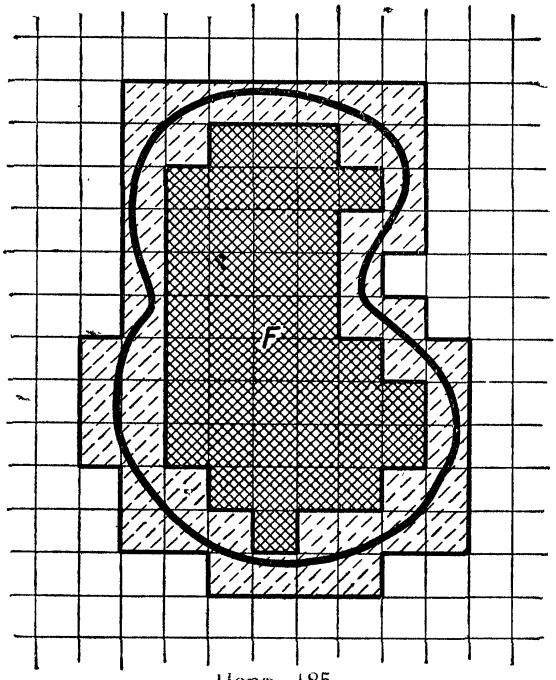
Если к входящему в F полигону присоединить полигон, покрывающий границу, то получится многоугольник, содержащий фигуру F вместе с ее границей. Этот многоугольник назовем выходящим из F полигоном.

Примечание. Входящий полигон может распадаться на конечное число связных частей даже в том случае, если фигура F является связной (черт. 186). Этот полигон может оказаться пустым множеством, не

содержащим ни одного квадрата (черт. 187). Полигоны, покрывающий границу и выходящий, не могут быть пустыми множествами, если само множество F не пусто*.

Обозначим через $\underline{F}_k$ k-й входящий в F полигон, через $\overline{F}_k$ — k-й выходящий полигон и через $\overline{F}_k - \underline{F}_k$ k-й полигон, покрывающий границу. Площадь каждого из этих полигонов равна сумме площадей квадратов, из которых данный полигон составлен. При этом имеем всегда

$$\operatorname{mes} \overline{F}_k = \operatorname{mes} \underline{F}_k + \operatorname{mes} (\overline{F}_k - \underline{F}_k).$$

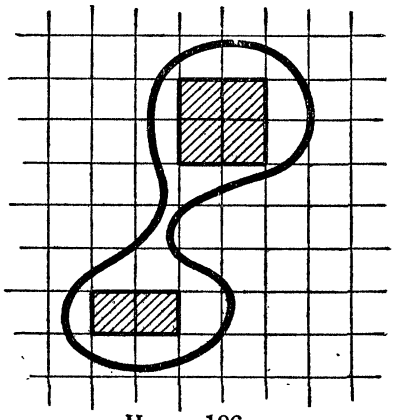


Черт. 185.

Рассмотрим две последовательности:

$$\underline{F}_1, \underline{F}_2, \ldots, \underline{F}_k, \ldots,$$

$$\overline{F}_1, \overline{F}_2, \ldots, \overline{F}_k, \ldots,$$



Черт. 186.

которые образуют входящий и выходящий полигоны для первого, второго и т. д., k-го и т. д. квадрильяжей.

Теорема. *Повледовательность площадей полигонов, входящих в ограниченную фигуру F, не убывает. Последовательность площадей полигонов, выходящих из F, не возрастает.*

Доказательство. Если квадрат Q_k k-го квадрильяжа содержится в F, то при переходе к следующему квадрильяжу Q_k распадается на 4 квадрата, содержащиеся в F. Если квадрат Q_k содержит точки границы F, то для квадратов Q_{k+1}, на которые распадается Q_k, возможны три случая:

---

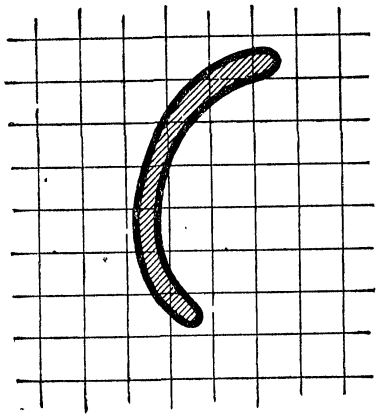
* Обычно многоугольник (или полигон) понимается как связная фигура. Говоря о входящем полигоне, в том случае, когда он распадается на конечное число многоугольников, авторы во избежание частых оговорок позволили себе отступление от общепринятой терминологии.

1°. Квадрат Q_{k+1} содержится внутри F; все такие квадраты присоединятся к входящему полигону.

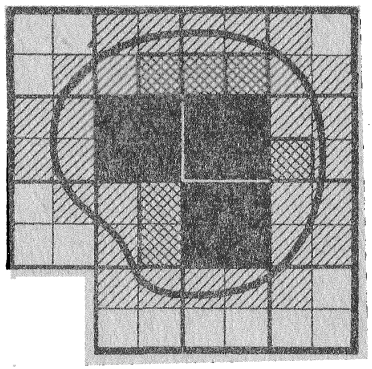
2°. Квадрат Q_{k+1} содержит точки границы F; все такие квадраты останутся в составе выходящего полигона.

3°. Точки Q_{k+1} являются внешними для F; все такие квадраты исключаются из состава выходящего полигона.

Итак, при переходе к следующему квадрильяжу к входящему полигону могут лишь присоединяться новые квадраты, а из состава выходящего полигона могут лишь исключаться квадраты (черт. 188). Отсюда и следует утверждение теоремы.



Черт. 187.



Черт. 188.

Следствие. *Последовательность площадей полигонов, покрывающих границу* $\operatorname{mes}\overline{F_k} - \operatorname{mes}\underline{F_k}$ *не возрастает*, ибо $\operatorname{mes}\overline{F_k}$ не возрастает, а $\operatorname{mes}\underline{F_k}$ не убывает.

Теорема. *Последовательности* $\operatorname{mes}\overline{F_k}$ и $\operatorname{mes}\underline{F_k}$ *площадей выходящих и входящих полигонов сходятся* (*каждая*).

Доказательство. Неравенства

$$\operatorname{mes}\underline{F_1} \leqslant \operatorname{mes}\underline{F_2} \leqslant \ldots \leqslant \operatorname{mes}\underline{F_k} \leqslant \ldots \leqslant \operatorname{mes}\overline{F_k} \leqslant \ldots \leqslant \operatorname{mes}\overline{F_1}$$

показывают, что каждая из монотонных последовательностей $\operatorname{mes}\underline{F_k}$ и $\operatorname{mes}\overline{F_k}$ ограничена, а потому существуют конечные пределы $\lim \operatorname{mes}\underline{F_k}$ и $\lim \operatorname{mes}\overline{F_k}$. При этом имеем всегда $\lim \operatorname{mes}\underline{F_k} \leqslant \lim \operatorname{mes}\overline{F_k}$, ч. т. д.

Определение. *Ограниченная фигура* F *называется квадрируемой, если предел последовательности площадей выходящих полигонов равен пределу последовательности площадей входящих полигонов*:

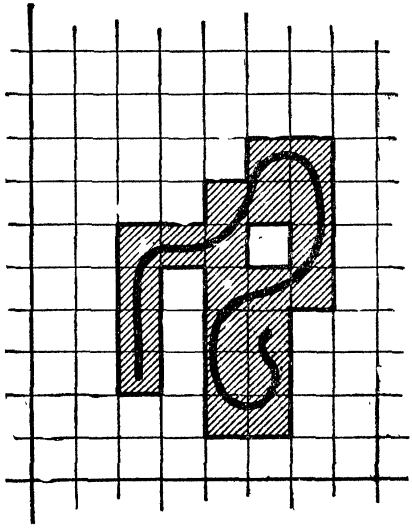
$$\lim \operatorname{mes}\underline{F_k} = \lim \operatorname{mes}\overline{F_k}.$$

Этот общий предел называется площадью, или мерой (в смысле Жордана), квадрируемой фигуры F.

Если $\lim \operatorname{mes} \underline{F_k} < \lim \operatorname{mes} \overline{F_k}$, *то фигура* F *называется неквадрируемой.*

Неквадрируемой фигуре в качестве площади не будем приписывать никакого числа.

В частности, площадь $\operatorname{mes} F$ фигуры F может быть равной нулю. В этом случае фигуру F обычно называют множеством меры нуль (по Жордану). Множество меры нуль (при достаточно мелком квадрильяже) может быть покрыто системой квадратов с общей площадью, меньшей наперед заданного числа $\varepsilon > 0$: $\operatorname{mes} \overline{F_k} < \varepsilon$, так как $\lim \operatorname{mes} \overline{F_k} = 0$.



Черт. 189.

Множество меры нуль не может содержать ни одной внутренней точки. В противном случае это множество содержало бы некоторую окрестность, а вместе с ней и входящие квадраты (при достаточно мелком разбиении). Ясно, что при этом условии площадь выходящего полигона не может быть сделана как угодно малой, каким бы мелким ни был квадрильяж. Для множества меры нуль любой входящий полигон является пустым множеством, не содержащим ни одного квадрата (черт. 189).

Теорема. *Для квадрируемости фигуры* F *необходимо и достаточно, чтобы ее граница была множеством меры нуль.*

Доказательство. Условие необходимо. В самом деле, если фигура квадрируема, то

$$\lim \operatorname{mes} \overline{F_k} = \lim \operatorname{mes} \underline{F_k} = \operatorname{mes} F.$$

Но тогда площадь полигона, покрывающего границу, равная $\operatorname{mes} \overline{F_k} - \operatorname{mes} \underline{F_k}$, имеет предел, равный нулю.

Условие достаточно. Если площадь полигона, покрывающего границу $\operatorname{mes} \overline{F_k} - \operatorname{mes} \underline{F_k}$, имеет предел, равный нулю, то $\lim \operatorname{mes} \overline{F_k} = \lim \operatorname{mes} \underline{F_k}$, т. е. фигура квадрируема, ч. т. д.

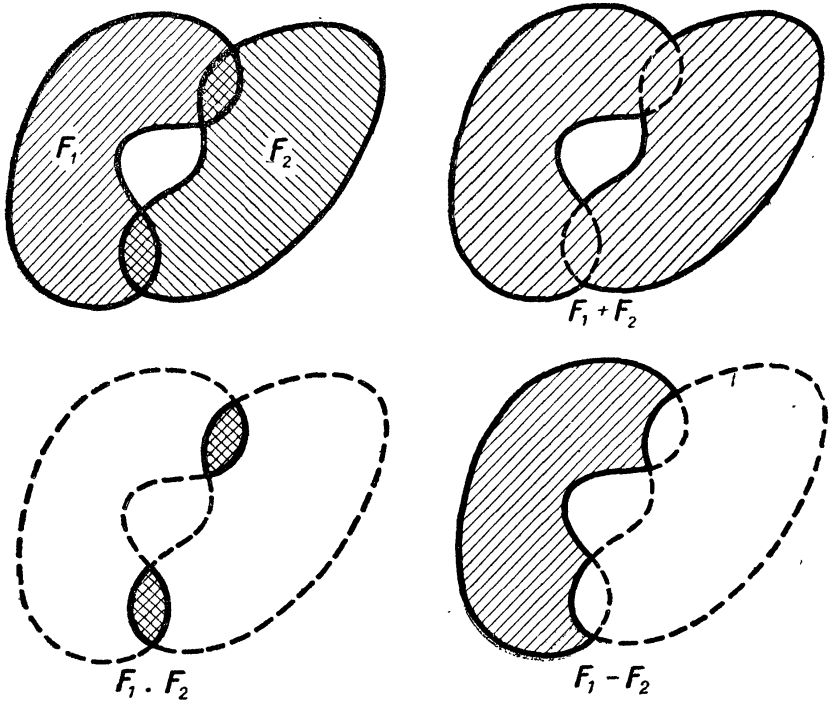
Примером неквадрируемого множества может служить множество всех рациональных точек единичного квадрата K. В самом деле, всякий квадрат содержит рациональные точки, поэтому выходящий полигон $\overline{F_k}$ при любом квадрильяже содержит квадрат K, и, следова-

тельно, $\operatorname{mes}\overline{F_k} > 1$. Так как множество рациональных точек не заполняет никакого квадрата, то входящий полигон $\underline{F_k}$ при любом квадрильяже есть пустое множество, и, следовательно, $\operatorname{mes}\underline{F_k} = 0$.

§ 83. Свойства квадрируемых фигур

Примем следующие обозначения.

1°. Символом $F_1 + F_2 + \ldots + F_n$ обозначается множество точек, принадлежащих по крайней мере одной из данных фигур F_1, F_2, ..., F_n. Иначе говоря, сумма $F_1 + F_2 + \ldots + F_n$ есть множество точек, получающихся в результате объединения в одно множество точек всех данных фигур.



Черт. 190.

2°. Символом $F_1 \cdot F_2 \ldots F_n$ обозначается множество точек, принадлежащих каждой из данных фигур. Иначе говоря, $F_1 \cdot F_2 \ldots F_n$ есть общая часть (или пересечение) данных фигур.

3°. Символом $F_1 - F_2$ обозначается множество точек, принадлежащих фигуре F_1, но не принадлежащих фигуре F_2. Иначе говоря, $F_1 - F_2$ получается вычитанием из F_1 точек фигуры F_2 (черт. 190).

Теорема. *Каждая граничная точка любой из фигур $F_1 + F_2$, $F_1 \cdot F_2$, $F_1 - F_2$ является граничной точкой по крайней мере одной из фигур F_1 и F_2.*

Доказательство. Если точка M не является граничной ни для одной из фигур F_1 и F_2, то возможен один из следующих случаев:

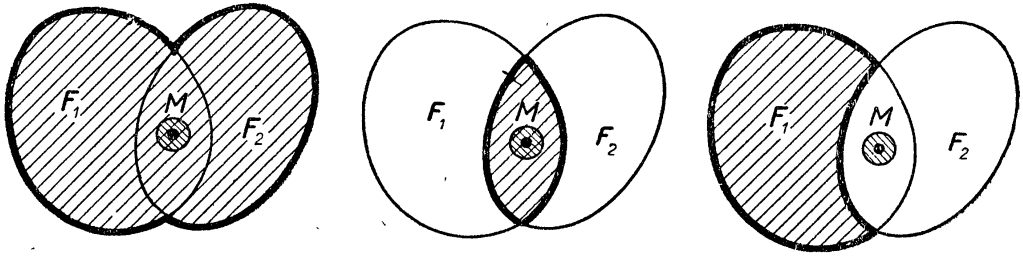
1° M — внутренняя точка как для F_1, так и для F_2;

2° M — внешняя точка как для F_1, так и для F_2;

3° M — внутренняя точка для F_1 и внешняя для F_2;

4° M — внешняя точка для F_1 и внутренняя для F_2.

Докажем, что M не может быть граничной точкой ни для одной из фигур F_1+F_2, $F_1 \cdot F_2$, F_1-F_2. В случае 1° существуют окрестности U_1 и U_2 точки M, содержащиеся (соответственно) в F_1 и F_2. Любая окрестность U точки M, содержащаяся в окрестностях U_1 и



Черт. 191.

U_2, содержится в фигурах F_1+F_2 и $F_1 \cdot F_2$ и не содержится в фигуре F_1-F_2, а потому M есть внутренняя точка фигур F_1+F_2 и $F_1 \cdot F_2$ и внешняя точка фигуры F_1-F_2 (черт. 191).

Рассмотрение трех остальных случаев 2°, 3° и 4° аналогично; предоставляем его учащимся.

Следовательно, всякая граничная точка любой из фигур F_1+F_2, $F_1 \cdot F_2$ и F_1-F_2 есть граничная точка хотя бы одной из данных фигур, ч. т. д.

Для суммы $F_1+F_2+\ldots+F_n$ и общей части $F_1 \cdot F_2 \ldots F_n$ любого числа фигур теорема распространяется методом полной индукции.

Теорема. *Если каждая из фигур F_1 и F_2 квадрируема, то каждая из фигур F_1+F_2, $F_1 \cdot F_2$ и F_1-F_2 также квадрируема.*

Доказательство. В силу квадрируемости фигур F_1 и F_2, при достаточно большом номере квадрильяжа площади полигонов (каждая), покрывающих границы фигур F_1 и F_2, меньше, чем $\frac{\varepsilon}{2}$. Обозначим через P полигон, составленный из квадратов обоих полигонов, покрывающих границы F_1 и F_2. Площадь P меньше, чем ε. Полигон, покрывающий границу любой из фигур F_1+F_2, $F_1 \cdot F_2$ и F_1-F_2, состоит из квадратов, входящих в состав P, а потому имеет площадь, меньшую ε. Значит, граница каждой из рассматриваемых фигур есть множество меры нуль, т. е. все эти фигуры квадрируемы, ч. т. д.

Распространение теоремы на случай суммы и общей части любого числа квадрируемых фигур не представляет затруднений.

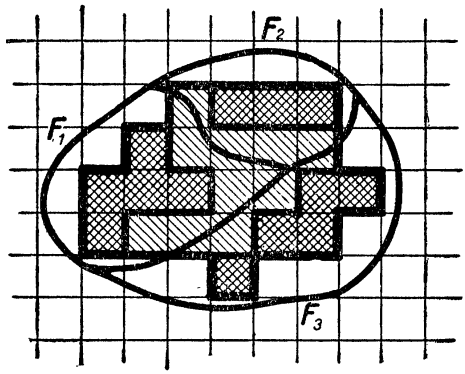
Теорема. (Аддитивность площади.) *Фигура F, составленная из любого числа n квадрируемых фигур:*

$$F = F_1 + F_2 + \ldots + F_n,$$

не имеющих попарно общих внутренних точек, имеет площадь, равную сумме площадей составляющих фигур:

$$\operatorname{mes} F = \operatorname{mes} F_1 + \operatorname{mes} F_2 + \ldots + \operatorname{mes} F_n.$$

Доказательство. Фигура F, будучи суммой квадрируемых фигур, квадрируема. Для нахождения площади F достаточно найти предел площади входящего в F полигона. Этот последний полигон $\underline{F}$ (при любом квадрильяже) составлен из полигонов $\underline{F_1}, \underline{F_2}, \ldots, \underline{F_n}$, входящих в данные фигуры, плюс квадраты, лежащие внутри F и покрывающие те части границ данных фигур, по которым эти фигуры примыкают друг к другу (черт. 192). Обозначим через σ множество всех последних квадратов *; имеем:



Черт. 192.

$$\underline{F} = \underline{F_1} + \underline{F_2} + \ldots + \underline{F_n} + \sigma$$

и

$$\operatorname{mes} \underline{F} = \operatorname{mes} \underline{F_1} + \operatorname{mes} \underline{F_2} + \ldots + \operatorname{mes} \underline{F_n} + \operatorname{mes} \sigma.$$

Если (при достаточно мелком квадрильяже) площади полигонов, покрывающих границы каждой из данных фигур $F_1, F_2, \ldots, F_n$, меньше $\frac{\varepsilon}{n}$, то $\operatorname{mes}\sigma < n \cdot \frac{\varepsilon}{n} = \varepsilon$, а потому $\lim \operatorname{mes} \sigma = 0$. Следовательно:

$$\operatorname{mes} F = \lim \operatorname{mes} \underline{F} = \lim \operatorname{mes} \underline{F_1} + \lim \operatorname{mes} \underline{F_2} + \ldots +$$
$$+ \lim \operatorname{mes} \underline{F_n} + \lim \operatorname{mes} \sigma = \operatorname{mes} F_1 + \operatorname{mes} F_2 + \ldots + \operatorname{mes} F_n,$$

ч. т. д.

Следствие I. *Если квадрируемая фигура разбита на конечное число квадрируемых фигур, не имеющих попарно общих внутренних точек, то площадь фигуры равна сумме площадей тех частей, на которые она разбита.*

Следствие II. *Если квадрируемая фигура f есть часть квадрируемой фигуры F, то* $\operatorname{mes} f \leqslant \operatorname{mes} F$, *именно:*

$$\operatorname{mes} f = \operatorname{mes} F - \operatorname{mes} (F - f).$$

* Не исключена возможность, что σ окажется пустым множеством; так будет, например, если данные фигуры не имеют попарно общих граничных точек.

В самом деле, разбив фигуру F на две квадрируемые части f и $F - f$, получим:

$$\text{mes } F = \text{mes } f + \text{mes } (F - f).$$

§ 84. Правильные разбиения

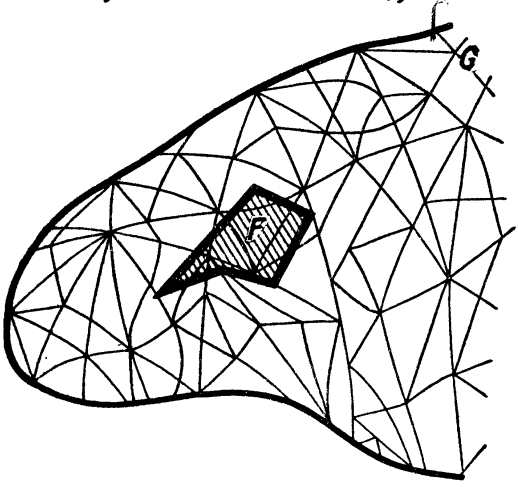
Определение. *Правильным разбиением области будем называть систему ее частей–«ячеек», удовлетворяющую следующим условиям:*

1° *каждая ячейка ограничена, квадрируема и имеет положительную площадь;*

2° *две различные ячейки не могут иметь общих внутренних точек, а могут иметь лишь общие граничные точки;*

3° *каждая точка области принадлежит хотя бы одной ячейке;*

4° *всякая ограниченная фигура, лежащая вместе со своей границей в области G, может быть покрыта* конечным числом ячеек* (черт. 193).



Черт. 193.

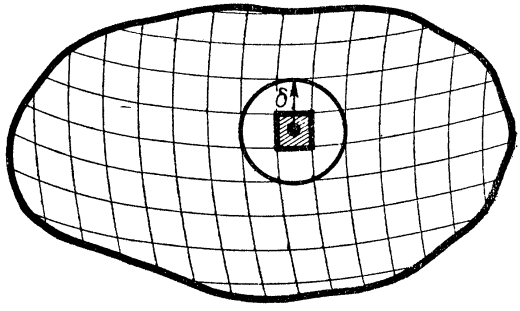
Всякий квадрильяж может служить примером правильного разбиения плоскости; ячейками этого разбиения являются квадраты

Будем считать ячейки правильного разбиения замкнутыми. для чего достаточно к каждой ячейке присоединить ее границу.

Определение. *Ячейка разбиения называется δ-ячейкой, если она может быть заключена внутрь круга с диаметром, равным δ* (черт. 194).

Правильное разбиение называется δ-разбиением, если все его ячейки являются δ-ячейками.

Таким образом, расстояние между любыми двумя точками δ-ячейки меньше δ.



Черт. 194.

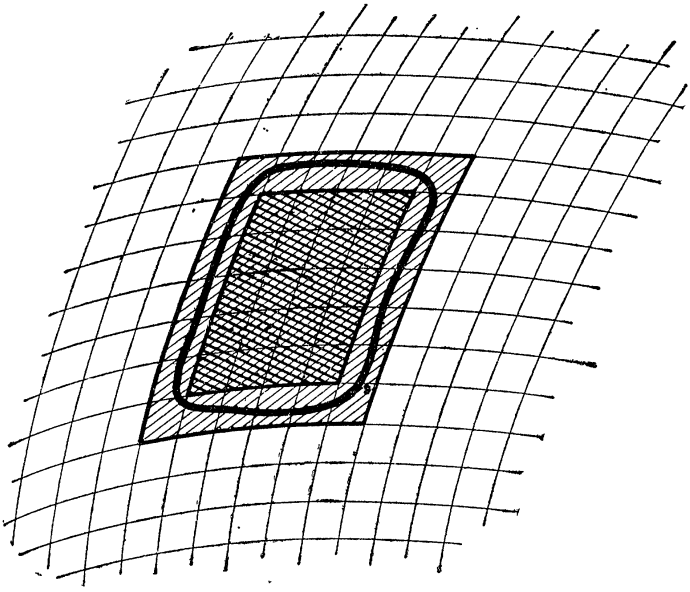
Рассмотрим какое-либо правильное разбиение плоскости, или некоторой области, содержащей данную фигуру F вместе с ее границей

* То есть вместе с границей содержится внутри фигуры, составленной из конечного числа ячеек.

(черт. 195). Ячейки разбиения можно разделить на три класса; внутренние относительно F, покрывающие границу F и внешние относительно F. Множество ячеек первого класса образует квадрируемую фигуру $\underline{F}$, входящую в F, множество ячеек первого и второго классов образует квадрируемую выходящую фигуру $\overline{F}$, содержащую F:

$$\underline{F} \subset F \subset \overline{F}.$$

Определение. *Число S называется пределом площадей фигур $\underline{F}$, входящих в F (или фигур $\overline{F}$, выходящих из F), если при любом за-*



Черт. 195.

данном $\varepsilon > 0$ существует такое число δ, что неравенство

$$|\operatorname{mes} \underline{F} - S| < \varepsilon \quad (\text{соответственно } |\operatorname{mes} \overline{F} - S| < \varepsilon) \qquad (1)$$

выполняется для произвольного δ-разбиения.

Таким образом, неравенство (1) должно выполняться для произвольного «достаточно мелкого» разбиения независимо от формы ячеек.

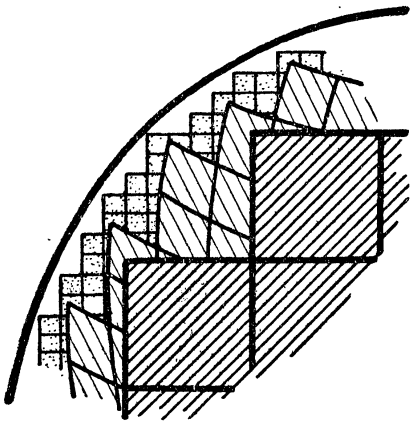
Теорема. *Для любой ограниченной фигуры существует предел площадей входящих фигур и предел площадей выходящих фигур.*

Доказательство. Докажем существование предела площадей входящих фигур. Как известно, существует предел площади входящего полигона $\lim \operatorname{mes} \underline{F_k} = \underline{S}$, составленного из квадратов квадрильяжа плоскости. Таким образом, существование предела площади входящей фигуры доказано для специального вида правильных разбиений (квад-

рильяжей). Пусть Q_k — какой-либо определенный квадрильяж, выбранный при условии:

$$0 < \underline{S} - \operatorname{mes} \underline{F_k} < \varepsilon. \qquad (2)$$

Обозначим через d расстояние границы фигуры F до границы полигона $\underline{F_k}$. Рассмотрим любое δ-разбиение, взятое при условии $\delta < d$. Если какая-нибудь ячейка σ_i рассматриваемого δ-разбиения имеет хотя бы одну общую точку M с границей полигона $\underline{F_k}$, то эта ячейка содержится внутри фигуры F. В самом деле, все точки ячейки σ_i удалены от точки M на расстояние меньше $\delta < d$, но все такие точки лежат внутри F (черт. 196). Итак, полигон $\underline{F_k}$ содержится внутри входящей фигуры $\underline{F}$. Обозначим через d_1 расстояние от границы входящей фигуры $\underline{F}$ до границы фигуры F. Пусть Q_{k+m} — любой квадрильяж плоскости, для которого диагонали составляющих его квадратных ячеек меньше d_1. Тогда все квадраты Q_{k+m}, имеющие хотя бы одну общую точку с границей входящей фигуры $\underline{F}$, содержатся внутри F. Следовательно, входящий полигон $\underline{F_{k+m}}$ содержит входящую фигуру $\underline{F}$.



Черт. 196.

Итак, $\underline{F_k} \subset \underline{F} \subset \underline{F_{k+m}}$, каково бы ни было δ-разбиение, если $\delta < d$. Следовательно,

$$\operatorname{mes} \underline{F_k} < \operatorname{mes} \underline{F} < \operatorname{mes} \underline{F_{k+m}} < \underline{S};$$

но в силу неравенства (2) будем иметь $0 < \underline{S} - \operatorname{mes} \underline{F} < \varepsilon$, а потому $\lim \operatorname{mes} \underline{F} = S$.

Для выходящих фигур доказательство аналогично, ч. т. д.

Примечание. Если F есть множество меры нуль, то любая входящая фигура есть пустое множество, не содержащее ни одной ячейки.

Следствие. *Если фигура F квадрируема, то входящие и выходящие фигуры имеют общий предел, равный площади F:*

$$\lim \operatorname{mes} \underline{F} = \lim \operatorname{mes} \overline{F} = \operatorname{mes} F.$$

При этом, каким бы ни было заданное число ε, сумма площадей ячеек, покрывающих границу F, будет меньшей ε для любого достаточно мелкого δ-разбиения.

Итак, для вычисления площади квадрируемой фигуры можно пользоваться правильными разбиениями с ячейками какой угодно формы.

Так, например, можно производить разбиение плоскости посредством пучка лучей и концентрических окружностей. Этими разбиениями пользуются при вычислении площадей в полярных координатах.

Заметим, в частности, что при вычислении площадей можно пользоваться квадрильяжами в любой прямоугольной декартовой системе координат, так как переход к другой системе прямоугольных координат повлечет за собой лишь изменение способа разбиения плоскости на квадраты *.

§ 85. Понятие кубируемой фигуры

Теория объемов строится в полном соответствии с изложенной теорией площадей. Вместо квадрильяжей следует рассматривать кубильяжи, т. е. разбиения пространства на конгруэнтные кубы. В качестве первого такого кубильяжа берется разбиение пространства на единичные кубы; переход к каждому последующему кубильяжу осуществляется делением пополам ребер кубов предыдущего кубильяжа. Объем прямоугольного параллелепипеда (в частности куба) определяется как произведение длин его ребер (в пространстве с любым числом измерений). Всякой ограниченной фигуре F при любом кубильяже Q_k соответствуют три полиэдра (многогранника) $\underline{F_k}$, $\overline{F_k}$ и $\overline{F_k}-\underline{F_k}$. Первый состоит из кубов, содержащихся внутри F, третий — из кубов, покрывающих границу F, а второй — из внутренних и покрывающих границу кубов. Объем каждого из рассматриваемых полиэдров определяется как сумма объемов составляющих его кубов. Дальнейшие определения и теоремы остаются в силе, изменяется лишь терминология, именно слова квадрат, круг, полигон, квадрируемая фигура, площадь и. т. д. заменяются соответственно терминами: куб, шар, полиэдр, кубируемая фигура, объем и т. д.

Теория объемов может быть построена в пространстве любого числа измерений в строгом соответствии с теорией площадей и объемов на плоскости и в обычном пространстве.

§ 86. Простейшие квадрируемые фигуры

Теорема. *Дуга графика функции* $y=f(x)$, *непрерывной на сегменте* $[a, b]$, *квадрируема и имеет площадь, равную нулю.*

Доказательство. Разность между верхней и нижней суммами, построенными для какого-нибудь разбиения (σ):

$$\Omega(\sigma)=\sum(M_i-m_i)\sigma_i,$$

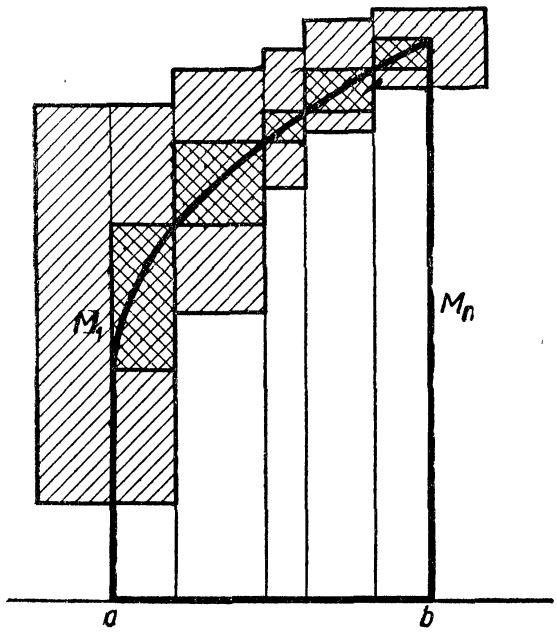
есть площадь многоугольника P, получаемого вычитанием из выходящего ступенчатого многоугольника входящего многоугольника (эти мно-

* Мы основываемся на следующих известных свойствах ортогонального преобразования: при ортогональном преобразовании не изменяются расстояния, углы и площадь единичного квадрата.

гоугольники строятся для соответствующей криволинейной трапеции, черт. 197). Многоугольник P состоит из конечного числа прямоугольников с высотами, равными $M_i - m_i$. Присоединим к каждому из прямоугольников, составляющих P, два конгруэнтные ему прямоугольника, прилежащие к нему сверху и снизу. После этого к крайним (правому и левому) прямоугольникам присоединим справа и слева конгруэнтные им (соответственно) прямоугольники, как показано на чертеже 197. В результате этого построения получается многоугольник, содержащий данную дугу строго внутри. Площадь этого многоугольника

$$3\Omega + 3(M_1 - m_1)\sigma_1 + 3(M_n - m_n)\sigma_n$$

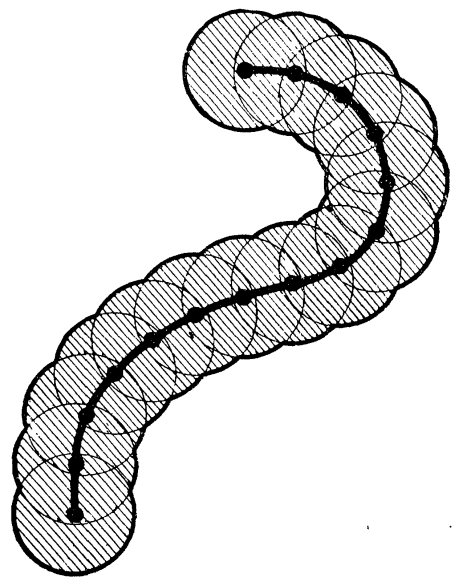
может быть сделана как угодно малой, так как $\lim \Omega = 0$ (в силу интегрируемости непрерывной функции $f(x)$) и $\lim \sigma_1 = \lim \sigma_n = 0$. Следовательно, дуга может быть покрыта многоугольником как угодно малой площади, ч. т. д.



Черт. 197.

Теорема. *Всякая простая спрямляемая дуга имеет площадь, равную нулю.*

Доказательство. Пусть L — длина дуги AB. Разделим дугу точками $A = P_0, P_1, \ldots, P_n = B$ на n равных по длине частей (черт. 198). Построим круг K_i радиуса $\frac{L}{n}$ с центром в точке P_i. Дуга P_iP_{i+1} лежит в круге K_i. В самом деле, если бы какая-либо точка Q этой дуги лежала вне K_i, то хорда P_iQ, а следовательно, и сама дуга P_iQ, имела бы длину, большую $\frac{L}{n}$, что невозможно. Круги $K_0, K_1, \ldots, K_{n+1}$ в сумме составляют фигуру,


Черт. 198.

содержащую дугу AB, имеющую площадь, меньшую, чем $(n+1)\pi\left(\frac{L}{n}\right)^2$. Так как $\lim\limits_{n\to+\infty} \pi L^2 \frac{n+1}{n^2} = 0$, то дуга AB имеет площадь, равную нулю, ч. т. д.

Если фигура F ограничена конечным числом дуг, имеющих (каждая) площадь, равную нулю, то и вся граница F есть множество меры нуль. Следовательно, фигура F квадрируема.

В частности, *фигура F квадрируема, если ее граница состоит из конечного числа спрямляемых дуг, а также дуг, являющихся графиками непрерывных функций $y=f(x)$ или $x=\overline{f}(y)$.*

Примечание. Заметим, что существуют простые неквадрируемые дуги. Такая дуга не может быть заключена в многоугольник как угодно малой площади. Построение соответствующего примера выходит за пределы настоящего курса (см. книгу акад. Н. Н. Лузина «Теория функций действительного переменного», Учпедгиз, 1948). *Всякая область, ограниченная простой неквадрируемой замкнутой линией, неквадрируема.*

§ 87. Интегральные суммы

Рассмотрим функцию $f(X)$ в замкнутой квадрируемой (кубируемой) области $\overline{D}$. Замкнутая область $\overline{D}$ (будучи квадрируемой) ограничена. *Определение интегральной суммы и основные свойства интегральных сумм, известные из интегрального исчисления функций одного аргумента, переносятся на функции нескольких аргументов.*

1°. Под разбиением замкнутой квадрируемой (кубируемой) фигуры будем подразумевать правильное ее разбиение (стр. 396) на конечное множество квадрируемых (кубируемых) ячеек:

$$\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n. \qquad (\sigma)$$

Разбиение (σ^*) называется продолжением разбиения (σ), если при переходе к (σ^*) каждая ячейка σ_i разбиения (σ) либо остается без изменения, либо подвергается правильному разбиению.

Для получения разбиения (σ^*), являющегося продолжением каждого из двух данных разбиений (σ') и (σ''), достаточно образовать суммарное разбиение следующим образом:

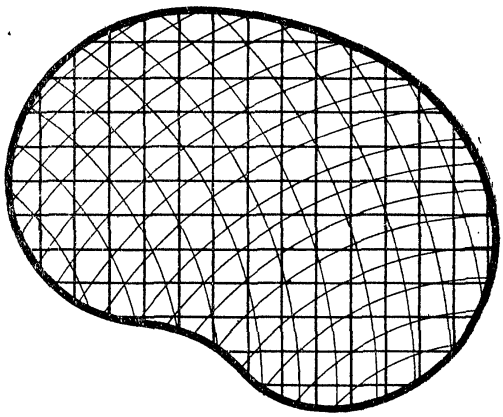
Две ячейки σ'_i и σ''_j, взятые из данных разбиений (σ') и (σ''), либо не имеют общих внутренних точек, либо имеют квадрируемую (кубируемую) общую часть $\sigma^*_{ij} = \sigma'_i \cdot \sigma''_j$ положительной площади (объема). Все ячейки σ^*_{ij} положительной площади (объема) и образуют суммарное разбиение, являющееся продолжением обоих данных разбиений. Для получения суммарного разбиения достаточно объединить в одну «сеть» границы ячеек как первого, так и второго разбиений (черт. 199).

Примечание. Общая часть $\sigma_i' \cdot \sigma_j''$ двух ячеек σ_i' и σ_j'' может распасться на несколько или на бесконечное множество связных «кусков» (черт. 200). В этом случае вся совокупность этих кусков рассматривается как одна ячейка.

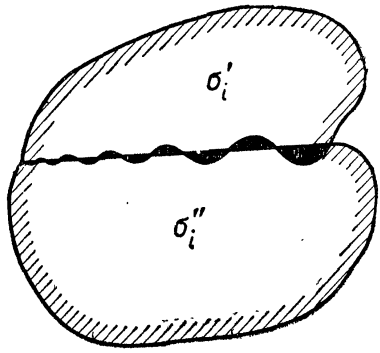
2°. Интегральной суммой S называется всякая сумма

$$S = \sum f(X_i)\sigma_i,$$

где $f(X)$ — функция, ограниченная в замкнутой области $\overline{D}$, σ_i ячейки, а также их площади (объемы) при данном разбиении (σ) области $\overline{D}$,



Черт. 199.



Черт. 200.

а $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — точки, произвольно выбранные в соответствующих ячейках.

Для функции двух аргументов интегральная сумма в развернутом виде запишется так:

$f(\xi_1, \eta_1)\sigma_1 + f(\xi_2, \eta_2)\sigma_2 + \ldots + f(\xi_n, \eta_n)\sigma_n$, где $X_i(\xi_i, \eta_i) \in \sigma_i$.

К интегральным суммам причисляются нижняя и верхняя суммы:

$$\underline{S} = \sum m_i\sigma_i \quad \text{и} \quad \overline{S} = \sum M_i\sigma_i,$$

где m_i и M_i — нижняя и верхняя грани $f(X)$ в ячейке σ_i.

3°. Интегральные суммы обладают следующими основными свойствами (соответствующие доказательства, проведенные в томе I, гл. X для функций одного аргумента, остаются в силе).

а) При продолжении разбиения верхние суммы не возрастают, а нижние не убывают.

b) Произвольная верхняя сумма не меньше любой нижней суммы.

c) Множество всех интегральных сумм ограничено:

$$Dm \leqslant \sum m_i\sigma_i \leqslant \sum f(X_i)\sigma_i \leqslant \sum M_i\sigma_i \leqslant DM,$$

где M и m — верхняя и нижняя грани функции $f(X)$ в замкнутой области $\overline{D}$, а D — площадь (объем) $\overline{D}$.

d) Если $|f(X)| < N$, в $\overline{D}$, то привзнос, который дают в интегральной сумме ячейки σ_k, σ_l, ..., σ_m, по абсолютной величине меньше, чем $N \cdot P$, где P — сумма площадей рассматриваемых ячеек:

$$P = \sigma_k + \sigma_l + \ldots + \sigma_m.$$

§ 88. Кратные интегралы

Определения предела интегральных сумм и интеграла, известные из интегрального исчисления функций одного аргумента, переносятся на функции нескольких аргументов, ограниченные в квадрируемой (кубируемой) области.

Число I называется пределом интегральных сумм функции $f(X)$, ограниченной в квадрируемой (кубируемой) замкнутой области $\overline{D}$, если при произвольном заданном $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что неравенство

$$|S - I| < \varepsilon \tag{1}$$

выполняется для любой интегральной суммы S, составленной при любом δ-разбиении замкнутой области $\overline{D}$.

Иными словами, неравенство (1) выполняется, если только разбиение замкнутой области $(\overline{D})$ является δ-разбиением (вне зависимости от формы ячеек).

Функция $f(X)$ называется интегрируемой в $\overline{D}$, если существует конечный предел интегральных сумм.

Этот предел называется интегралом от функции $f(X)$, распространенным на область интеграции $\overline{D}$.

Интегралы от функций многих аргументов (в отличие от интеграла функции одного аргумента) называются кратными интегралами. По числу аргументов подинтегральной функции кратные интегралы называются двойными (от функции двух аргументов), тройными (от функции трех аргументов) и т. д., n-кратными (от функции n аргументов). Кратный интеграл, распространенный на область интеграции $\overline{D}$, обозначается так:

$$\int\limits_{D} f(X)\, d\sigma = \iint\limits_{D} f(x, y)\, dx\, dy,$$

$$\int\limits_{D} f(X)\, d\sigma = \iiint\limits_{D} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz \quad \text{и т. д.}$$

Теорема. *Для любой функции $f(X)$, ограниченной в замкнутой области $\overline{D}$, существуют (в отдельности) предел верхних сумм и предел нижних сумм:*

$$\overline{I} = \lim \overline{S} \quad \text{и} \quad \underline{I} = \lim \underline{S}.$$

Доказательство теоремы проводится в строгом соответствии с ее доказательством для функций одного аргумента (том I, § 126).

1°. Если $\overline{I}$ есть нижняя грань множества верхних сумм, то существует разбиение (τ), удовлетворяющее условию

$$0 < \overline{S}(\tau) - \overline{I} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

2°. В силу квадрируемости (кубируемости) ячеек разбиения (τ) границы этих ячеек образуют множество («сеть» данного разбиения) меры нуль. Поэтому для любого достаточно мелкого δ-разбиения (σ) общая площадь ячеек (σ), имеющих хотя бы одну общую точку с границами ячеек разбиения (τ), может быть сделана меньшей заданного числа $\varepsilon' > 0$. Эти ячейки дадут в сумме $\overline{S}(\sigma)$ привзнос, меньший $N\varepsilon' < \frac{\varepsilon}{4}$, если положить $\varepsilon' < \frac{\varepsilon}{4N}$ (где $|f(X)| < N$).

3°. Для суммарного разбиения (σ^*), являющегося продолжением (τ) и (σ), имеем:

$$0 < \overline{S}(\sigma^*) - \overline{I} < \frac{\varepsilon}{2} \tag{2}$$

и

$$0 \leqslant \overline{S}(\sigma) - \overline{S}(\sigma^*) < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}, \tag{3}$$

так как суммы $\overline{S}(\sigma)$ и $\overline{S}(\sigma^*)$ могут отличаться лишь привзносами ячеек, имеющих общие точки с границами ячеек τ_i.

4°. Из сопоставления неравенств (2) и (3) следует

$$0 \leqslant \overline{S}(\sigma) - \overline{I} < \varepsilon, \text{ ч. т. д.}$$

Необходимым и достаточным условием интегрируемости функции $f(X)$ является равенство пределов верхних и нижних сумм:

$$\lim \underline{S} = \lim \overline{S} = \int_D f(X)\, d\sigma.$$

Этому условию можно придать обычную форму:

$$\lim \Omega(\sigma) = \lim \sum (M_i - m_i)\,\sigma_i = \lim \sum \omega_i \sigma_i = 0.$$

Теорема. *Функция, непрерывная в замкнутой квадрируемой (кубируемой) области D, интегрируема.*

Доказательство (см. том I, § 128) переносится на функции нескольких аргументов: если δ-разбиение выбрать настолько мелким, чтобы (в силу равномерной непрерывности) в каждой ячейке имело место неравенство $\omega_i = M_i - m_i < \frac{\varepsilon}{D}$ (где $D = \operatorname{mes} \overline{D}$), то

$$\Omega(\sigma) < \frac{\varepsilon}{D} \sum \sigma_i = \frac{\varepsilon}{D} \cdot D = \varepsilon.$$

Нижеследующие теоремы, имеющие место для функций одного аргумента (см. том I), и их доказательства переносятся на функции нескольких аргументов.

1°. *Если в замкнутой квадрируемой (кубируемой) области* $\overline{D}$ $f(X)=\varphi(X)$ *всюду, за исключением множества меры нуль (по Жордану), то ограниченные в* $\overline{D}$ *функции* $f(X)$ *и* $\varphi(X)$ *либо обе интегрируемы и*

$$\int_D f(X)\,d\sigma=\int_D \varphi(X)\,d\sigma,$$

либо обе данные функции неинтегрируемы.

2°. *Если множество точек разрыва функции* $f(X)$, *ограниченной в замкнутой квадрируемой (кубируемой) области* D, *имеет меру нуль, то функция* $f(X)$ *интегрируема в* $\overline{D}$.

Доказательства (том I, гл. X) этих теорем, данные для функций одного аргумента, остаются в силе (покрыв множество меры нуль ячейками с общей площадью, меньшей заданного числа ε', следует рассматривать разбиения, в состав которых входят эти ячейки).

Следствие. *Функция, ограниченная в замкнутой квадрируемой (кубируемой) области и имеющая в этой области конечное число линий (поверхностей) разрыва с площадью (объемом), равной нулю, а также конечное число точек разрыва, интегрируема.*

При вычислении кратных интегралов можно не принимать во внимание значения функции на множестве точек меры нуль, в частности на линии (или поверхности), имеющей площадь (объем), равную нулю. *Возможно не принимать во внимание значения функции на границе квадрируемой области.* Можно также не учитывать привзнос ячеек, покрывающих множество точек меры нуль, так как этот привзнос может быть сделан как угодно малым. В частности, *при нахождении пределов интегральных сумм можно распространять эти суммы лишь на ячейки, содержащиеся внутри квадрируемой (кубируемой) области интеграции.*

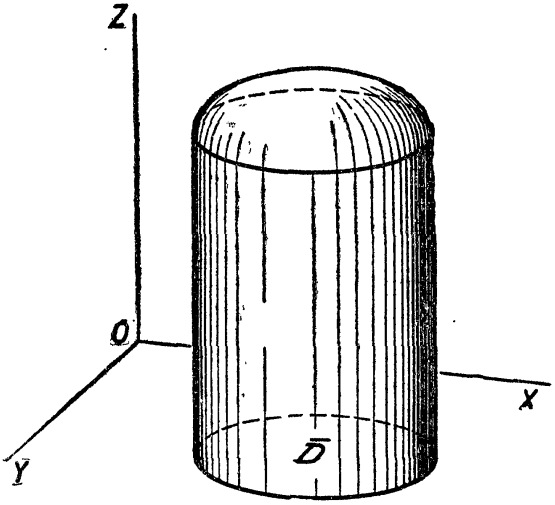
Примечание. Мы предполагали, что областью интеграции является замкнутая ограниченная квадрируемая (кубируемая) область. Однако все рассуждения остаются в силе, если в качестве области интеграции D рассматривать любую ограниченную квадрируемую (кубируемую) фигуру (не обязательно область).

§ 89. Геометрическая интерпретация двойного интеграла

Рассмотрим функцию $z=f(x, y)$, непрерывную в простой замкнутой квадрируемой области $\overline{D}$. Предположим для определенности, что $f(x, y)>0$. Рассмотрим фигуру, ограниченную снизу куском $\overline{D}$ плоскости (x, y), сверху — соответствующим простым куском поверхности $z=f(x, y)$, а с боков — цилиндрической поверхностью, для ко-

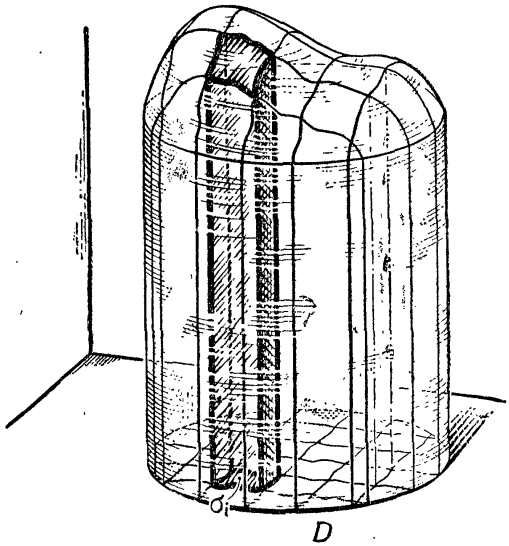
торой направляющей служит граница области D (т. е. простая замкнутая линия), а образующие параллельны оси OZ. Всякую такую фигуру будем называть цилиндрическим телом, построенным для функции $f(x, y)$ в данной области $\overline{D}$ (черт. 201). Точки (x, y, z), принадлежащие рассматриваемому цилиндрическому телу, характеризуются следующими условиями:

$$(x, y) \in \overline{D}, \quad 0 \leqslant z \leqslant f(x, y).$$



Черт. 201.

Рассмотрим произвольное разбиение (σ) замкнутой области $\overline{D}$, ячейки которого являются простыми замкнутыми областями, тогда все цилиндрическое тело разобьется на n цилиндрических тел (по числу ячеек), основаниями которых служат соответствующие ячейки σ_i разбиения (σ) (черт. 202). Привзнос $M_i\sigma_i$ ячейки σ_i в верхней сумме есть объем цилиндра с основанием σ_i и с высотой, равной наибольшей аппликате $z = f(x, y)$ в данной ячейке* (черт. 203). Этот цилиндр называется выходящим цилиндром, так как он содержит цилиндрическое тело с основанием σ_i.



Черт. 202.

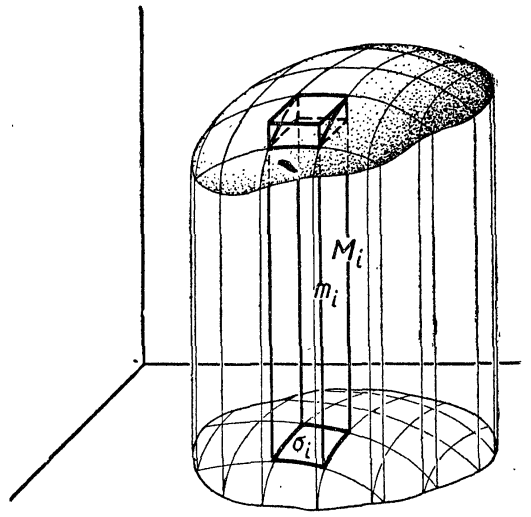
* Объем прямого цилиндра, основанием которого служит простая квадрируемая область $\overline{D}$, равен произведению площади основания D на высоту H. В самом деле, рассмотрим достаточно мелкий квадрильяж в плоскости основания. Пусть D_1 и D_2 — входящий и выходящий полигоны $D_1 \subset D \subset D_2$. Произведения D_1H и D_2H суть объемы многогранников, составленных из прямоугольных параллелепипедов, первый из этих многогранников содержится в цилиндре, а второй содержит цилиндр. В силу квадрируемости области D объемы обоих этих многогранников имеют общий предел

$$\lim D_1H = H \lim D_1 = HD,$$
$$\lim D_2H = H \lim D_2 = HD.$$

Верхняя сумма $\sum M_i\sigma_i$ есть объем ступенчатого выходящего тела, составленного из выходящих цилиндров. Ступенчатое выходящее тело содержит рассматриваемое цилиндрическое тело. Аналогично нижняя сумма $\sum m_i\sigma_i$ есть объем ступенчатого входящего тела, составленного из цилиндров, содержащихся в данном теле. Всякая интегральная сумма $\sum f(\xi_i, \eta_i)\sigma_i$ есть объем некоторого ступенчатого тела, содержащегося в выходящем теле и содержащего входящее тело. В силу интегрируемости непрерывной функции объем ступенчатого выходящего тела (верхняя сумма) и объем ступенчатого входящего тела имеют общий предел. Таким образом, цилиндрическое тело может быть заключено между двумя кубируемыми телами, как угодно мало отличающимися по объему. Отсюда следует, что цилиндрическое тело кубируемо * и имеет объем V, равный общему пределу объемов ступенчатых тел:

$$V = \lim \sum m_i\sigma_i = \lim \sum M_i\sigma_i = \iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy.$$

Итак, *двойной интеграл от положительной функции равен объему соответствующего цилиндрического тела.*



Черт. 203.

Примечание. Если функция $f(x, y)$ отрицательна в области интеграции D, то соответствующие интегральные суммы также отрицательны; их общий предел отрицателен и равен по абсолютной величине объему цилиндрического тела, лежащего под плоскостью (x, y). Чтобы не различать

---

* Пусть V_1 и V_2 — ступенчатые входящие и выходящие тела, взятые при условии $V_2 - V_1 < \frac{\varepsilon}{3}$. В силу кубируемости V_1 существует многогранник P_1, содержащийся в V_1 и отличающийся по объему от V_1 меньше, чем на $\frac{\varepsilon}{3}$:

$$V_1 - P_1 < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Аналогично существует многогранник P_2, содержащий V_2, причем

$$P_2 - V_2 < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Следовательно, цилиндрическое тело содержится в P_2 и содержит P_1, причем

$$P_2 - P_1 \leqslant (P_2 - V_2) + (V_2 - V_1) + (V_1 - P_1) < \varepsilon.$$

Следовательно, это тело кубируемо.

случаи $f(x, y) > 0$ и $f(x, y) < 0$, *условились объемы цилиндрических тел, расположенных под плоскостью* (x, y) *и ограниченных снизу поверхностью* $z = f(x, y)$, *считать отрицательными.*

§ 90. Теоремы об интегрируемых функциях

Нижеследующие теоремы об интегрируемых функциях одного аргумента и их доказательства (см. том I, §§ 131—134) переносятся на функции нескольких аргументов.

1°. *Остаются в силе теоремы об интегрируемости линейной комбинации*:

$$\int_D \sum_{i=1}^{n} c_i f_i \, d\sigma = \sum_{i=1}^{n} c_i \int_D f_i \, d\sigma \quad \text{(дистрибутивность интеграла)},$$

а также теорема об интегрируемости произведения, частного и абсолютной величины интегрируемых функций (том I, § 131).

2°. *Остается в силе свойство аддитивности интеграла: при любом правильном разбиении области интегрирования* $\overline{D}$ *на части* $\overline{D}_1, \overline{D}_2, \ldots, \overline{D}_n$ *имеет место равенство*

$$\int_D f(X) \, d\sigma = \int_{D_1} f(X) \, d\sigma + \int_{D_2} f(X) \, d\sigma + \ldots + \int_{D_n} f(X) \, d\sigma.$$

При этом: a) *если функция интегрируема в квадрируемой (кубируемой) области* $\overline{D}$, *то она интегрируема в любой ее квадрируемой (кубируемой) части*;

b) *из интегрируемости функции* f *в каждой из замкнутых областей* $\overline{D}_1, \overline{D}_2, \ldots, \overline{D}_n$ *следует ее интегрируемость в* $\overline{D}$. Доказательство (том I, § 132) распространяется на кратные интегралы: достаточно рассматривать разбиения замкнутой области $\overline{D}$, являющиеся продолжениями разбиения $\overline{D}_1, \overline{D}_2, \ldots, \overline{D}_n$.

3°. *Основные неравенства для кратных интегралов формулируются так* [доказательства (том I, § 133) остаются в силе]:

a) $$mD \leqslant \int_D f(X) \, d\sigma \leqslant MD,$$

где D — площадь (объем) области интегрирования, а m и M — нижняя и верхняя грани $f(X)$ в $\overline{D}$.

b) *Если* $f(X) \geqslant 0$, то $\int_D f(X) \, d\sigma \geqslant 0$,

при этом имеет место строгое неравенство, если функция $f(X)$ непрерывна и не равна тождественно нулю.

c) *Если* $f(X) \leqslant \varphi(X)$, *то* $\int\limits_D f(X)\,d\sigma \leqslant \int\limits_D \varphi(X)\,d\sigma$.

d) *Для любой интегрируемой в* $\overline{D}$ *функции*

$$\left|\int\limits_D f(X)\,d\sigma\right| \leqslant \int\limits_D |f(x)|\,d\sigma \leqslant ND, \quad \text{где} \quad |f(X)| \leqslant N.$$

4°. *Если* $f(X) = 1$, *то* $\int\limits_D f(X)\,d\sigma = \int\limits_D d\sigma = D$.

В этом случае все интегральные суммы имеют одно и то же значение, равное площади (объему) области интегрирования.

Пример.

Найти оценку для интеграла $\int\limits_D\int (x^2 - y^2)\,dx\,dy$, где $\overline{D}$ есть область, ограниченная кругом $x^2 + y^2 - 2x = 0$.

Площадь области интегрирования (круга) равна π, а потому

$$\pi m \leqslant \int\limits_D\int (x^2 - y^2)\,dx\,dy \leqslant \pi M,$$

где m и M — наименьшее и наибольшее значения подинтегральной функции в круге. Для функции $x^2 - y^2 = 0$ единственная стационарная точка есть (0, 0), лежащая на границе круга, поэтому точки минимума и максимума лежат на окружности. Ищем экстремум функции $x^2 - y^2$ на окружности $x^2 + y^2 - 2x = 0$.

Условно стационарные точки находим из уравнений:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 2x - 2\lambda(x - 1) = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -2y - 2\lambda y = 0$$

и уравнения окружности: (0, 0), (2, 0), $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Значения подинтегральной функции в этих точках соответственно суть 0, 4, $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$. Значит, $M = 4$, $m = -\frac{1}{2}$ и, следовательно,

$$-\frac{\pi}{2} < \int\limits_D\int (x^2 - y^2)\,dx\,dy < 4\pi.$$

5°. *Имеет место теорема о среднем значении* [доказательство (том I, § 134) остается в силе]:

$$\int\limits_D f(X)\varphi(X)\,d\sigma = \mu \int\limits_D \varphi(X)\,d\sigma,$$

где функция $\varphi(X)$ интегрируемая и знакопостоянная в области интеграции $\overline{D}$, а μ — некоторое число, заключенное между верхней и ниж-

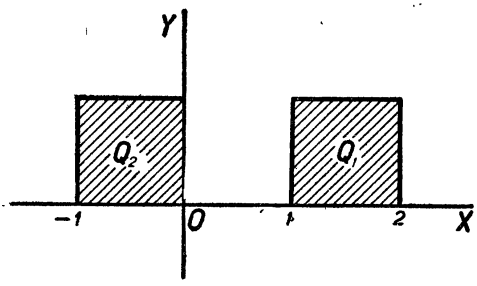
ней гранями интегрируемой функции $f(X)$. В частности, при

$$\varphi(X)=1 \quad \text{имеем:} \quad \int\limits_D f(X)\,d\sigma=\mu D.$$

Если функция $f(X)$ непрерывна в замкнутой области D, то по крайней мере в одной точке $X_1\in D$ имеем $f(X_1)=\mu$, а потому

$$\int\limits_D f(X)\varphi(X)\,d\sigma=f(X_1)\int\limits_D \varphi(X)\,d\sigma \quad \text{и} \quad \int f(X)\,d\sigma=f(X_1)D.$$

Примечание. Для справедливости равенства $f(X_1)=\mu$ существенно, что $\overline{D}$ является замкнутой областью, а не произвольной квадрируемой (кубируемой) фигурой. В самом деле, это равенство имеет место в силу теоремы о промежуточном значении непрерывной функции, но эта теорема верна в предположении, что $\overline{D}$ обладает свойством связности. Пусть, например, $\overline{D}$ состоит из двух единичных внешне расположенных квадратов $\overline{Q}_1$ и $\overline{Q}_2$ (черт. 204). Положим



Черт. 204.

$$f(X)=\begin{cases} 1 & (\text{если } X\in\overline{Q}_1),\\ -1 & (\text{если } X\in\overline{Q}_2).\end{cases}$$

Функция $f(X)$ непрерывна в $\overline{D}$, имеем:

$$\int\limits_D f(X)\,d\sigma=\int\limits_{Q_1} d\sigma-\int\limits_{Q_2} d\sigma=0$$

и

$$\int\limits_D f(X)\,d\sigma=\mu D=0\cdot 2.$$

Однако ни в какой точке $X\in D$ значения $f(X)$ не равно 0.

6°. Если функция $f(X)$ интегрируема в любой квадрируемой замкнутой области $\overline{D}$, содержащейся в данной области G, то $\int\limits_D f(X)\,d\sigma=U(\overline{D})$ есть функция области $\overline{D}$, обладающая следующими характеристическими свойствами:

I. $$U(\overline{D})=U(\overline{D}_1)+U(\overline{D}_2)+\ \ldots\ +U(\overline{D}_m)$$

при любом правильном разбиении области $\overline{D}$.

II. Если M_D и m_D — верхняя и нижняя грани $f(X)$ в $\overline{D}$, то

$$m_D D\leqslant U(D)\leqslant M_D D.$$

Необходимым и достаточным условием интегрируемости функции $f(X)$ в $\overline{D}$ является существование единственной функции области, определенной для любой квадрируемой области, содержащейся в $\overline{D}$ и обладающей свойствами I и II (см. том I, § 142).

§ 91. Повторные интегралы, распространенные на прямоугольник

Рассмотрим функцию $f(x, y)$, определенную в прямоугольнике $\overline{R}$ (замкнутом):

$$a \leqslant x \leqslant b, \quad c \leqslant y \leqslant d. \qquad (\overline{R})$$

Будем рассматривать $f(x, y)$ при произвольном данном значении x на сегменте $[a, b]$. Если функция $f(x, y)$, рассматриваемая как функция аргумента y при любом значении $x \in [a, b]$, интегрируема на сегменте $[c, d]$, то значение интеграла $\int_c^d f(x, y)\,dy$ определяется значением x, а потому этот интеграл есть функция $\Phi(x)$ на сегменте $a \leqslant x \leqslant b$:

$$\Phi(x) = \int_c^d f(x, y)\,dy.$$

Определение. *Если функция* $\Phi(x) = \int_c^d f(x, y)\,dy$ *интегрируема на сегменте* $[a, b]$, *то интеграл*

$$\int_a^b \Phi(x)\,dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\,dy$$

называется повторным интегралом функции $f(x, y)$, *распространенным на* $\overline{R}$ *при последовательном интегрировании по аргументу* y, *а затем по аргументу* x.

Если функция $\Psi(y) = \int_a^b f(x, y)\,dx$ *интегрируема на сегменте* $[c, d]$, *то интеграл*

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x, y)\,dx$$

называется повторным интегралом, распространенным на $\overline{R}$ *при последовательном интегрировании по аргументу* x, *а затем по аргументу* y.

Примеры.

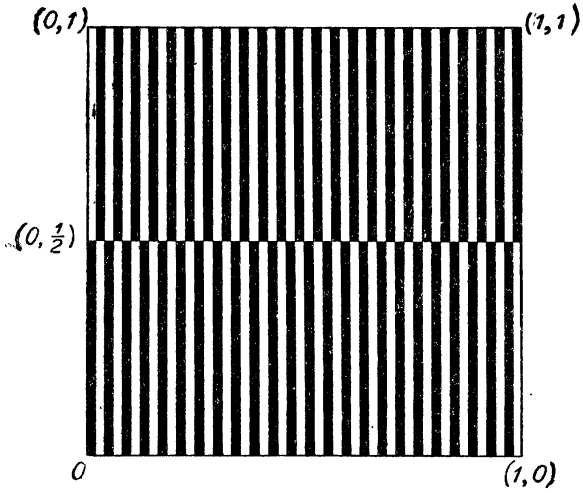
1. Вычислить оба повторные интеграла от функции (x^2+2y^2), распространенные на прямоугольник $0 \leqslant x \leqslant 2$, $-1 \leqslant y \leqslant 1$.

Находим:

$$I_{12} = \int_0^2 dx \int_{-1}^1 (x^2 + 2y^2)\,dy.$$

Вычисляем внутренний интеграл:

$$\int_{-1}^{1}(x^2+2y^2)\,dy=\left[x^2y+\frac{2}{3}y^3\right]_{y=-1}^{y=1}=\left(x^2+\frac{2}{3}\right)-\left(-x^2-\frac{2}{3}\right)=2x^2+\frac{4}{3}.$$



Черт. 205.

Следовательно,

$$I_{12}=\int_0^2\left(2x^2+\frac{4}{3}\right)dx=8.$$

Находим:

$$I_{21}=\int_{-1}^{1}dy\int_0^2(x^2+2y^2)\,dx.$$

Вычисления можно располагать так:

$$I_{21}=\int_{-1}^{1}dy\left[\frac{x^3}{3}+2y^2x\right]_{x=0}^{x=2}=$$

$$=\int_{-1}^{1}\left(\frac{8}{3}+4y^2\right)dy=8.$$

2. В квадрате

$$0\leqslant x\leqslant 1,\quad 0\leqslant y\leqslant 1$$

определим функцию $f(x, y)$ следующим законом соответствия: если x — рациональное число, то

$$f(x,y)=\begin{cases}1 & \left(\text{при } 0\leqslant y\leqslant\frac{1}{2}\right),\\ 0 & \left(\text{при } \frac{1}{2}<y\leqslant 1\right);\end{cases}$$

если x — иррациональное число, то

$$f(x,y)=\begin{cases}0 & \left(\text{при } 0\leqslant y<\frac{1}{2}\right),\\ 1 & \left(\text{при } \frac{1}{2}\leqslant y\leqslant 1\right)\end{cases}\text{ (черт. 205).}$$

При данном x имеем:

$$\int_0^1 f(x,y)\,dy=\int_0^{\frac{1}{2}}dy=\frac{1}{2},$$

если x — рациональное число, и

$$\int_0^1 f(x, y)\,dy = \int_{\frac{1}{2}}^1 dy = \frac{1}{2},$$

если x — иррациональное число. Значит,

$$\int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y)\,dy = \int_0^1 \frac{1}{2}\,dx = \frac{1}{2}.$$

Другой повторный интеграл не существует, так как ни при каком данном значении y функция $f(x, y)$ как функция аргумента x неинтегрируема и, значит, $\int_0^1 f(x, y)\,dx$ не существует.

Теорема. *Если функция $f(x, y)$ интегрируема в прямоугольнике $\bar{R}$ (т. е. существует двойной интеграл) и если при любом $x \in [a, b]$ существует интеграл $\int_c^d f(x, y)\,dy$, то существует повторный интеграл $\int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\,dy$; значения этого повторного и двойного интегралов равны:*

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\,dy = \iint_R f(x, y)\,dx\,dy.$$

Аналогичная теорема имеет место для другого повторного интеграла.

Доказательство. Докажем, что функция

$$\Phi(x) = \int_c^d f(x, y)\,dy$$

интегрируема на сегменте $[a, b]$.

Рассмотрим любое разбиение

$$\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n \qquad (\Delta x)$$

сегмента $[a, b]$, где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ и $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ — точки деления данного разбиения. Пусть ξ_i — любая точка ячейки Δx_i.

Преобразуем соответствующий член интегральной суммы $S_\Phi = \sum \Phi(\xi_i)\Delta x_i$ следующим образом:

$$\Phi(\xi_i)\Delta x_i = \Delta x_i \int_c^d f(\xi_i, y)\,dy = \Delta x_i \sum_{\Delta y_j} \int f(\xi_i, y)\,dy,$$

где

$$\Delta y_1,\ \Delta y_2,\ \ldots,\ \Delta y_j,\ \ldots,\ \Delta y_m \qquad (\Delta y)$$

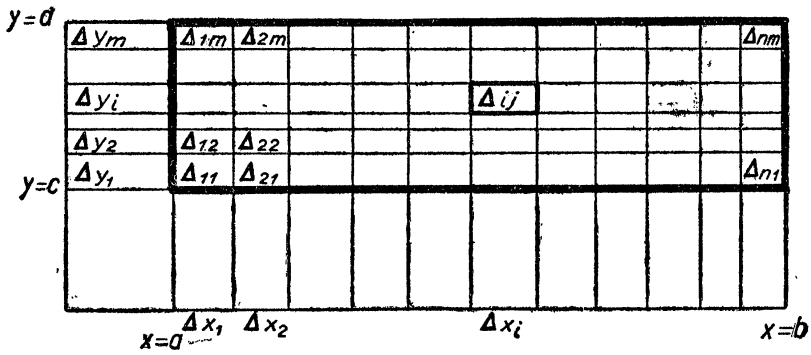
— произвольное разбиение сегмента $[c,\ d]$.

Разбиения (Δx) и (Δy) сторон прямоугольника $\bar{R}$ определяют разбиение $\bar{R}$ на nm прямоугольных ячеек Δ_{ij} (черт. 206):

$$x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i,\quad y_{j-1} \leqslant y \leqslant y_j. \qquad (\Delta x\,\Delta y)$$

По теореме о среднем значении имеем:

$$\int_{\Delta y_j} f(\xi_i,\ y)\,dy = \mu_{ij}\,\Delta y_j,$$



Черт. 206.

где μ_{ij} — некоторое число, заключенное между верхней и нижней гранями функции $f(\xi_i,\ y)$ на сегменте $y_{j-1} \leqslant y \leqslant y_j$. Следовательно, число μ_{ij} и подавно заключено между нижней и верхней гранями $f(x,\ y)$ во всей ячейке Δ_{ij}:

$$m_{ij} \leqslant \mu_{ij} \leqslant M_{ij}. \qquad (1)$$

Для интегральной суммы S_Φ получим выражение:

$$S_\Phi = \sum_{i=1}^{n} \Phi(\xi_i)\,\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \left(\sum_{j=1}^{m} \mu_{ij}\,\Delta y_j \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \mu_{ij}\,\Delta x_i\,\Delta y_j = \sum \mu_{ij}\,\Delta x_i\,\Delta y_j,$$

где суммирование распространяется на все ячейки разбиения прямоугольника R. В силу неравенства (1) имеем:

$$\sum m_{ij}\,\Delta x_i\,\Delta y_j \leqslant S_\Phi \leqslant \sum M_{ij}\,\Delta x_i\,\Delta y_j;$$

но суммы $\sum m_{ij}\,\Delta x_i\,\Delta y_j$ и $\sum M_{ij}\,\Delta x_i\,\Delta y_j$ суть нижняя и верхняя суммы $\underline{S}_f$ и $\bar{S}_f$, составленные для функции $f(x,\ y)$ при рассматриваемом раз-

биении $(\Delta x\,\Delta y)$ прямоугольника $\overline{R}$. В силу предположенной интегрируемости функции $f(x, y)$ интегральные суммы $\underline{S}_f$ и $\overline{S}_f$ имеют общий предел, равный двойному интегралу от $f(x, y)$, распространенному на прямоугольник $\overline{R}$. Следовательно, сумма S_Φ, заключенная между $\underline{S}_f$ и $\overline{S}_f$, имеет тот же предел, как и эти суммы. Значит, $\lim S_\Phi$ существует, т. е. функция $\Phi(x)$ интегрируема: $\lim S_\Phi = \lim \underline{S}_f = \lim \overline{S}_f$, т. е.

$$\int_a^b \Phi(x)\,dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\,dy = \int\int_R f(x, y)\,dx\,dy, \text{ ч. т. д.}$$

Примечание. Теорема остается в силе, если ограниченная функция $f(x, y)$ интегрируема в $\overline{R}$, а интеграл $\int_c^d f(x, y)\,dy$ существует, за исключением конечного множества значений x. В этом случае функция $\Phi(x)$ ограничена:

$$|\Phi(x)| \leqslant \int_c^d |f(x, y)|\,dy < M(d-c)$$

(где $|f(x, y)| < M$), и определена всюду на $[a, b]$, за исключением конечного множества точек, что не оказывает влияния на окончательные результаты (так как ячейки Δx_i, содержащие эти точки, дадут в интегральной сумме S_Φ как угодно малый привзнос).

Следствие I. Если $f(x, y)$ интегрируема в $\overline{R}$ и если существуют интегралы $\int_a^b f(x, y)\,dx$ и $\int_c^d f(x, y)\,dy$, то оба повторные интеграла и двойной интеграл на $\overline{R}$ равны:

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\,dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)\,dx = \int\int_R f(x, y)\,dx\,dy.$$

Кратко говорят, что *значение повторного интеграла (распространенного на прямоугольник) не зависит от порядка интегрирования по различным аргументам.*

Следствие II. Если ограниченная функция $f(x, y)$ непрерывна в прямоугольнике $\overline{R}$, за исключением, быть может, конечного множества простых дуг $L_1, L_2, \ldots, L_k$, пересекающихся (каждая) с любой параллелью оси OY не более чем в одной точке, и конечного множества отрезков, параллельных оси OY (черт. 207), то

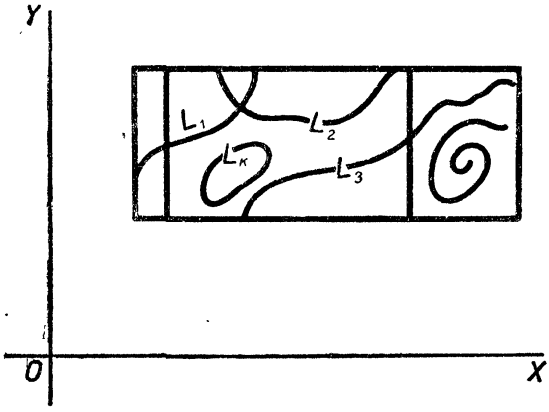
$$\int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\,dy = \int\int f(x, y)\,dx\,dy.$$

В самом деле:

1°. Каждая из дуг $L_1, L_2, \ldots, L_k$ есть график некоторой непрерывной функции, а потому имеет площадь, равную нулю.

2°. Функция $f(x, y)$ интегрируема в $\bar{R}$, так как множество точек ее разрыва имеет площадь, равную нулю (это множество может состоять лишь из конечного числа дуг $L_1, L_2, \ldots, L_k$ и конечного числа отрезков, параллельных оси OY).

3°. Интеграл $\int_c^d f(x, y)\,dy$ существует (за исключением, быть может, конечного множества значений x), так как функция $f(x, y)$ (при данном x) на сегменте $c \leqslant y \leqslant d$ может иметь лишь конечное множество точек разрыва (это точки пересечения соответствующей параллели оси OY с линиями разрыва). Исключение могут представлять лишь те значения x (в конечном числе), для которых отрезок соответствующей параллели оси OY есть линия разрыва.



Черт. 207.

Если множество точек разрыва ограниченной функции $f(x, y)$ состоит из конечного числа отрезков, параллельных координатным осям, и конечного числа дуг, каждая из которых пересекается с каждой параллелью оси OX, а также оси OY не более чем в одной точке, то оба повторные интеграла равны двойному интегралу, распространенному на $\bar{R}$.

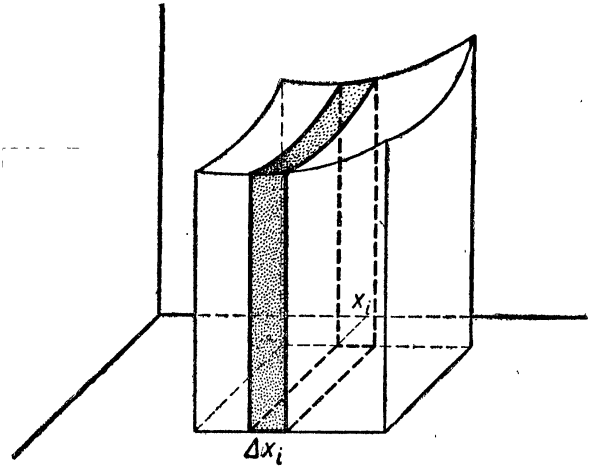
Геометрическая интерпретация. Предположим, что функция $f(x, y)$ непрерывна и положительна в прямоугольнике $\bar{R}$. Двойной интеграл $\iint_{\bar{R}} f(x, y)\,dx\,dy$ есть объем цилиндрического тела с основанием $\bar{R}$ и ограниченного сверху простым куском поверхности $z = f(x, y)$. Интеграл $\Phi(x_i) = \int_c^d f(x_i, y)\,dy$ есть площадь сечения цилиндрического тела плоскостью $x = x_i$. Произведение

$$\Phi(x_i)\,\Delta x_i = \Delta x_i \int_c^d f(x_i, y)\,dy$$

есть объем цилиндрического — «поперечного» — слоя с площадью основания $\Phi(x_i)$ и с высотой Δx_i (черт. 208); интегральная сумма

$S_\Phi = \sum \Phi(x_i)\Delta x_i$ есть сумма объемов всех этих слоев при данном разбиении тела плоскостями, параллельными плоскости (y, z).

Предел интегральных сумм $\lim S_\Phi$ есть повторный интеграл, равный двойному, т. е. объему цилиндрического тела. Следовательно, объем цилиндрического тела можно получить, если разбить это тело на слои системой параллельных плоскостей, вычислить приближенно объем каждого слоя как произведение площади основания на высоту и найти предел суммы приближенных значений объемов всех этих слоев.



Черт. 208.

Примеры.

1. Вычислить оба повторные интеграла от функции $\dfrac{1}{(2x+y+1)^2}$, распространенные на прямоугольник $0 \leqslant x \leqslant 4, 0 \leqslant y \leqslant 1$.

Вычисляем интеграл $I_{12} = \int\limits_0^4 dx \int\limits_0^1 \dfrac{1}{(2x+y+1)^2} dy$.

Находим внутренний интеграл:

$$\int\limits_0^1 \frac{1}{(2x+y+1)^2} dy = \left[-\frac{1}{2x+y+1}\right]_{y=0}^{y=1} = -\frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{2x+1}.$$

Следовательно,

$$I_{12} = \int\limits_0^4 -\frac{dx}{2(x+1)} + \int\limits_0^4 \frac{dx}{2x+1} = -\frac{1}{2}[\ln(x+1)]_0^4 + \frac{1}{2}[\ln(2x+1)]_0^4 = \frac{1}{2}\ln\frac{9}{5}.$$

Вычисляем другой повторный интеграл:

$$I_{21} = \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^4 \frac{1}{(2x+y+1)^2} dx;$$

имеем:

$$\int\limits_0^4 \frac{dx}{(2x+y+1)^2} = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2x+y+1}\right]_{x=0}^{x=4} = -\frac{1}{2(y+9)} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{y+1}.$$

Следовательно,

$$I_{21}=-\int_0^1\frac{dy}{2(y+9)}+\frac{1}{2}\int_0^1\frac{dy}{y+1}=-\frac{1}{2}[\ln(y+9)]_0^1+\frac{1}{2}[\ln(y+1)]_0^1=$$

$$=-\frac{1}{2}\ln 10+\frac{1}{2}\ln 9+\frac{1}{2}\ln 2=\frac{1}{2}\ln\frac{9}{5}.$$

Так как подинтегральная функция непрерывна в рассматриваемом прямоугольнике, то общее значение обоих повторных интегралов равно значению двойного интеграла.

2. Вычислить двойной интеграл $I=\iint\limits_Q\frac{y\,dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$, распространенный на квадрат $0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant 1$.

Подинтегральная функция непрерывна, поэтому двойной интеграл может быть вычислен посредством любого из повторных. С точки зрения простоты вычислений удобнее внутреннюю интеграцию выполнить по аргументу y:

$$I=\int_0^1 dx\int_0^1(1+x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}\,y\,dy.$$

Имеем:

$$\int_0^1(1+x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}\,y\,dy=-\left[\frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\right]_{y=0}^{y=1}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{1}{\sqrt{2+x^2}}.$$

Следовательно,

$$I=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}-\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{2+x^2}}=\ln(1+\sqrt{2})-\ln(1+\sqrt{3})+\ln\sqrt{2}=$$

$$=\ln\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}.$$

3. Вычислить оба повторные интеграла от функции $\frac{x-y}{(x+y)^3}$, распространенные на квадрат $0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant 1$.

Имеем:

$$I_{12}=\int_0^1 dx\int_0^1\frac{x-y}{(x+y)^3}\,dy=\int_0^1 dx\int_0^1\left(\frac{2x}{(x+y)^3}-\frac{1}{(x+y)^2}\right)dy=$$

$$=\int_0^1 dx\left[\frac{y}{(x+y)^2}\right]_{y=0}^{y=1}=\int_0^1\frac{dx}{(x+1)^2}=\frac{1}{2}.$$

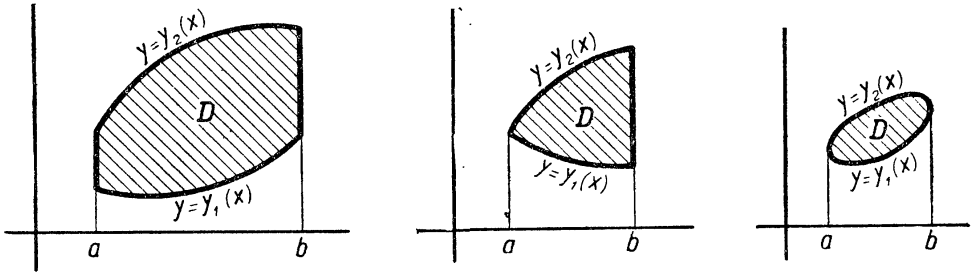
Вычисляя другой повторный интеграл, получим:

$$I_{12}=\int_0^1 dy\int_0^1\frac{x-y}{(x+y)^3}\,dx=\int_0^1 dy\left[\frac{-x}{(x+y)^2}\right]_{x=0}^{x=1}=-\frac{1}{2}.$$

Получились различные значения для обоих повторных интегралов, но в данном примере подинтегральная функция неограничена в окрестности точки O (0, 0) и не является интегрируемой в рассматриваемом квадрате.

§ 92. Вычисление кратных интегралов посредством повторных

Рассмотрим замкнутую область $\bar{D}$, ограниченную снизу линией $y = y_1(x)$, сверху линией $y = y_2(x)$, с боков параллелями оси ординат $x = a$ и $x = b$, где функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ непрерывны на сегменте $[a, b]$ (черт. 209). Замкнутая область $\bar{D}$, будучи ограниченной четырьмя дугами: нижней $y = y_1(x)$, верхней $y = y_2(x)$ и боковыми



Черт. 209.

прямолинейными отрезками, квадрируема, так как каждая из дуг, входящих в состав границы, имеет площадь, равную нулю. Заметим, что боковые отрезки могут (один или оба) выродиться в точку, так будет, если верхняя и нижняя дуги имеют общие концы (один или оба). Рассмотрим любые два числа c и d, взятые при условии

$$c < y_1(x) \leqslant y_2(x) < d.$$

Прямоугольник

$$a \leqslant x \leqslant b, \quad c \leqslant y \leqslant d \qquad (\bar{R})$$

можно разбить на три квадрируемые замкнутые области:

I. Замкнутая область $\bar{D}_1$:

$$a \leqslant x \leqslant b, \quad c \leqslant y \leqslant y_1(x).$$

II. Замкнутая область $\bar{D}$:

$$a \leqslant x \leqslant b, \quad y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x).$$

III. Замкнутая область $\bar{D}_2$:

$$a \leqslant x \leqslant b, \quad y_2(x) \leqslant y \leqslant d \quad \text{(черт. 210)}.$$

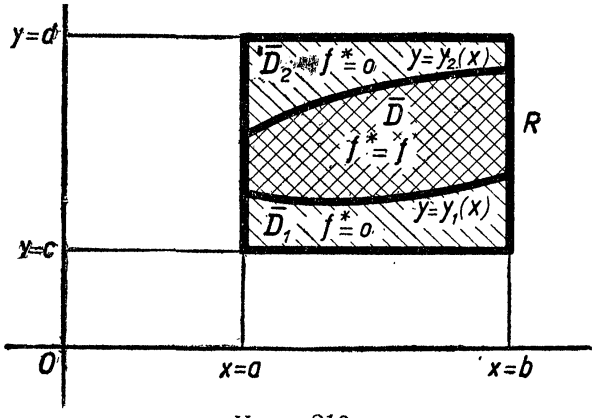
Имеем: $\bar{R} = \bar{D}_1 + \bar{D} + \bar{D}_2$.

Пусть $f(X) = f(x, y)$ — функция, интегрируемая в замкнутой области $\bar{D}$. Рассмотрим функцию $f^*(X)$, определенную в R следующим законом соответствия:

$$f^*(X)=\begin{cases} 0 & (\text{если } X(x,\ y)\in D_1),\\ f(X) & (\text{если } X(x,\ y)\in D),\\ 0 & (\text{если } X(x,\ y)\in \bar{D}_2). \end{cases}$$

Функция $f^*(X)$ интегрируема в D_1 и D_2, так как она постоянна в этих частях. В области $\bar{D}$ функция $f^*(X)$ также интегрируема, так как при $X\in\bar{D}$ она равна функции $f(X)$. Следовательно, $f^*(X)$ интегрируема в R и

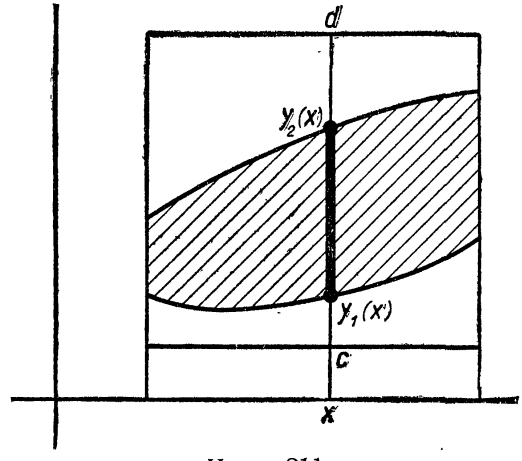
$$\int\int_R f^*(X)\,d\sigma=\int\int_{D_1}+\int\int_D+\int\int_{D_2}=\int\int_D f(X)\,d\sigma.$$



Черт. 210.

Предположим, что при любом данном значении $x\in[a,\ b]$ (за исключением, быть может, конечного множества значений x) существует интеграл $\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,\ y)\,dy$ на отрезке $[y_1(x),\ y_2(x)]$, отсекаемом верхней и нижней граничными линиями на соответствующей параллели оси OY (черт. 211). Сегмент $[c,\ d]$ можно разбить на три части: $[c,\ y_1]$, $[y_1,\ y_2]$ и $[y_2,\ d]$, на каждой из которых функция $f^*(X)$ интегрируема по y. Следовательно, при любом $x\in[a,\ b]$ (за исключением, быть может, конечного множества значений x) существует интеграл

$$\int_c^d f^*(x,\ y)\,dy=\int_c^{y_1(x)}+\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}+\int_{y_2(x)}^{d}=\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,\ y)\,dy.$$



Черт. 211.

Из интегрируемости функции f^* и из существования интеграла $\int\limits_c^d f^*(x,\ y)\,dy$ следует равенство двойного и соответствующего повтор-

ного интегралов:

$$\iint\limits_R f^*\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^a f^*\,dy.$$

Откуда найдем:

$$\iint\limits_D f(x,\ y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,\ y)\,dy.$$

Аналогично устанавливается формула

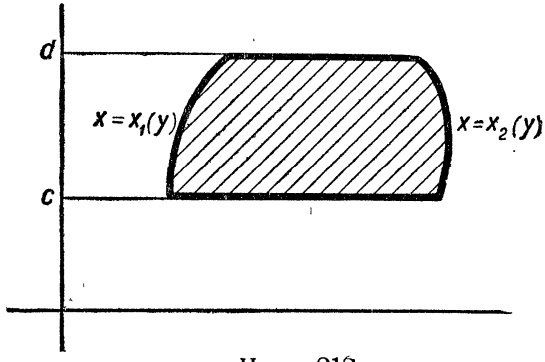
$$\iint\limits_D f(x,\ y)\,dx\,dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,\ y)\,dx$$

в предположении, что функция f интегрируема в области $\bar{D}$, ограниченной линиями

$$x = x_1(y),\quad x = x_2(y) \text{ и } y = c,\quad y = d \quad \text{(черт. 212)},$$

и что внутренний интеграл в правой части равенства существует.

Установленная связь между двойными и повторными интегралами позволяет в большинстве встречающихся в приложениях случаев свести вычисление двойного интеграла к вычислению повторного. Вычисление же повторного интеграла сводится к последовательному интегрированию функции одного аргумента.



Черт. 212.

Отсюда правило: *если область интеграции может быть задана неравенствами* $y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, *то для вычисления двойного интеграла достаточно последовательно выполнить две интеграции: внутреннюю по аргументу* y *в пределах от* $y_1(x)$ *до* $y_2(x)$, *а затем внешнюю по аргументу* x *в пределах от* a *до* b. Аналогично, *если область интеграции может быть задана неравенствами*

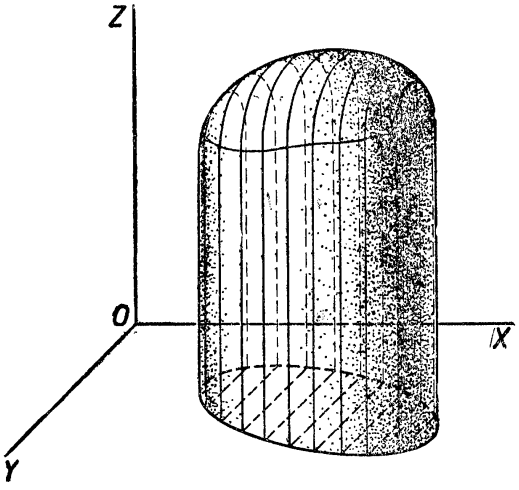
$$x_1(y) \leqslant x \leqslant x_2(y),\quad c \leqslant y \leqslant d,$$

то для вычисления двойного интеграла достаточно последовательно выполнить внутреннюю интеграцию по аргументу x *в пределах от* $x_1(y)$ *до* $x_2(y)$, *а затем внешнюю по аргументу* y *в пределах от* c *до* d.

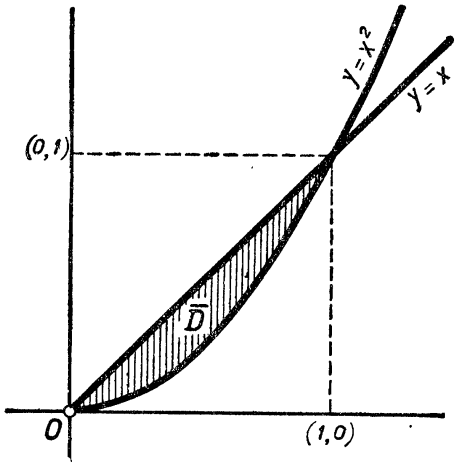
Геометрическая интерпретация. Интеграл $\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\,dy = S(x)$ при данном значении x есть площадь сечения цилиндрического тела плоскостью, параллельной плоскости (y, z) (черт. 213). Равенство

$$\int_a^b S(x)\,dx = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\,dy = \iint_D f(x, y)\,dx\,dy$$

показывает, что объем цилиндрического тела можно рассматривать как предел суммы объемов слоев, полученных при разбиении данного тела



Черт. 213.



Черт. 214.

системой параллельных плоскостей. При этом объем каждого слоя вычисляется приближенно, как будто бы это был цилиндрический слой.

Примеры.

1. Вычислить $\iint\limits_{\bar{D}} xy\,dx\,dy$, где $\bar{D}$ — замкнутая область, ограниченная сверху прямой $y = x$ и снизу параболой $y = x^2$ (черт. 214). Прямая и парабола пересекаются в точках (0, 0) и (1, 1). Замкнутая область $\bar{D}$ может быть задана следующими неравенствами: $x^2 \leqslant y \leqslant x$, $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Вычисление интеграла посредством повторного располагается следующим образом

$$\iint_{\bar{D}} xy\,dx\,dy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} xy\,dy = \int_0^1 x\,dx \int_{x^2}^{x} y\,dy = \int_0^1 x \left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=x^2}^{y=x} dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 x(x^2 - x^4)\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 - \frac{1}{2}\left[\frac{x^6}{6}\right]_0^1 = \frac{1}{24}.$$

Можно переменить порядок интеграции, задав данную замкнутую область при помощи неравенств: $y \leqslant x \leqslant \sqrt{y}$; $0 \leqslant y \leqslant 1$.

В соответствии с этим вычисления расположатся так:

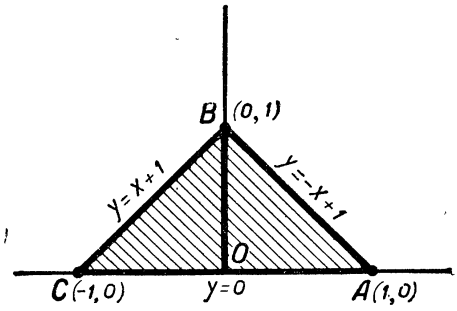
$$\iint\limits_D xy\,dx\,dy = \int\limits_0^1 y\,dy \int\limits_y^{\sqrt{y}} x\,dx = \int\limits_0^1 y\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=y}^{x=\sqrt{y}} dy = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 y\,(y-y^2)\,dy = \frac{1}{24}.$$

2. Вычислить интеграл $\iint\limits_D (x^2+y^2)\,dx\,dy$, распространенный на треугольник, ограниченный прямыми $y=0$, $y=-x+1$, $y=x+1$ (черт. 215). В данном случае удобнее внутреннюю интеграцию производить по x, а внешнюю по y. Вершины треугольника суть $(-1, 0)$, $(0, 1)$ и $(1, 0)$. Решив относительно x уравнения боковых сторон треугольника, зададим область интеграции при помощи неравенств:

$$y-1 \leqslant x \leqslant -y+1; \quad 0 \leqslant y \leqslant 1,$$

откуда

$$\iint\limits_D (x^2+y^2)\,dx\,dy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{y-1}^{-y+1} (x^2+y^2)\,dx.$$



Черт. 215.

Вычисляем внутренний интеграл:

$$\int\limits_{y-1}^{-y+1} (x^2+y^2)\,dx = \left[\frac{x^3}{3}+y^2x\right]_{x=y-1}^{x=-y+1} = \frac{(-y+1)^3}{3}+y^2(-y+1)-$$

$$-\frac{(y-1)^3}{3}-y^2(y-1) = -\frac{2}{3}(y-1)^3-2y^3+2y^2,$$

откуда окончательно:

$$\iint\limits_D (x^2+y^2)\,dx\,dy = -\frac{2}{3}\int\limits_0^1 (y-1)^3\,dy - 2\int\limits_0^1 y^3\,dy + 2\int\limits_0^1 y^2\,dy =$$

$$= -\frac{1}{6}\left[(y-1)^4\right]_0^1 - \frac{1}{2}\left[y^4\right]_0^1 + \frac{2}{3}\left[y^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Вычислим данный интеграл, изменив порядок интеграции. Ломаная линия, ограничивающая треугольник сверху, может быть задана двумя различными уравнениями на сегменте $-1 \leqslant x \leqslant 1$:

$y=x+1$ (если $-1 \leqslant x \leqslant 0$) и $y=-x+1$ (если $0 \leqslant x \leqslant 1$).

Поэтому для сведения двойного интеграла к повторному надо разбить область интеграции на две части: $\triangle AOB$ и $\triangle OBC$, в соответствии с чем интеграл представится в виде суммы двух интегралов, и вычисления расположатся следующим образом:

$$\iint\limits_D (x^2+y^2)\,dx\,dy = \iint\limits_{\triangle AOB} (x^2+y^2)\,dx\,dy + \iint\limits_{\triangle OBC} (x^2+y^2)\,dx\,dy =$$

$$= \int_{-1}^{0} dx \int_{0}^{x+1} (x^2+y^2)\,dy + \int_{0}^{1} dx \int_{0}^{-x+1} (x^2+y^2)\,dy =$$

$$= \int_{-1}^{0} \left[x^2y + \frac{y^3}{3}\right]_{y=0}^{y=x+1} dx + \int_{0}^{1} \left[x^2y + \frac{y^3}{3}\right]_{y=0}^{y=-x+1} dx =$$

$$= \int_{-1}^{0} \left[x^3 + x^2 + \frac{(x+1)^3}{3}\right] dx + \int_{0}^{1} \left[-x^3 + x^2 + \frac{(-x+1)^3}{3}\right] dx =$$

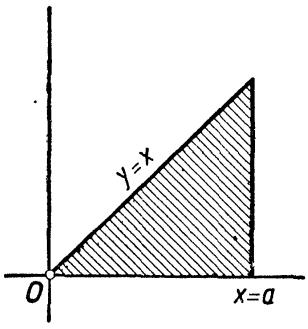
$$= \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{(x+1)^4}{12}\right]_{-1}^{0} + \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{(-x+1)^4}{12}\right]_{0}^{1} = \frac{1}{3}.$$

3. Изменить порядок интеграции в следующих интегралах (подинтегральная функция предполагается непрерывной в соответствующей области):

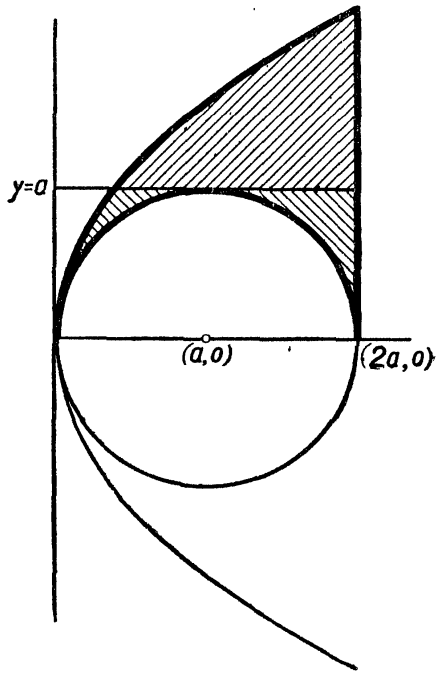
а) $$\int_{0}^{a} dx \int_{0}^{x} f(x,\ y)\,dy,$$

область интеграции есть треугольник (черт. 216)

$$0 \leqslant y \leqslant x, \quad 0 \leqslant x \leqslant a,$$



Черт. 216.



Черт. 217.

который может быть задан неравенствами $y \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant a$; следовательно,

$$\int_{0}^{a} dx \int_{0}^{x} f(x,\ y)\,dy = \int_{0}^{a} dy \int_{y}^{a} f(x,\ y)\,dx.$$

b) $$\int_{0}^{2a} dx \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x,\ y)\,dy,$$

область интеграции ограничена снизу линией $y = \sqrt{2ax - x^2}$, т. е. верхней полуокружностью $x^2 + y^2 - 2ax = 0$, сверху параболой $y^2 = 2ax$ и справа прямой $x = 2a$ (черт. 217). Чтобы изменить порядок интегрирований, разобьем

область интеграции на три части:

$$\frac{y^2}{2a} \leqslant x \leqslant a - \sqrt{a^2 - y^2}, \quad 0 \leqslant y \leqslant a, \qquad (\overline{D}_1)$$

$$\frac{y^2}{2a} \leqslant x \leqslant 2a, \quad a \leqslant y \leqslant 2a, \qquad (\overline{D}_2)$$

$$a + \sqrt{a^2 - y^2} \leqslant x \leqslant 2a, \quad 0 \leqslant y \leqslant a. \qquad (\overline{D}_3)$$

Следовательно:

$$\int_0^{2a} dx \int_{\sqrt{2ax - x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x, y)\, dy = \int_0^{a} dy \int_{\frac{y^2}{2a}}^{a - \sqrt{a^2 - y^2}} f(x, y)\, dx +$$

$$+ \int_a^{2a} dy \int_{\frac{y^2}{2a}}^{2a} f(x, y)\, dx + \int_0^{a} dy \int_{a + \sqrt{a^2 - y^2}}^{2a} f(x, y)\, dx.$$

4. Вычислить объем эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ посредством двойного интеграла. В силу симметрии фигуры достаточно вычислить объем части, лежащей в первом октанте. Из уравнения поверхности находим: $z = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$. Следовательно, $\frac{V}{8} = c \iint\limits_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\, dx\, dy$, где $\overline{D}$ есть замкнутая область, ограниченная осями координат и дугой эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. В первом квадранте $0 \leqslant y \leqslant \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, $0 \leqslant x \leqslant a$; имеем

$$V = 8c \int_0^{a} dx \int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\, dy.$$

Вычисляем внутренний интеграл *:

$$\frac{1}{b} \int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}} \sqrt{\frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) - y^2}\, dy = \frac{1}{b}\left[\frac{b^2(a^2 - x^2)}{2a^2} \arcsin \frac{ay}{b\sqrt{a^2 - x^2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{y\sqrt{\frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) - y^2}}{2}\right]_{y=0}^{y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{\pi b (a^2 - x^2)}{4a^2}.$$

И окончательно:

$$V = \frac{2\pi bc}{a^2} \int_0^{a} (a^2 - x^2)\, dx = \frac{2\pi bc}{a^2}\left[a^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_0^{a} = \frac{4\pi}{3} abc.$$

---

* Следует воспользоваться формулой:

$$\int \sqrt{a^2 - z^2}\, dz = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{z}{a} + \frac{z\sqrt{a^2 - z^2}}{2} + C.$$

Для функций с числом аргументов большим двух можно рассматривать различные повторные интегралы. Пусть, например, $f(x, y, z)$—функция, интегрируемая в прямоугольном параллелепипеде:

$$a_1 \leqslant x \leqslant b_1, \quad a_2 \leqslant b \leqslant b_2, \quad a_3 \leqslant z \leqslant b_3, \qquad (\overline{R})$$

и R_{xy}, R_{yz}, R_{xz} — проекции этого параллелепипеда на соответствующие координатные плоскости. Примерами различных повторных интегралов могут служить:

$$\iint\limits_{R_{xy}} dx\,dy \int\limits_{a_3}^{b_3} f\,dz; \qquad \int\limits_{a_1}^{b_1} dx \iint\limits_{R_{yz}} f\,dy\,dz; \qquad \int\limits_{a_2}^{b_2} dy \iint\limits_{R_{xz}} f\,dx\,dz;$$

$$\int\limits_{a_1}^{b_1} dx \int\limits_{a_2}^{b_2} dy \int\limits_{a_3}^{b_3} f\,dz \quad \text{и т. д.}$$

Остановимся для определенности на первом интеграле. Нетрудно доказать, что если существует внутренний интеграл $\int\limits_{a_3}^{b_3} f(x, y, z)\,dz$, то рассматриваемый повторный интеграл равен тройному. Доказательство аналогично соответствующему доказательству для случая двойного интеграла:

1°. Положим в R_{xy}

$$\Phi(x, y) = \int\limits_{a_3}^{b_3} f(x, y, z)\,dz.$$

2°. Составим интегральную сумму

$$S_\Phi = \sum \Phi(\xi, \eta_i)\,\sigma_i = \sum \sigma_i \int\limits_{a_3}^{b_3} f(\xi_i, \eta_i, z)\,dz = \sum \sigma_i \left(\sum_{\Delta z_k} \int f(\xi_i, \eta_i, z)\,dz \right),$$

где (σ) — разбиение прямоугольника R_{xy}, а (Δz) — произвольное разбиение сегмента $[a_3, b_3]$. Применив теорему о среднем значении, преобразуем S_Φ следующим образом:

$$S_\Phi = \sum \sigma_i \left(\sum \mu_{ik}\,\Delta z_k \right) = \sum\sum \mu_{ik}\sigma_i\,\Delta z_k.$$

Параллелепипед R разбился на ячейки с основаниями σ_i и с высотами Δz_k.

3°. Произведение $\sigma_i \Delta z_k$ есть объем ячейки Δv_{ik} с основанием σ_i и с высотой Δz_k. Пусть $M_{ik} = \sup f$ и $m_{ik} = \inf f$ в этой ячейке; из неравенств $m_{ik} \leqslant \mu_{ik} \leqslant M_{ik}$ следует, что сумма S_Φ заключена между верхней и нижней суммами функции $f(x, y, z)$, а потому имеет общий предел с этими последними суммами, равный тройному интегралу:

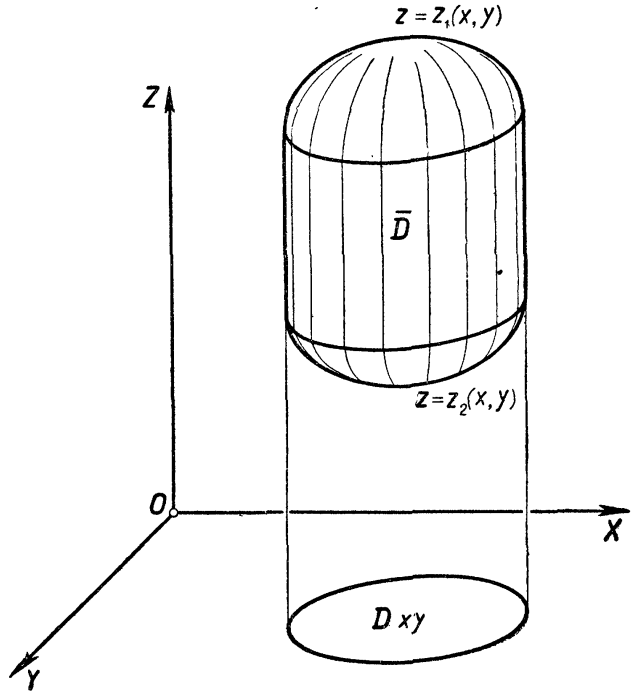
$$\lim S_\Phi = \iiint\limits_R f(X)\,dv.$$

Для вычисления повторного интеграла $\iint\limits_{R_{xy}} dx\,dy \int\limits_{a_3}^{b_3} f\,dz$ (в предположении существования соответствующих интегралов) можно внешнюю интеграцию выполнить посредством повторного интегрирования по аргументам x и y, например так:

$$\int\limits_{a_1}^{b_1} dx \int\limits_{a_2}^{b_2} dy \int\limits_{a_3}^{b_3} f\,dz.$$

Для функции, непрерывной в $\overline{R}$, значения всех повторных интегралов и тройного интеграла равны.

Равенство значений повторного и тройного интегралов имеет место и для функции, ограниченной и непрерывной в $\overline{R}$, за исключением множества, состоящего из конечного числа поверхностей, линий и точек и имеющего объем, равный нулю.



Черт. 218.

Рассмотрим замкнутую область $\overline{D}$, ограниченную снизу и сверху поверхностями $z = z_1(x, y)$ и $z = z_2(x, y)$ (черт. 218), а с боков цилиндрической поверхности с образующими, параллельными оси OZ. Предположим, что проекция $\overline{D}_{xy}$ замкнутой области $\overline{D}$ на плоскость (x, y) квадрируема. Вычисление тройного интеграла может быть сведено к вычислению повторного (при условии существования этих интегралов) следующим образом. Заключим замкнутую область $\overline{D}$ внутрь достаточно большого параллелепипеда $\overline{R}$ с гранями, параллельными координатным плоскостям, и положим $f^* = f$ в $\overline{D}$ и $f^* = 0$ в оставшейся части $\overline{R} - \overline{D}$ параллелепипеда; тогда имеем:

$$\iiint\limits_D f\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_R f^*\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{R_{xy}} dx\,dy \int\limits_{a_3}^{b_3} f^*\,dz =$$

$$= \iint\limits_{D_{xy}} dx\,dy \int\limits_{z_1(x,\,y)}^{z_2(x,\,y)} f\,dz.$$

Если замкнутая область $\bar{D}_{xy}$ может быть задана посредством неравенств $a \leqslant x \leqslant b$, $y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x)$, то возможно внешнюю интеграцию свести к повторному интегрированию по аргументам y и x:

$$\iiint_D f\,dx\,dy\,dz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,\,y)}^{z_2(x,\,y)} f\,dz.$$

Эта формула представляет тройной интеграл в виде повторного с последовательным трехкратным интегрированием.

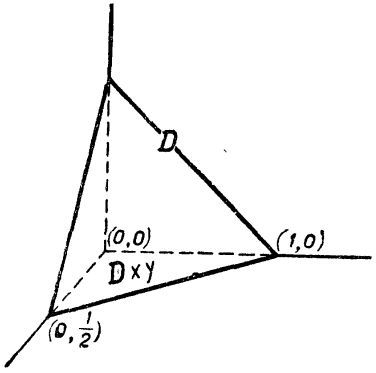
Примеры.

1. Вычислить интеграл

$$I = \iiint_D x\,dx\,dy\,dz,$$

где $\bar{D}$ — тетраэдр, ограниченный координатными плоскостями и плоскостью $x + 2y + z = 1$. Тетраэдр $\bar{D}$ ограничен снизу треугольником D_{xy}, лежащим в плоскости (x, y), уравнения его сторон суть $x = 0$, $y = 0$ и $x + 2y = 1$, а координаты вершин (0, 0), (1, 0) и $\left(0, \frac{1}{2}\right)$; сверху тетраэдр ограничен плоскостью

$$z = 1 - x - 2y$$ (черт. 219).



Черт. 219.

Выполняя первое интегрирование по z, второе по y и третье по x, получим:

$$I = \iint_{D_{xy}} dx\,dy \int_0^{1-x-2y} x\,dz = \int_0^1 x\,dx \int_0^{\frac{1-x}{2}} dy \int_0^{1-x-2y} dz.$$

Вычисляем внутренний интеграл:

$$\int_0^{1-x-2y} dz = [z]_{z=0}^{z=1-x-2y} = 1 - x - 2y.$$

Следовательно,

$$I = \int_0^1 x\,dx \int_0^{\frac{1-x}{2}} (1 - x - 2y)\,dy = \int_0^1 x\,dx\,[y - xy - y^2]_{y=0}^{y=\frac{1-x}{2}} =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^1 (x - 2x^2 + x^3)\,dx = \frac{1}{48}.$$

Представим данный интеграл в виде повторного при выполнении первой интеграции по x, второй по z, а третий по y.

Проекция тетраэдра $\bar{D}$ на плоскость (y, z) есть треугольник D_{yz} со сторонами $2y+z=1$, $y=0$, $z=0$.

Из уравнения плоскости находим пределы для x:

$$0 \leqslant x \leqslant 1-2y-z;$$

поэтому

$$I = \int\limits_{D_{yz}} \int dy\, dz \int\limits_0^{1-2y-z} x\, dx.$$

Треугольник $\bar{D}_{yz}$ в плоскости (y, z) может быть задан неравенствами

$$0 \leqslant z \leqslant 1-2y,\ 0 \leqslant y \leqslant \frac{1}{2},$$

а поэтому

$$I = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} dy \int\limits_0^{1-2y} dz \int\limits_0^{1-2y-z} x\, dx.$$

2. $$I = \int\limits_D \int \int (x^2+y^2+z^2)\, dx\, dy\, dz,$$

где $\bar{D}$ есть эллипсоид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \leqslant 1$.

Разобьем интеграл на три интеграла:

$$I = \int\limits_D \int \int x^2\, dx\, dy\, dz + \int\limits_D \int \int y^2\, dx\, dy\, dz + \int\limits_D \int \int z^2\, dx\, dy\, dz.$$

Вычислим один из этих интегралов, например третий. Представим этот интеграл в виде повторного:

$$I_3 = \int\limits_{-c}^{c} dz \int\limits_{D_z} \int z^2\, dx\, dy = \int\limits_{-c}^{c} z^2\, dz \int\limits_{D_z} \int dx\, dy,$$

где D_z — область, ограниченная эллипсом, по которому плоскость, параллельная плоскости (x, y) (при данном значении z), пересекает эллипсоид. Интеграл $\int\limits_{D_z} \int dx\, dy$ есть площадь сечения эллипсоида плоскостью, параллельной (x, y), т. е. площадь эллипса

$$\frac{x^2}{a^2\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)}+\frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)}=1.$$

Следовательно:

$$\int\limits_{D_z} \int dx\, dy = \pi ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right),$$

откуда

$$I_3 = \pi ab \int_{-c}^{c} \left(z^2 - \frac{z^4}{c^2}\right) dz = 2\pi ab \left[\frac{z^3}{3} - \frac{z^5}{5c^2}\right]_0^c = \frac{4\pi abc^3}{15}.$$

Аналогично вычисляются два первых интеграла. Складывая эти интегралы, получим:

$$I = \frac{4\pi abc}{15}(a^2 + b^2 + c^2).$$

§ 93. Интегрирование подстановкой

Рассмотрим отображение

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \tag{F}$$

регулярное в некоторой области G_{uv} плоскости (u, v) и взаимно однозначно отображающее эту область на область G_{xy} плоскости (x, y). Пусть $T_0(u_0, v_0)$ — произвольная начальная точка в области G_{uv}, а $X_0(x_0, y_0)$ — соответствующая начальная точка плоскости (x, y).

Определение. *Дифференциалом отображения* (F) *в начальной точке* (u_0, v_0) *называется линейное отображение*

$$\begin{aligned} x^* - x_0 &= x_u^{(0)} \cdot (u - u_0) + x_v^{(0)} \cdot (v - v_0); \\ y^* - y_0 &= y_u^{(0)} \cdot (u - u_0) + y_v^{(0)} \cdot (v - x_0), \end{aligned} \tag{dF}$$

где $x_u^{(0)}$, $x_v^{(0)}$, $y_u^{(0)}$, $y_v^{(0)}$ — *значения соответствующих производных в начальной точке.*

В силу регулярности отображения (F) значение якобиана

$$I_0 = \begin{vmatrix} x_u^{(0)} & x_v^{(0)} \\ y_u^{(0)} & y_v^{(0)} \end{vmatrix}$$

отлично от нуля, а потому (dF) есть аффинное отображение. Отображение (dF) можно рассматривать как локально аппроксимирующее данное отображение (F). В самом деле, переход к отображению (dF) равносилен замене приращений функций $x(u, v)$ и $y(u, v)$ их дифференциалами, но разность между приращением и дифференциалом имеет вид $\omega\rho$, где ρ — расстояние между прообразами.

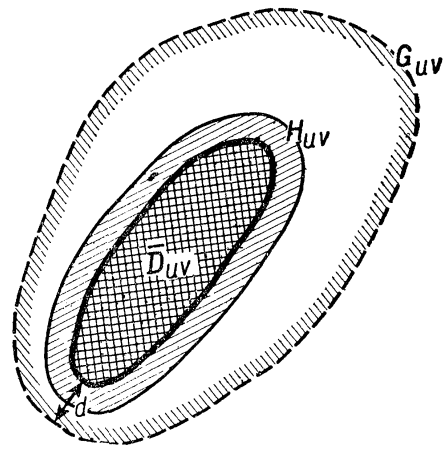
Рассмотрим замкнутую ограниченную область $\bar{D}_{uv} \subset G_{uv}$; следовательно, все как внутренние, так и граничные точки замкнутой области $\bar{D}_{uv}$ содержатся внутри G_{uv}.

Обозначим через d расстояние границы замкнутой области $\bar{D}_{uv}$ до границы области G_{uv}. Если точка $T(u, v) \in \bar{D}_{uv}$, то любая ее окрестность радиуса, не большего, чем $\frac{d}{2}$, содержится в G_{uv} $\left(\text{вместо } \frac{d}{2} \text{ можно взять любое число, меньшее } d\right)$.

Множество точек, расстояние которых от замкнутой области $\bar{D}_{uv}$ меньше, чем $\frac{d}{2}$, образуют ограниченную область H_{uv}*.

Эта область содержит $\bar{D}_{uv}$ и вместе со своей границей содержится в G_{uv}. Следовательно, $\bar{D}_{uv} \subset H_{uv} \subset G_{uv}$ (черт. 220).

Пусть $T_0(u_0, v_0)$ — произвольно выбранная начальная точка в замкнутой области $\bar{D}_{uv}$. Будем рассматривать лишь такие окрестности начальной точки, радиусы которых меньше, чем $\frac{d}{2}$, тогда при любом выборе начальной точки $T_0(u_0, v_0) \in \bar{D}_{uv}$ произвольная ее окрестность U_0 содержится в замкнутой области $\bar{H}_{uv}$, а следовательно, и в G_{uv}. Всякой точке $T(u, v) \in U_0$ можно поставить в соответствие две точки: точку $X(x, y)$ — ее образ в данном отображении (F) — и точку $X^*(x^*, y^*)$ — ее образ в отображении (dF) (черт. 221).



Черт. 220.

Теорема I. *Расстояние между точками X и X^* — образами точки T в отображениях (F) и (dF) — может быть представлено в виде произведения:*

$$\rho(X, X^*) = \omega(T, T_0)\,\rho(T, T_0),$$

где $\omega(T, T_0)$ есть функция, равномерно сходящаяся (по аргументам u и v) к нулю в замкнутой области $\bar{D}_{uv}$:

$$\omega(T, T_0) \rightrightarrows 0.$$
$$T \to T_0$$

Требуется доказать, что неравенство $\omega(T, T_0) < \varepsilon$ выполняется, если точка T содержится в достаточно малой δ-окрестности начальной точки T_0, при этом число δ определяется заданием ε и может быть взято одним и тем же при любом выборе начальной точки в замкнутой области $\bar{D}_{uv}$.

---

* Множество H_{uv} есть открытое множество: если расстояние точки $M \in H_{uv}$ до $\bar{D}_{uv}$ равно $r < \frac{d}{2}$, то δ-окрестность точки M содержится в H_{uv} при $\delta < \frac{d}{2} - r$. Множество H_{uv} обладает свойством связности: достаточно заметить, что любая точка H_{uv}, не являющаяся внутренней относительно D_{uv}, может быть соединена прямолинейным отрезком с некоторой точкой, внутренней относительно D_{uv}. В самом деле, точка M содержится в H_{uv} вместе с $\frac{d}{2}$-окрестностью некоторой граничной точки D_{uv}, а эта окрестность содержит внутренние точки области D_{uv}.

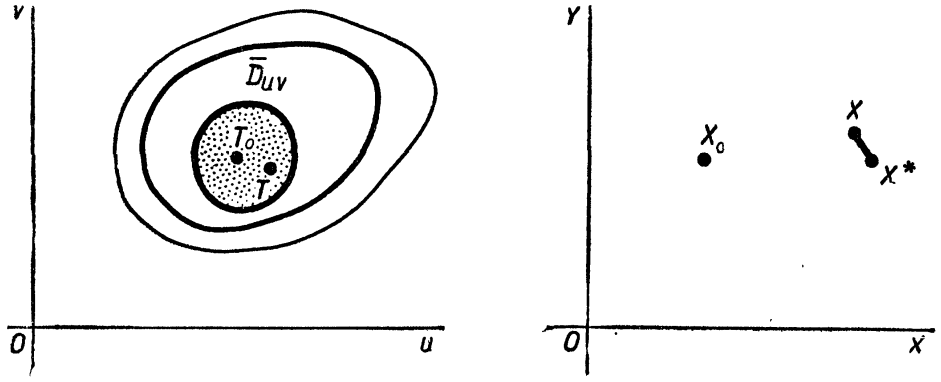
Доказательство. В силу регулярности отображения

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v)$$

производные функций $x(u, v)$ и $y(u, v)$ непрерывны в G_{uv} и равномерно непрерывны в ограниченной замкнутой области $\bar{H}_{uv}$. Следовательно, существует такое число δ, что модуль разности значений в точках T и T_0 каждой из производных меньше ε' для любой пары точек $T \in \bar{H}_{uv}$ и $T_0 \in \bar{H}_{uv}$, если только $\rho(T, T_0) < \delta$. Так, например,

$|x'_u(u, v) - x'_u(u_0, v_0)| < \varepsilon'$, если $\rho\big(T(u, v), T_0(u_0, v_0)\big) < \delta$;

аналогичные неравенства имеют место для других производных.



Черт. 221.

Пусть $T_0(u_0, v_0) \subset \bar{D}_{uv}$, тогда в любой δ-окрестности U_0 точки T_0 имеем (по теореме Лагранжа):

$$x(T) - x_0 = (u - u_0)\, x'_u(T_1) + (v - v_0)\, x'_v(T_2),$$

где $T_1 \in U_0$ и $T_2 \in U_0$. Для абсциссы точки $X^*(x^*, y^*)$ имеем:

$$x^* - x_0 = (u - u_0)\, x'_u(T_0) + (v - v_0)\, x'_v(T_0),$$

откуда

$$|x(T) - x^*| \leqslant |u - u_0|\,|x'_u(T_1) - x'_u(T_0)| + |v - v_0|\,|x'_v(T_2) - x'_v(T_0)| < |u - u_0|\,\varepsilon' + |v - v_0|\,\varepsilon' \leqslant 2\rho(T, T_0)\varepsilon'$$

(так как $|u - u_0| \leqslant \rho$ и $|v - v_0| \leqslant \rho$).

Аналогично получим неравенство

$$|y(T) - y^*| < 2\rho(T, T_0)\varepsilon'.$$

Из этих неравенств найдем:

$$\rho(X, X^*) = \sqrt{(x - x^*)^2 + (y - y^*)^2} \leqslant 2\sqrt{2}\,\varepsilon'\rho(T, T_0).$$

Если взять $\varepsilon' < \dfrac{\varepsilon}{2\sqrt{2}}$, то получим $\rho(X, X^*) < \varepsilon \cdot \rho(T, T_0)$.

Положив $\omega(T, T_0) = \dfrac{\rho(X, X^*)}{\rho(T, T_0)}$, будем иметь $|\omega(T, T_0)| < \varepsilon$, если $T_0 \in \overline{D}_{uv}$ и $\rho(T, T_0) < \delta$, значит, $\omega(T, T_0) \rightrightarrows 0$, ч. т. д.

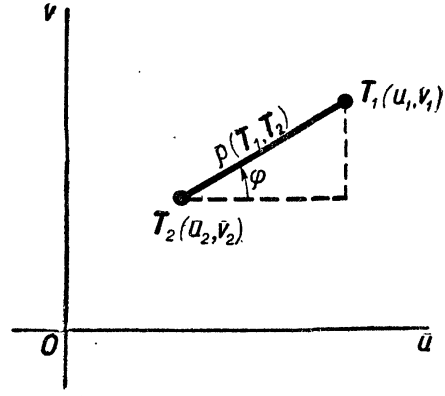
$$T \to T_0.$$

Рассмотрим дифференциал отображения (F) в точке T_0:

$$\left.\begin{aligned} x^* - x_0 &= x_u^{(0)} \cdot (u - u_0) + x_v^{(0)} \cdot (v - v_0) \\ y^* - y_0 &= y_u^{(0)} \cdot (u - u_0) + y_v^{(0)} \cdot (v - v_0) \end{aligned}\right\}, \qquad (dF)$$

отображение (dF), будучи аффинным, регулярно во всей плоскости (u, v).

Пусть T_1 и T_2 — любые две точки плоскости (u, v), а X_1^*, X_2^* — соответствующие точки в отображении (dF).



Черт. 222.

Теорема II. *Какова бы ни была начальная точка, $T_0 \in \overline{D}_{uv}$, существуют такие два положительные числа m и M, что для отношения расстояний $\rho(X_1^*, X_2^*)$ и $\rho(T_1, T_2)$ имеют место неравенства*

$$m \leqslant \frac{\rho(X_1^*, X_2^*)}{\rho(T_1, T_2)} \leqslant M.$$

Доказательство. Имеем:

$$x_1^* - x_0 = x_u^{(0)} \cdot (u_1 - u_0) + x_v^{(0)} \cdot (v_1 - v_0)$$

и

$$x_2^* - x_0 = x_u^{(0)} \cdot (u_2 - u_0) + x_v^{(0)} \cdot (v_2 - v_0),$$

откуда

$$x_2^* - x_2^* = x_u^{(0)} \cdot (u_1 - u_2) + x_v^{(0)} \cdot (v_1 - v_2);$$

и аналогично:

$$y_1^* - y_2^* = y_u^{(0)} \cdot (u_1 - u_2) + y_v^{(0)} \cdot (v_1 - v_2).$$

Положим:

$u_1 - u_2 = \rho \cos\varphi$, $v_1 - v_2 = \rho \sin\varphi$ (где $\rho = \rho(T_1, T_2)$, черт. 222), тогда

$$\rho(X_1^*, X_2^*) = \sqrt{(x_1^* - x_2^*)^2 + (y_1^* - y_2^*)^2} =$$

$$= \rho \sqrt{[x_u^{(0)} \cos\varphi + x_v^{(0)} \sin\varphi]^2 + [y_u^{(0)} \cos\varphi + y_v^{(0)} \sin\varphi]^2}.$$

Подкоренное выражение не обращается в нуль ни при каком значении $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, какова бы ни была начальная точка (u_0, v_0). В самом деле, если бы подкоренное выражение обратилось в нуль, то обратилась бы в нуль в отдельности каждая скобка. Значит, $\sin\varphi$

и $\cos\varphi$ (неравные оба нулю ни при каком значении φ) являлись бы нетривиальным решением системы линейных однородных уравнений с детерминантом

$$\begin{vmatrix} x_u^{(0)} & x_v^{(0)} \\ y_u^{(0)} & y_v^{(0)} \end{vmatrix},$$

отличным от нуля, что невозможно. Коэффициенты $x_u^{(0)} = x'_u(u_0, v_0)$, $y_u^{(0)} = y'_u(u_0, v_0)$ и т. д. суть непрерывные функции координат начальной точки. Поэтому подкоренное выражение есть положительная непрерывная функция аргументов u_0, v_0 и φ, где $(u_0, v_0) \in \bar{D}_{uv}$, а $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. По теореме о наибольшем и наименьшем значениях существуют положительные минимум и максимум подкоренного выражения, которые обозначим соответственно через m^2 и M^2. Следовательно,

$$\rho(T_1, T_2)\, m \leqslant \rho(X_1^*, X_2^*) \leqslant \rho(T_1, T_2)\, M$$

или

$$m \leqslant \frac{\rho(X_1^*, X_2^*)}{\rho(T_1, T_2)} \leqslant M, \qquad \text{ч. т. д.}$$

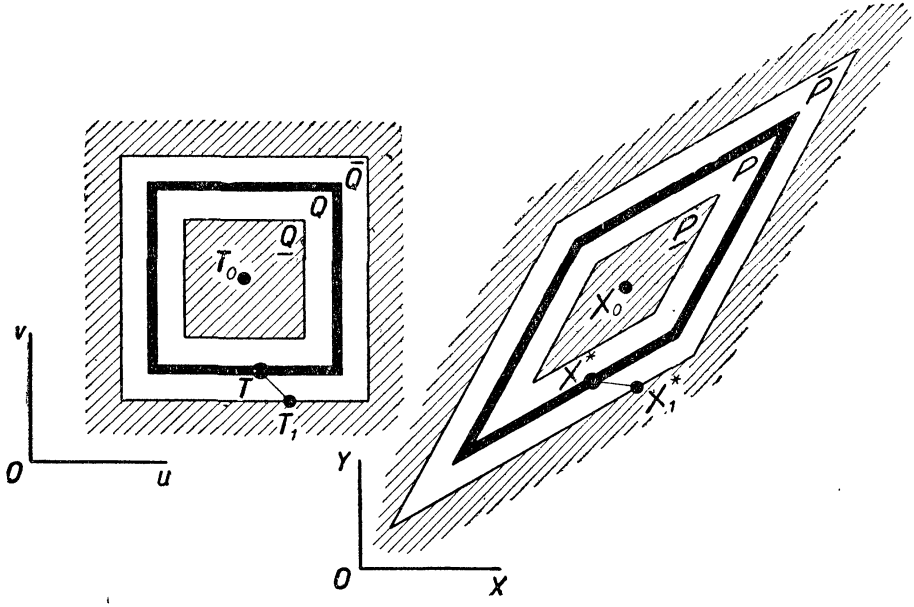
Геометрическая интерпретация. При аффинном отображении (dF) отношение отрезка-образа к отрезку-прообразу $\frac{\rho(X_1^*, X_2^*)}{\rho(T_1, T_2)}$ есть «коэффициент растяжения», которое испытывает отрезок-прообраз (в различных направлениях коэффициент растяжения в общем случае различен); каждой начальной точке $(u_0, v_0) \in \bar{D}_{uv}$ соответствует аффинное отображение (dF); доказанные неравенства устанавливают, что при всех этих аффинных отображениях отрезок-прообраз не может испытывать ни сколь угодно «сильных растяжений», ни сколь угодно «сильных сжатий», так как коэффициент растяжения заключен между положительными числами m и M.

Возьмем произвольный достаточно малый квадрат Q, содержащийся в замкнутой области $\bar{D}_{uv}$. Обозначим через $T_0(u_0, v_0)$ центр и через r — половину стороны Q. Рассмотрим два квадрата $\underline{Q}$ и $\bar{Q}$, гомотетичные квадрату Q с общим центром подобия в точке $T_0(u_0, v_0)$ и с коэффициентами подобия, соответственно равными $(1-\eta)$ и $(1+\eta)$, где $0 < \eta < 1$ — число, которое может быть задано как угодно малым.

Имеем: $\underline{Q} \subset Q \subset \bar{Q}$ (черт. 223).

Расстояние контура квадрата Q до контура каждого из квадратов $\bar{Q}$ и $\underline{Q}$ равно ηr. В аффинном отображении (dF) при начальной точке $T_0(u_0, v_0)$ квадратам Q, $\bar{Q}$ и $\underline{Q}$ соответствуют гомотетичные параллелограммы P, $\bar{P}$ и $\underline{P}$ с общим центром в точке $X_0(x_0, y_0)$ и с коэффициентами подобия, равными соответственно $(1+\eta)$ и $(1-\eta)$.

Всякой точке T, расположенной на контуре квадрата Q, в отображении (dF) соответствует точка X^*, расположенная на контуре параллелограмма P. Область, ограниченную параллелограммами $\bar{P}$ (снаружи) и $\underline{P}$ (изнутри), будем называть четырехугольным кольцом, ограниченным данными параллелограммами. Расстояние контура параллелограмма P до границы кольца при произвольной начальной точке $T_0 \in D_{uv}$



Черт. 223.

не меньше $m\eta r$, где $m > 0$ — некоторое положительное число. В самом деле, если точка X^* расположена на контуре P, а точка X_1^* — на контуре кольца, то соответствующие их прообразы T и T_1 расположены на контуре квадрата Q и на границе «квадратного» кольца в плоскости (u, v) (ограниченного контурами квадратов $\bar{Q}$ и $\underline{Q}$). Так как расстояние между прообразами не меньше ηr:

$$\rho(T, T_1) \geqslant \eta r,$$

то, по теореме II,

$$\rho(X^*, X_1^*) \geqslant m\rho(T, T_1) \geqslant m\eta r.$$

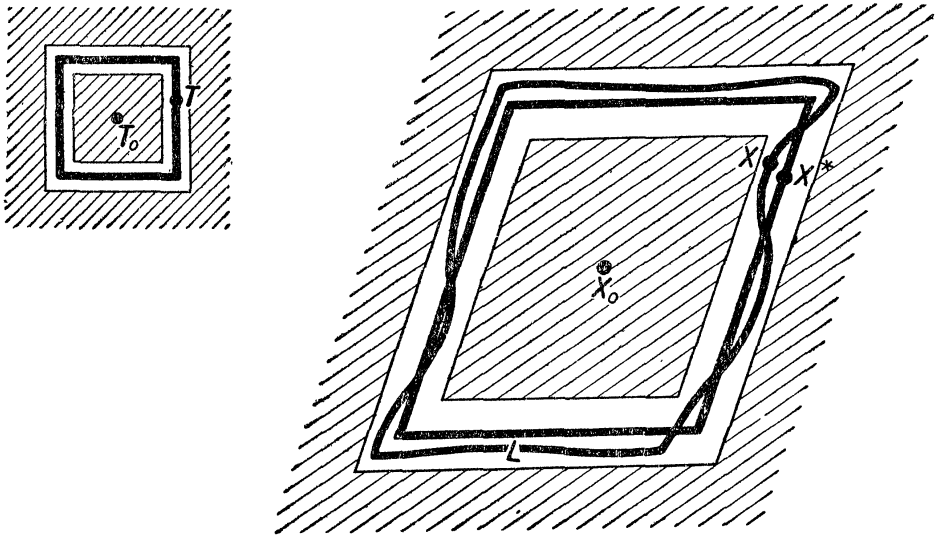
Теорема. *Образ в отображении* (F)

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v) \qquad (F)$$

контура любого достаточно малого квадрата $Q \in \bar{D}_{uv}$ *содержится в области (кольце), ограниченной параллелограммами* $\bar{P}$ *и* $\underline{P}$ *(при данном* $0 < \eta < 1$*).*

Требуется доказать, что образ границы квадрата Q при произвольной начальной точке T_0 (центр Q) содержится в соответствующем кольце, если сторона $2r$ квадрата $Q \subset \bar{D}_{uv}$ меньше некоторого числа, определяемого заданием η.

Доказательство. Пусть T — точка, лежащая на контуре Q, а точка X и X^* (черт. 224) — ее образы в отображениях (F) и (dF).



Черт. 224.

Покажем, что при достаточно малом r имеет место неравенство

$$\rho(X,\ X^*) < m\eta r.$$

При выполнении этого неравенства точка X будет лежать внутри кольца (так как расстояние точки X^* до границы кольца не меньше $m\eta r$). В самом деле, в силу теоремы I имеем:

$$\rho(X,\ X^*) = \omega(T,\ T_0)\,\rho(T,\ T_0).$$

Расстояние $\rho(T,\ T_0)$ точки T на контуре квадрата Q до центра не больше $r\sqrt{2}$, значит, $\rho(X,\ X^*) \leqslant \omega(T,\ T_0)\, r\sqrt{2}$.

Так как $\underset{T \to T_0}{\omega}(T,\ T_0) \rightrightarrows 0$, то при достаточно малом $r < \delta$ (при произвольном центре $T_0 \in D_{uv}$ квадрата Q) будем иметь $\omega(T,\ T_0) < \dfrac{m\eta}{\sqrt{2}}$, откуда

$$\rho(X,\ X^*) \leqslant \frac{m\eta}{\sqrt{2}} \cdot r\sqrt{2} = m\eta r.$$

Итак, любая точка T контура квадрата Q отображается в точку X, лежащую в плоскости (x, y) внутри кольца, ограниченного параллелограммами $\underline{P}$ и $\overline{P}$. Следовательно, образ контура квадрата Q есть простая замкнутая линия L, расположенная в этом кольце, ч. т. д.

Теорема. *Образом в регулярном отображении гладкой линии является также гладкая линия.*

Доказательство. Пусть

$$u = u(t), \quad v = v(t) \qquad (L_{uv})$$

есть гладкая линия, содержащаяся в области G_{uv}. Если функции $u(t)$, $v(t)$ имеют непрерывные производные (линия L_{uv} гладкая), то по теореме о дифференцировании сложной функции

$$x = x\big(u(t),\ v(t)\big), \quad y = y\big(u(t),\ v(t)\big) \qquad (L_{xy})$$

также имеют непрерывные производные; следовательно, линия L_{xy} — образ линии L_{uv} — является гладкой, ч. т. д.

Следствие. Образом во взаимно однозначном регулярном отображении замкнутой области с кусочно гладкой границей также является замкнутая область с кусочно гладкой границей.

В самом деле, если $\overline{D}_{uv} \in G_{uv}$, то образом области D_{uv} служит область D_{xy}, граница области D_{uv} состоит из конечного множества гладких дуг, этим дугам соответствуют гладкие дуги, ограничивающие область D_{xy}. В рассматриваемом случае области D_{uv} и D_{xy} квадрируемы.

Из доказанных теорем следует, что образ квадрата Q в отображении (F) есть замкнутая квадрируемая область R, ограниченная линией L, содержащаяся в параллелограмме $\overline{P}$ и содержащая параллелограмм $\underline{P}$. Будем обозначать площади рассматриваемых фигур теми же буквами, как и сами фигуры, тогда получим неравенства:

$$\underline{P} \leqslant R \leqslant \overline{P}. \qquad (1)$$

Как известно, отношение площадей соответственных фигур в любом аффинном преобразовании равно абсолютной величине детерминанта этого преобразования *. Параллелограммы $\underline{P}$ и $\overline{P}$ суть образы квадратов $\underline{Q}$ и $\overline{Q}$ в аффинном отображении (dF), а потому

$$\frac{\overline{P}}{\overline{Q}} = \frac{\overline{P}}{(1+\eta)^2 Q} = \frac{\underline{P}}{\underline{Q}} = \frac{\underline{P}}{(1-\eta)^2 Q} = I_0,$$

* Пусть x, y — проекции вектора X на координатные оси. Аффинное преобразование ставит в соответствие вектору X вектор X':

$$x' = a_{11}x + a_{12}y,$$
$$y' = a_{21}x + a_{22}y.$$

Площадь параллелограмма, построенного на векторах X_1 и X_2, равна аб-

где

$$I_0 = \begin{vmatrix} x_u^{(0)} & x_v^{(0)} \\ y_u^{(0)} & y_v^{(0)} \end{vmatrix}.$$

Следовательно, неравенства (1) перепишутся так:

$$(1-\eta)^2 QI_0 < R < (1+\eta)^2 QI_0.$$

Эти неравенства имеют место для любого квадрата $Q \subset D_{uv}$ с достаточно малой стороной $r < \delta$, где число δ определяется заданием η.

Теорема. *Если регулярное отображение*

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v) \qquad (F)$$

взаимно однозначно отображает область G_{uv} на область G_{xy}, то образом квадрируемой замкнутой области $\bar{D}_{uv} \subset G_{uv}$ является также квадрируемая область $\bar{D}_{xy}$; площадь $\bar{D}_{xy}$ выражается интегралом

$$D_{xy} = \iint\limits_{D_{uv}} |I(u, v)|\, du\, dv,$$

где $I(u, v) = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}$ *есть якобиан отображения* (F).

Доказательство. Докажем теорему сначала в предположении, что граница области D_{uv} является кусочно гладкой, т. е. состоит из конечного множества гладких линий. В этом случае граница области D_{xy} также является кусочно гладкой, а потому *замкнутая область $\bar{D}_{xy}$ квадрируема.*

Квадрильяж области G_{uv} посредством «прямоугольной сети» отображается на правильное разбиение области G_{xy} посредством соответствующей «криволинейной сети». Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — множество всех квадратов квадрильяжа, содержащихся в $\bar{D}_{uv}$, а $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ — множество соответствующих ячеек разбиения области G_{xy}, эти ячейки содержатся в замкнутой области $\bar{D}_{xy}$ (черт. 225).

При заданном $0 < \eta < 1$ неравенства

$$(1-\eta)^2 \alpha_i I(u_i, v_i) \leqslant \sigma_i \leqslant (1+\eta)^2 \alpha_i I(u_i, v_i),$$

где (u_i, v_i) — центр квадрата α_i, будут иметь место для любой ячейки σ_i,

---

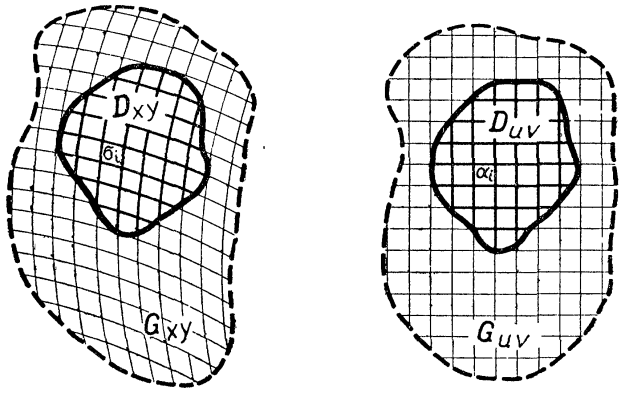
солютной величине детерминанта $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$, а площадь параллелограмма-образа равна абсолютной величине детерминанта:

$$\begin{vmatrix} x'_1 & y'_1 \\ x'_2 & y'_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}y_1 & a_{21}x_1 + a_{22}y_1 \\ a_{11}x_2 + a_{12}y_2 & a_{21}x_2 + a_{22}y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

если квадрильяж является достаточно мелким δ-разбиением плоскости (u, v). Для вычисления площади $\overline{D}_{xy}$ достаточно найти предел суммы площадей ячеек, содержащихся внутри $\overline{D}_{xy}$. Общая же площадь ячеек, покрывающих границу, имеет предел, равный нулю. Просуммировав, получим неравенства:

$$(1-\eta)^2 \sum |I(u_i, v_i)|\,\alpha_i \leqslant \sum \sigma_i \leqslant (1+\eta)^2 \sum |I(u_i, v_i)|\,\alpha_i,$$

где сумма распространяется на все ячейки α_i, содержащиеся внутри D_{uv}.



Черт. 225.

Перейдя к пределу, получим:

$$(1-\eta)^2 \iint\limits_{D_{uv}} |I(u, v)|\,du\,dv \leqslant D_{xy} \leqslant (1+\eta)^2 \iint\limits_{D_{uv}} I\,|(u, v)|\,du\,dv.$$

Так как значение $\eta > 0$ может быть взято как угодно малым, то из последних соотношений следует равенство:

$$D_{xy} = \iint\limits_{D_{uv}} |I(u, v)|\,du\,dv.$$

В случае произвольной квадрируемой области $\overline{D}_{uv}$ надо доказать, что ее образ $\overline{D}_{xy}$ также является квадрируемой областью. Пусть $\overline{H}_{uv}$ — любая замкнутая ограниченная область, содержащая $\overline{D}_{uv}$ и содержащаяся в G_{uv}.

При достаточно мелком квадрильяже в плоскости (u, v) многоугольник, выходящий из $\overline{D}_{uv}$, будет содержаться в $\overline{H}_{uv}$* (черт. 226). Образами квадратных ячеек $\alpha_i \subset \overline{H}_{uv}$ в плоскости (x, y) служат квадрируемые ячейки σ_i. В самом деле, граница квадрата есть кусочно гладкая линия (многоугольник), а потому образ квадрата α_i есть квадрируемая

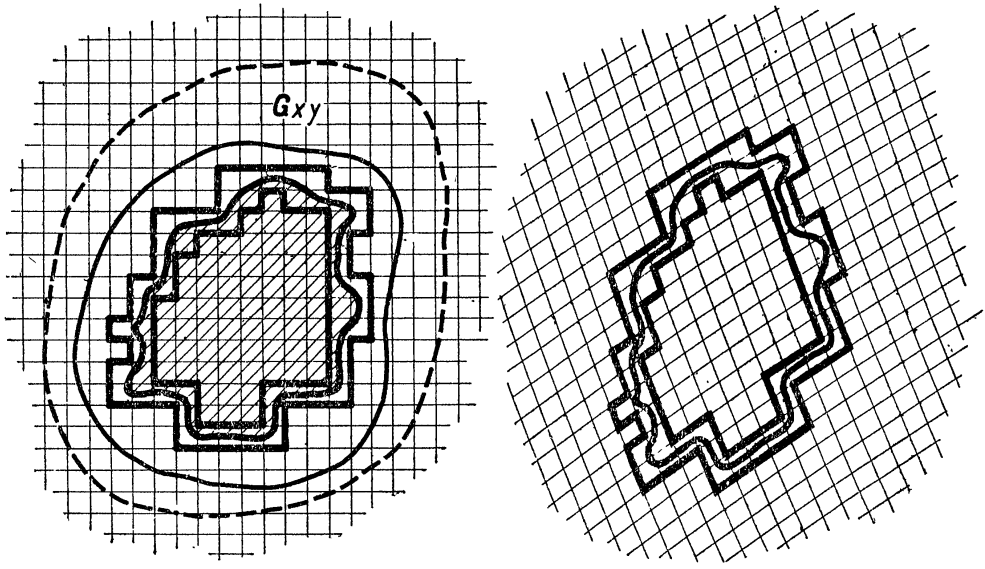
* Достаточно, чтобы диагонали квадратных ячеек были меньше, чем расстояние замкнутой области D_{uv} до границы области H_{uv}.

ячейка. Многоугольник P_{uv}, покрывающий границу области D_{uv}, состоит из конечного множества квадратных ячеек, этому многоугольнику в плоскости (x, y) соответствует фигура P_{xy}, состоящая из конечного множества квадрируемых ячеек, покрывающих границу области D_{xy}. Площадь фигуры P_{xy} выразится интегралом

$$P_{xy} = \int\limits_{P_{uv}} \int |I(u, v)|\, du\, dv.$$

При достаточно мелком квадрильяже в плоскости (u, v) площадь многоугольника P_{uv} будет меньше, чем $\frac{\varepsilon}{M}$, где $M = \max |I(u, v)|$ в замкнутой области $\overline{H}_{uv}$, но тогда

$$P_{xy} = \int\limits_{P_{uv}} \int |I(u, v)|\, du\, dv \leqslant MP_{uv} < \varepsilon.$$



Черт. 226.

Итак, площадь фигуры P_{xy}, содержащей границу области D_{xy}, может быть сделана как угодно малой, следовательно, область $\overline{D}_{xy}$ квадрируема.

Все последующие рассуждения, проведенные для области с кусочно гладкой границей, остаются в силе, ч. т. д.

Следствие. Применив теорему о среднем значении, получим следующее выражение для площади области D_{xy}:

$$D_{xy} = I(\xi, \eta) D_{uv},$$

где (ξ, η) — некоторая точка, содержащаяся в D_{uv}.

Предыдущие рассуждения применимы к кубируемым областям в пространстве: образом в регулярном взаимно однозначном отображении

$$x_1 = x_1(T), \quad x_2 = x_2(T), \ \ldots, \ x_n = x_n(T)$$

кубируемой области также является кубируемая область; объем области образа выражается интегралом

$$D_X = \int\limits_{D_T} \left| \frac{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{D(t_1, t_2, \ldots, t_n)} \right| dt_1\, dt_2 \ldots dt_n.$$

Доказательства соответствующих теорем (с надлежащими изменениями) остаются в силе: вместо квадратов следует рассматривать кубы, вместо параллелограммов — параллелепипеды, вместо линий — поверхности и т. д.

Теорема об интегрировании подстановкой. *Если*

1° *функции*

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v)$$

осуществляют взаимно однозначное и регулярное отображение области G_{uv} *на область* G_{xy};

2° $\overline{D}_{uv} \subset G_{uv}$ и $\overline{D}_{xy} \subset G_{xy}$ — *соответственные в этом отображении замкнутые квадрируемые области*;

3° $f(x, y)$ — *функция, интегрируемая в замкнутой области* $\overline{D}_{xy}$, *то*

$$\int\limits_{D_{xy}} \int f(x, y)\, dx\, dy = \int\limits_{D_{uv}} \int f\big(x(u, v), y(u, v)\big)\, |I(u, v)|\, du\, dv.$$

Доказательство. Пусть

$$\alpha_1, \alpha_2, \ \ldots, \ \alpha_n \qquad (\alpha)$$

— произвольное разбиение замкнутой области $\overline{D}_{uv}$ на квадрируемые ячейки,

$$\sigma_1, \sigma_2, \ \ldots, \ \sigma_n \qquad (\sigma)$$

— соответствующее правильное разбиение замкнутой области $\overline{D}_{xy}$. По доказанному (см. следствие предыдущей теоремы) имеем:

$$\sigma_i = |I(\xi_i, \eta_i)|\, \alpha_i, \text{ где } (\xi_i, \eta_i) \in \alpha_i.$$

Составим произвольную интегральную сумму функции $f\big(x(u, v), y(u, v)\big)\, I\, |(u, v)|$ при разбиении (α):

$$S_{uv} = \sum f\big(x(u_i, v_i), y(u_i, v_i)\big)\, |I(u_i, v_i)|\, \alpha_i, \text{ где } (u_i, v_i) \in \alpha_i.$$

Пусть (x_i, y_i) есть образ в плоскости (x, y) точки (u_i, v_i); имеем: $x_i = x(u_i, v_i)$, $y_i = y(u_i, v_i)$ и $(x_i, y_i) \in \sigma_i$.

Составим интегральную сумму функции $f(x, y)$ при разбиении (σ):

$$S_{xy} = \sum f(x_i, y_i)\sigma_i = \sum f(x_i, y_i)\,|I(\xi_i, \eta_i)|\,\alpha_i.$$

Сопоставим суммы S_{uv} и S_{xy}; имеем: $|S_{uv} - S_{xy}| =$

$$= \left|\sum \left[f\left(x(u_i, v_i), y(u_i, v_i)\right)|I(u_i, v_i)|\,\alpha_i - f(x_i, y_i)\sigma_i\right]\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum |f(x_i, y_i)|\,|I(u_i, v_i) - I(\xi_i, \eta_i)|\,\alpha_i \leqslant$$

$$\leqslant M \sum |I(u_i, v_i) - I(\xi_i, \eta_i)|\,\alpha_i \leqslant M \sum \omega_i \alpha_i = M\Omega_I,$$

где $M = \max f(x, y)$ в $\overline{D}_{xy}$, а ω_i — колебание $I(u, v)$ в ячейке α_i. Так как $\lim S_{xy} = \iint\limits_{D_{xy}} f(x, y)\,dx\,dy$ (в силу интегрируемости функции f) и $\lim \Omega_I = 0$ (в силу интегрируемости непрерывной функции $I(u, v)$), то $\lim S_{uv}$ существует и имеет место равенство $\lim S_{uv} = \lim S_{xy}$, или, что то же:

$$\iint\limits_{D_{uv}} f\left(x(u, v), y(u, v)\right)|I(u, v)|\,du\,dv = \iint\limits_{D_{xy}} f(x, y)\,dx\,dy, \qquad \text{ч. т. д.}$$

Формула интегрирования подстановкой имеет место (при соблюдении соответствующих условий) для интегралов любой кратности:

$$\int\limits_{D_X} f(X)\,dx_1\,dx_2 \ldots dx_n =$$

$$= \int\limits_{D_T} f\left(x_1(T), x_2(T), \ldots, x_n(T)\right)\left|\frac{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{D(t_1, t_2, \ldots, t_n)}\right| dt_1\,dt_2 \ldots dt_n.$$

§ 94. Формулы преобразования интегралов к полярным, цилиндрическим и сферическим координатам. Примеры

1. При преобразовании к полярным координатам имеем:

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad \frac{D(x, y)}{D(\rho, \varphi)} = \rho \text{ (см. § 41, стр. 206)}$$

и, следовательно,

$$\iint\limits_{D_{xy}} f(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_{D_{\rho\varphi}} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho d\rho\,d\varphi.$$

Рассмотрим область $\overline{D}_{xy}$, ограниченную двумя лучами $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$ (где $\alpha < \beta$) и двумя линиями, заданными в полярных координатах уравнениями:

$$\rho = \rho_1(\varphi) \text{ и } \rho = \rho_2(\varphi), \text{ где } 0 < \rho_1(\varphi) < \rho_2(\varphi).$$

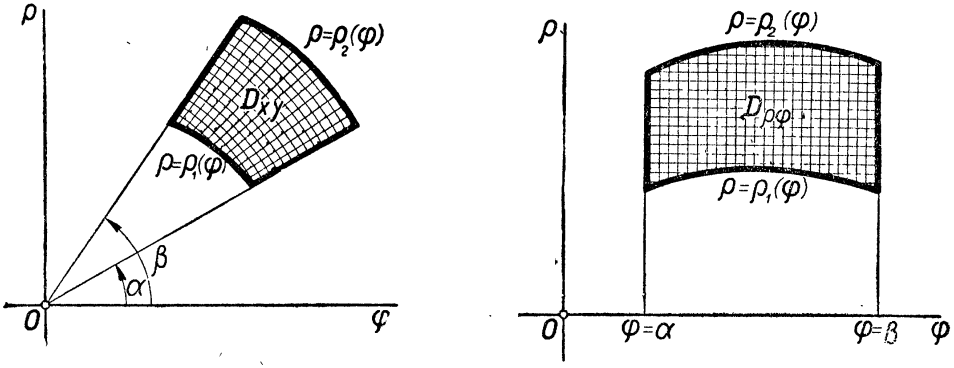
В плоскости (ρ, φ) этой области соответствует область, определяемая неравенствами

$$\rho_1(\varphi) \leqslant \rho \leqslant \rho_2(\varphi), \quad \alpha < \varphi < \beta \quad \text{(черт. 227),}$$

и, следовательно,

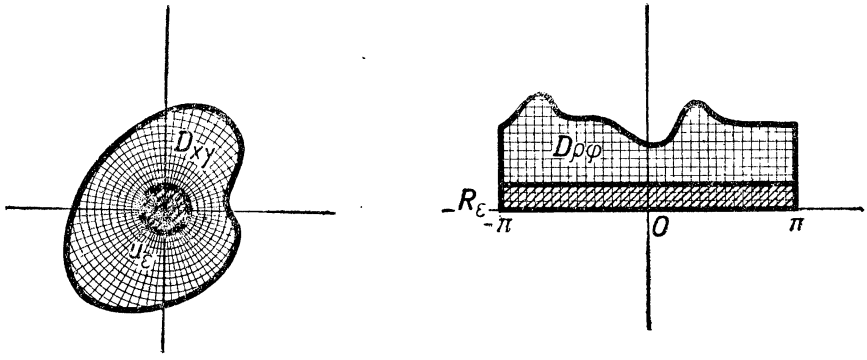
$$\iint\limits_{D_{xy}} f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho.$$

Если область интегрирования $\overline{D}_{xy}$ содержит начало координат, то регулярность отображения нарушается, ибо при $x = y = 0$ якобиан отоб-



Черт. 227.

ражения обращается в нуль: $\rho = 0$. Несложные дополнительные исследования показывают, что формула преобразования интеграла к полярным координатам остается в силе. Для определенности рассмотрим область



Черт. 228.

D_{xy}, ограниченную замкнутой линией $\rho = \rho(\varphi)$, для которой начало координат является внутренней точкой. Этой области соответствует область $D_{\rho\varphi}$:

$$-\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \rho \leqslant \rho(\varphi).$$

Вычтем из $\overline{D}_{xy}$ окрестность U_ε точки $x = y = 0$ достаточно малого радиуса ε, т. е. круг $\rho < \varepsilon$. Этой окрестности соответствует прямоугольник R_ε:

$$-\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \rho \leqslant \varepsilon \text{ (черт. 228).}$$

Имеем:

$$\iint\limits_{D_{xy}-U_\varepsilon} f(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_{D_{xy}} - \iint\limits_{U_\varepsilon}$$

(для краткости подинтегральную функцию не переписываем). Так как

$$\left|\iint\limits_{U_\varepsilon} f(x, y)\,dx\,dy\right| < MU_\varepsilon = M\pi\varepsilon^2 \quad (\text{где } |f| < M),$$

то

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \iint\limits_{D_{xy}-U_\varepsilon} f(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_{D_{xy}} f(x, y)\,dx\,dy.$$

Аналогично имеем:

$$\iint\limits_{D_{\rho\varphi}} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho\,d\varphi = \iint\limits_{D_{\rho\varphi}-R_\varepsilon} + \iint\limits_{R_\varepsilon},$$

где второй интеграл в правой части по абсолютной величине меньше, чем $M\varepsilon \cdot R_\varepsilon = 2\pi M\varepsilon^2$. В соответственных областях $D_{xy} - U_\varepsilon$ и $D_{\rho\varphi} - R_\varepsilon$ имеем равенство:

$$\iint\limits_{D_{xy}-U_\varepsilon} f(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_{D_{\rho\varphi}-R_\varepsilon} f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho\,d\varphi.$$

Перейдя к пределу, получим:

$$\iint\limits_{D_{xy}} f(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_{D_{\rho\varphi}} f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho\,d\varphi =$$

$$= \int\limits_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{\rho(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho.$$

2. При переходе к цилиндрическим координатам в пространстве имеем:

$x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z$, $\dfrac{D(x, y, z)}{D(r, \rho, z)} = r$ (см. § 41, стр. 208),

и общая формула интегрирования подстановкой примет вид:

$$\iiint f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iiint f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)\,r\,dr\,d\varphi\,dz$$

(интегралы распространяются на соответственные области).

3. При переходе к сферическим (полярным) координатам в пространстве имеем:

$x = \rho\cos\varphi\sin\theta$, $y = \rho\sin\varphi\sin\theta$, $z = \rho\cos\theta$ и $\dfrac{D(x, y, z)}{D(\rho, \varphi, \theta)} = \rho^2\sin\theta$,

где

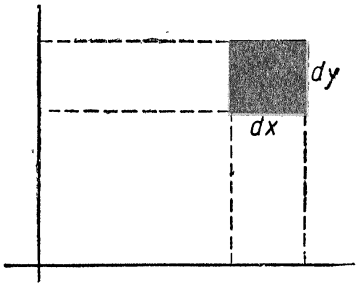
$$0 < \rho, \quad -\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi$$

(широта θ отсчитывается от оси OZ), и общая формула интегрирования подстановкой примет вид:

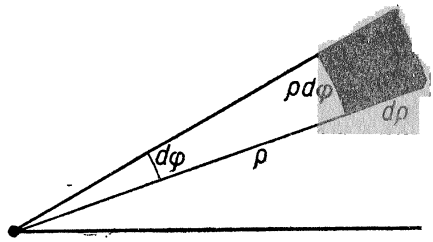
$$\int\int\int f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \int\int\int f(\rho\cos\varphi\sin\theta,\ \rho\sin\varphi\sin\theta,\ \rho\cos\theta)\,\rho^2\sin\theta\,d\rho\,d\varphi\,d\theta.$$

Примечание. Если якобиан отображения не меняет знака, а обращается в нуль в отдельных точках, на отдельных линиях (или



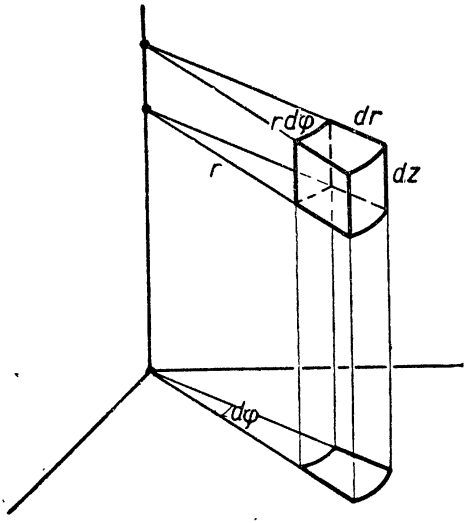
Черт. 229.



Черт. 230

поверхностях), то во многих случаях формула интегрирования подстановкой остается в силе. Для надлежащего обоснования надо применить метод, показанный выше на примере преобразования двойного интеграла к полярным координатам.

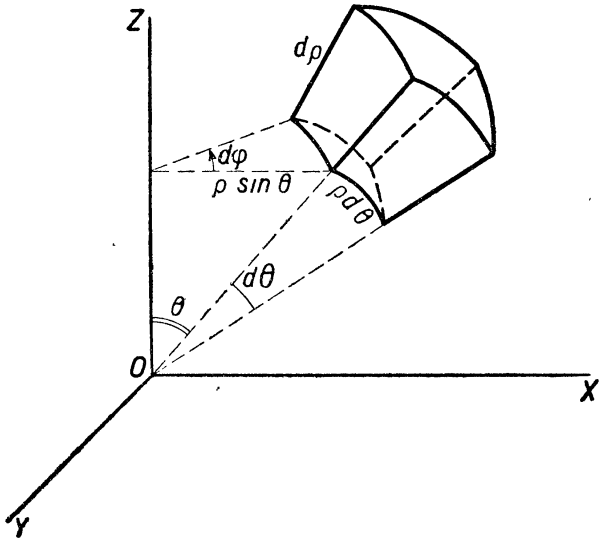
Для удобства запоминания формул преобразования к полярным, цилиндрическим и сферическим координатам можно руководствоваться следующим мнемоническим правилом. При переходе к полярным координатам в подинтегральном выражении (элемент площади) $dx\,dy$ (черт. 229) заменяется на $\rho\,d\rho\,d\varphi$. На чертеже 230 изображена «элементарная ячейка» в полярных координатах. Подсчитав приближенно ее площадь по формуле площади прямоугольника, получим $\rho\,d\varphi\,d\rho$.



Черт. 231.

Аналогичное правило имеет место для цилиндрических и сферических координат. На чертеже 231 представлен «элемент объема» в цилиндрических координатах; подсчитав объем этого элемента приближенно по формуле объема прямоугольного параллелепипеда, получим $r\,dr\,d\varphi\,dz$.

На чертеже 232 представлен элемент объема в сферических координатах. Чтобы подсчитать (приближенно) его объем, заметим, что параллель, соответствующая широте θ (отсчитываемой от полюса), есть окружность радиуса $\rho \sin\theta$, элемент дуги этой окружности равен $\rho \sin\theta\, d\varphi$.



Черт. 232.

Подсчитав объем элемента по формуле объема прямоугольного параллелепипеда, получим:

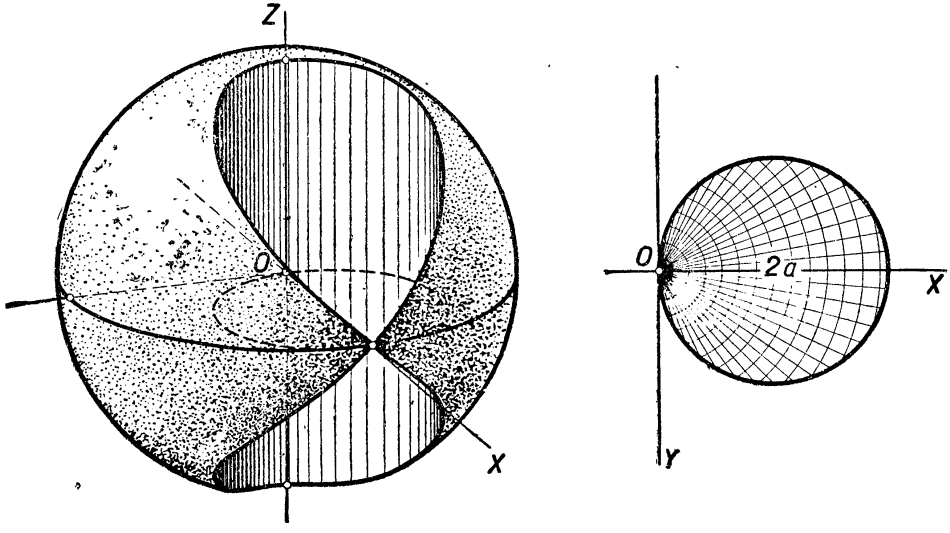
$$(\rho \sin\theta\, d\varphi)(\rho\, d\theta)\, d\rho = \\ = \rho^2 \sin\theta\, d\rho\, d\varphi\, d\theta.$$

Примеры.

1. Вычислить объем области (тело Вивиани), ограниченной поверхностями сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$ и цилиндра $x^2 + y^2 - 2ax = 0$. (Черт. 233. На чертеже слева показана часть, которая останется, если вычесть из шара тело Вивиани.)

Тело Вивиани симметрично относительно плоскостей (x, y) и (x, z), а потому достаточно определить четвертую часть объема, содержащуюся в первом октанте:

$$\frac{V}{4} = \int\limits_{D_{xy}} \int \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}\, dx\, dy,$$



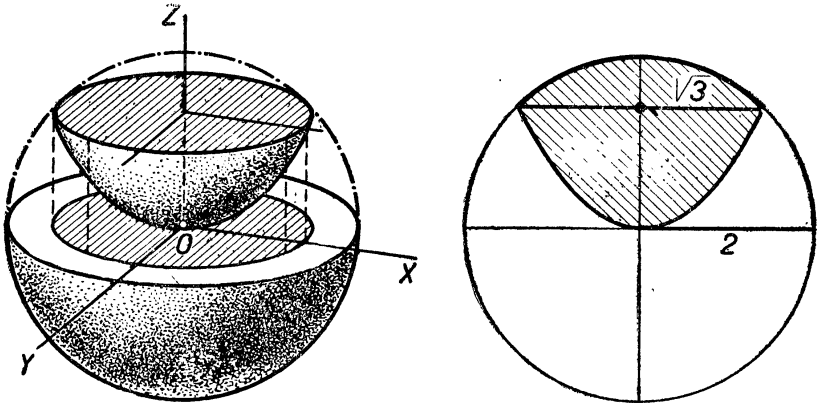
Черт. 233.

где подинтегральная функция определяется из уравнения сферы, а область интеграции есть полукруг. В полярных координатах уравнение окружности $x^2+y^2-2ax=0$ (в плоскости (x, y)) примет вид $\rho=2a\cos\varphi$. Выполнив подстановку, получим:

$$V=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{2a\cos\varphi}\sqrt{4a^2-\rho^2}\,\rho\,d\rho=\frac{32a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^3\varphi)\,d\varphi=$$

$$=\frac{32a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin\varphi+\cos^2\varphi\sin\varphi)\,d\varphi=\frac{16a^3}{3}\left(\pi-\frac{4}{3}\right).$$

2. Вычислить интеграл $I=\iiint\limits_D z\,dx\,dy\,dz$, где D есть область, ограниченная сверху сферой $x^2+y^2+z^2=4$, а снизу — параболоидом $x^2+y^2=3z$ (черт. 234).



Черт. 234.

В цилиндрических координатах уравнения сферы и параболоида соответственно суть $r^2+z^2=4$ и $r^2=3z$. Поверхности пересекаются по окружности, радиус этой окружности найдем, решив совместно уравнения поверхностей: $r=\sqrt{3}$. Круг $0\leqslant r\leqslant\sqrt{3}$ есть проекция области интеграции на плоскость (x, y). Эта область может быть задана посредством неравенств:

$$\frac{r^2}{3}\leqslant z\leqslant\sqrt{4-r^2},\quad 0\leqslant r\leqslant\sqrt{3},\quad 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi.$$

Следовательно,

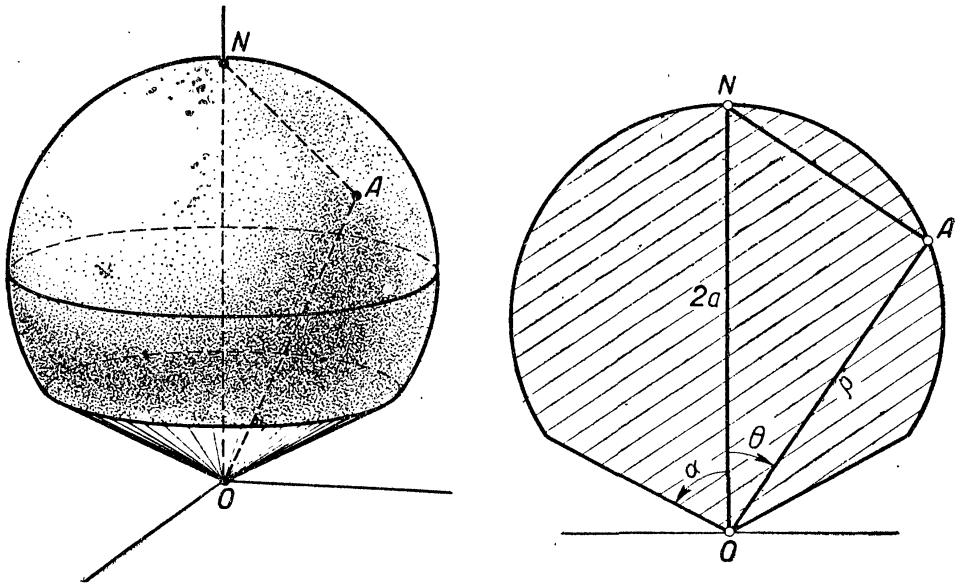
$$I=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\sqrt{3}}r\,dr\int_{\frac{r^2}{3}}^{\sqrt{4-r^2}}z\,dz=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\sqrt{3}}\left[z^2\right]_{\frac{r^2}{3}}^{\sqrt{4-r^2}}r\,dr=$$

$$=\pi\int_0^{\sqrt{3}}\left(4r-r^3-\frac{r^5}{9}\right)dr=\frac{13}{4}\pi.$$

3. Вычислить объем тела, ограниченного сферой радиуса $2a$ и поверхностью вписанного конуса с углом 2α при вершине.

На чертеже 235 изображены тело и его осевой разрез. Из треугольника ONA находим уравнение сферы в сферических координатах: $\rho = 2a\cos\theta$. Рассматриваемая фигура может быть задана неравенствами:

$$0 \leqslant \rho \leqslant 2a\cos\theta, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \alpha, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi.$$



Черт. 235.

Следовательно,

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\alpha} d\theta \int_0^{2a\cos\theta} \rho^2 \sin\theta \, d\rho = 2\pi \int_0^{\alpha} \sin\theta \, d\theta \int_0^{2a\cos\theta} \rho^2 \, d\rho.$$

Имеем:

$$\int_0^{2a\cos\theta} \rho^2 \, d\rho = \frac{8a^3}{3}\cos^3\theta,$$

откуда

$$V = \frac{16a^3\pi}{3} \int_0^{\alpha} \cos^3\theta \sin\theta \, d\theta = \frac{4\pi a^3}{3}(1 - \cos^4\alpha).$$

4. Вычислить площадь области $\overline{D}_{xy}$, ограниченной гиперболами $xy = a$, $xy = b$, где $0 < a < b$, и параболами $y^2 = mx$ и $y^2 = nx$, где $0 < m < n$ (черт. 236).

Положим

$$xy = u, \quad \frac{y^2}{x} = v, \quad \text{где } u > 0, \quad v > 0.$$

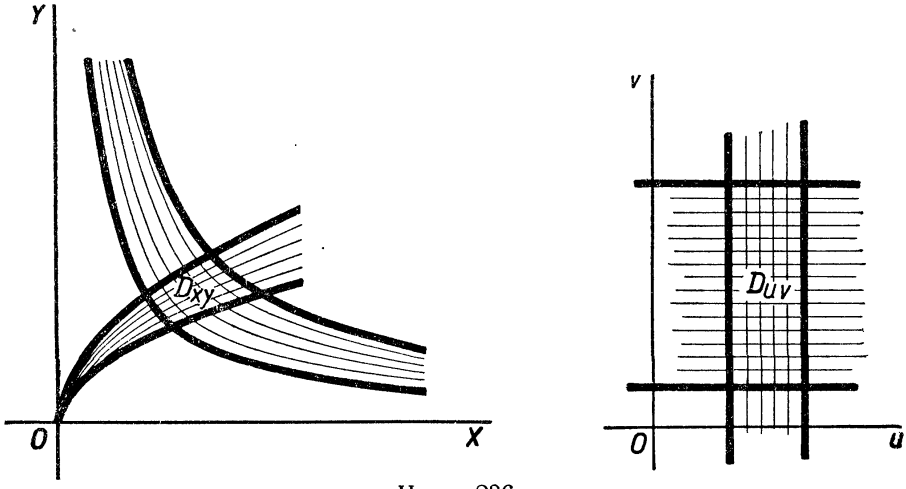
Гиперболам, ограничивающим область $\overline{D}_{xy}$ в плоскости (u, v), соответствуют координатные прямые $u = a$ и $u = b$, а параболам — координатные

прямые $v = m$ и $v = n$. Следовательно, область $\overline{D}_{uv}$ есть прямоугольник

$$a \leqslant u \leqslant b, \quad m \leqslant v \leqslant n.$$

Для нахождения якобиана $I(u, v)$ удобно (в данном примере) вычислить сначала $\dfrac{D(u, v)}{D(x, y)}$:

$$\frac{D(u, v)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & x \\ -\dfrac{y^2}{x^2} & \dfrac{2y}{x} \end{vmatrix} = 3\frac{y^2}{x} = 3v;$$



Черт. 236.

следовательно,

$$I(u, v) = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \frac{1}{3v},$$

а потому:

$$D_{xy} = \int\limits_{D_{xy}} \int dx\, dy = \frac{1}{3} \int\limits_a^b du \int\limits_m^n \frac{1}{v}\, dv = \frac{1}{3}(b - a) \ln \frac{n}{m}.$$

5. Вычислить площадь параболического сегмента, ограниченного параболой $\left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b}\right)^2 = \dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b}$ и осью абсцисс.

Положим (аффинное отображение):

$$u = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}, \qquad v = \frac{x}{a} - \frac{y}{b},$$

откуда

$$x = \frac{a}{2}(u + v), \qquad y = \frac{b}{2}(u - v).$$

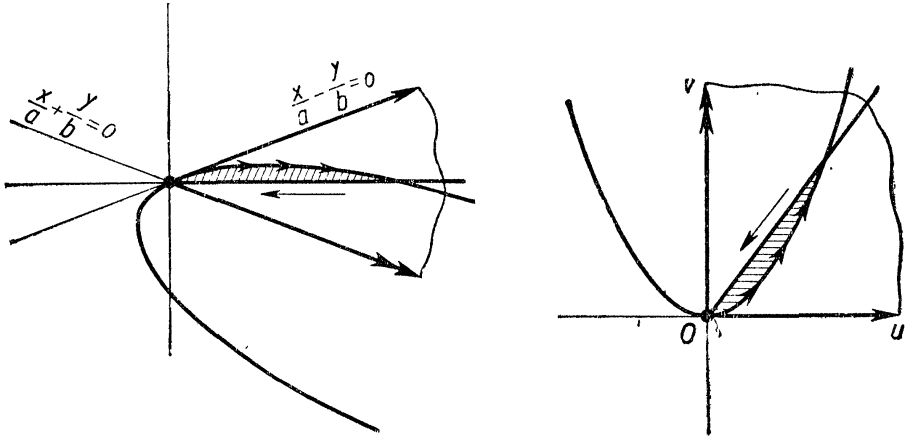
В новых координатах уравнение параболы примет вид: $v = u^2$ (черт. 237). Оси абсцисс $y = 0$ соответствует прямая $u = v$.

Якобиан отображения равен:

$$I(u, v) = x'_u y'_v - x'_v y'_u = -\frac{1}{2} ab.$$

Следовательно,

$$V = \frac{ab}{2} \int_0^1 du \int_{u^2}^{u} dv = \frac{1}{12} ab.$$



Черт. 237.

6. Составить формулу преобразования интеграла

$$\int_0^a dx \int_{mx}^{nx} f(x, y)\, dy, \quad \text{где } a > 0 \text{ и } 0 < m < n$$

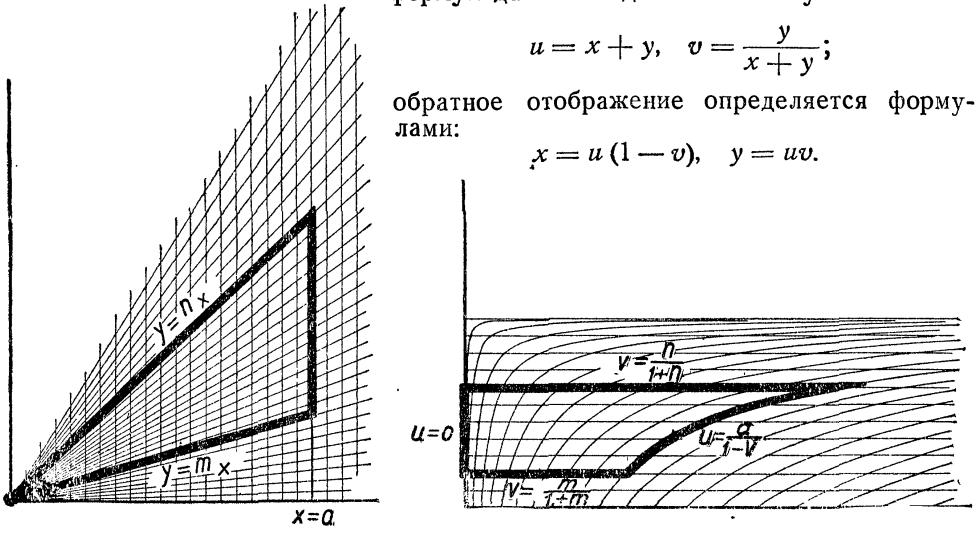
при помощи подстановки $u = x + y$, $uv = y$.

Область интеграции есть изображенный на чертеже 238 треугольник. Из формул данной подстановки получим:

$$u = x + y, \quad v = \frac{y}{x + y};$$

обратное отображение определяется формулами:

$$x = u(1 - v), \quad y = uv.$$



Черт. 238.

Лучи $y = kx$, где $k > 0$, отображаются на полупрямые, параллельные оси OU: $v = \frac{k}{1+k}$. Так как $0 < \frac{k}{1+k} < 1$, то эти полупрямые содержатся в полуполосе $u \geqslant 0$, $0 \leqslant v \leqslant 1$. Координатные прямые $x = C$ отображаются на ветви гипербол $u = \frac{C}{1-v}$. Область интегрирования отображается на область

$$0 \leqslant u \leqslant \frac{a}{1-v}, \quad \frac{m}{1+m} \leqslant v \leqslant \frac{n}{1+n}.$$

Якобиан отображения равен

$$I(u, v) = (1-v)u + uv = u.$$

Следовательно,

$$\int_0^a dx \int_{mx}^{nx} f(x, y)\, dy = \int_{\frac{m}{1+m}}^{\frac{n}{1+n}} dv \int_0^{\frac{a}{1-v}} f(u(1-v), uv)\, u\, du.$$

7. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностью

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^2 = ax.$$

Так как левая часть уравнения поверхности неотрицательна, то $x \geqslant 0$; следовательно, тело расположено справа от плоскости (y, z) (черт. 239). В обобщенных сферических координатах

$$x = a\rho \cos\varphi \sin\theta,$$
$$y = b\rho \sin\varphi \sin\theta,$$
$$z = c\rho \cos\theta.$$

Уравнение примет вид:

$\rho^3 = a \cos\varphi \sin\theta$ или

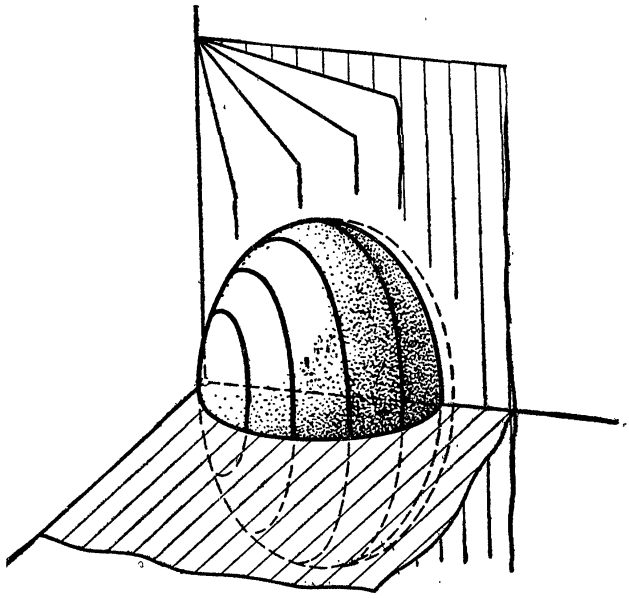
$\rho = \sqrt[3]{a \cos\varphi \sin\theta}$.

Следовательно, ρ есть неотрицательная ограниченная функция в замкнутой области

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi.$$

Якобиан преобразования равен $abc\,\rho^2 \sin\theta$.

Следовательно,



Черт. 239.

$$V = abc \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_0^{\sqrt[3]{a\cos\varphi \sin\theta}} \rho^2 d\rho = \frac{a^2bc}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\pi} \cos\varphi \sin^2\theta\, d\theta =$$

$$= \frac{a^2bc}{3} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\, d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin^2\theta\, d\theta = \frac{a^2bc}{3}\pi.$$

8. Вычислить площадь петли, ограниченной линией $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^3 = xy$. Любая прямая $y = kx$ при $k > 0$ пересекает линию в двух точках $O(0, 0)$ и в точке с положительной абсциссой $x = \frac{k}{\left(\frac{1}{a}+\frac{k}{b}\right)^3}$. Так как $\lim\limits_{k\to 0} x = \lim\limits_{k\to+\infty} x = 0$ и $\lim\limits_{k\to 0} y = \lim\limits_{k\to+\infty} y = 0$, то точки линии, содержащиеся в первом квадранте, образуют петлю. Для вычисления площади петли посредством двойного интеграла удобно сделать подстановку:

$$x = a\rho\cos^2\varphi,\quad y = b\rho\sin^2\varphi.$$

В новых координатах уравнение принимает вид: $\rho = \frac{ab}{4}\sin^2 2\varphi$.

Вычисляем якобиан:

$$I(\rho, \varphi) = \rho ab \begin{vmatrix} \cos^2\varphi & -2\cos\varphi\sin\varphi \\ \sin^2\varphi & 2\cos\varphi\sin\varphi \end{vmatrix} = ab\rho\sin 2\varphi.$$

Следовательно, искомая площадь выразится интегралом:

$$ab\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\varphi\, d\varphi \int\limits_0^{\frac{ab}{4}\sin^2 2\varphi} \rho\, d\rho = \frac{a^3b^3}{32}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\varphi \sin^4 2\varphi\, d\varphi =$$

$$= \frac{a^3b^3}{32}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} [1 - 2\cos^2 2\varphi + \cos^4 2\varphi]\sin 2\varphi\, d\varphi = \frac{a^3b^3}{60}.$$

§ 95. Площадь кривой поверхности

Рассмотрим простой кусок поверхности S, заданный параметрически гладкой системой функций

$$x = x(u, v),\quad y = y(u, v),\quad z = z(u, v), \qquad (S)$$

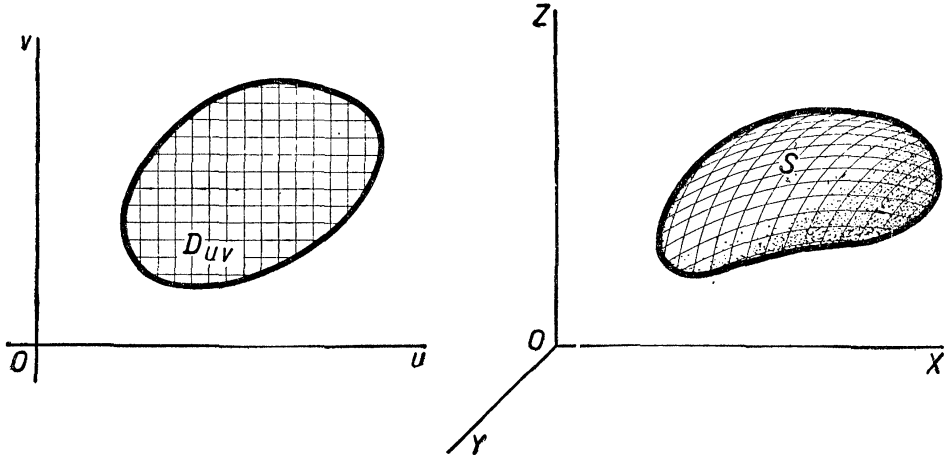
в некоторой простой замкнутой квадрируемой области $\overline{D}_{uv}$.

Предположим, что кусок S не имеет особых точек, т. е. что ранг матрицы

$$\begin{Vmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{Vmatrix}$$

в каждой точке $(u, v) \in \overline{D}_{uv}$ равен 2. Следовательно, в каждой точке (u, v) хотя бы один из миноров второго порядка этой матрицы отличен от нуля. Рассмотрим произвольное δ-разбиение плоскости UOV

на равные квадраты прямыми, параллельными осям OU и OV. Этому разбиению в качестве образа соответствует разбиение куска поверхности S на «кривые» ячейки (черт. 240). Пусть α_i — произвольная

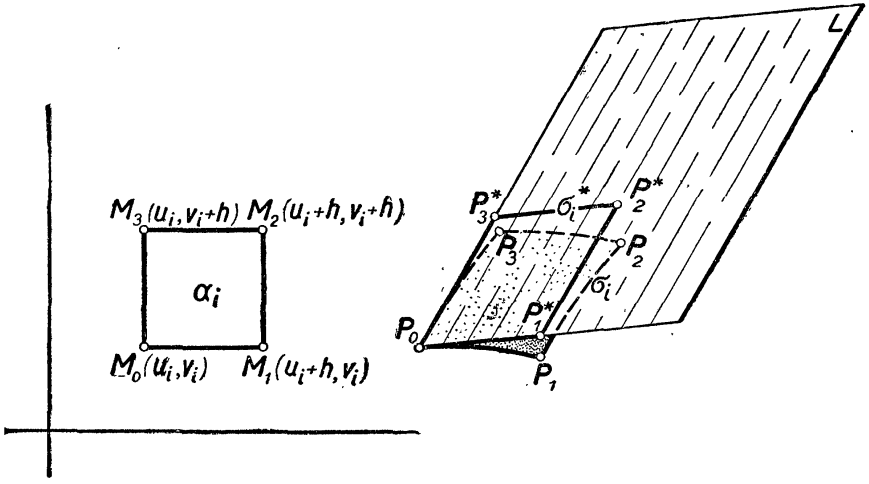


Черт. 240.

ячейка (квадратная), содержащаяся внутри D_{uv} (черт. 241):

$$u_i \leqslant u \leqslant u_i + h, \quad v_i \leqslant v \leqslant v_i + h. \qquad (\alpha)$$

Вершинами квадрата α_i являются точки $M_0(u_i, v_i)$, $M_1(u_i + h, v_i)$, $M_2(u_i + h, v_i + h)$, $M_3(u_i, v_i + h)$. На поверхности S квадрату α_i



Черт. 241.

соответствует кривая ячейка σ_i. Пусть P_0, P_1, P_2 и P_3 — точки ячейки σ_i, соответствующие вершинам квадрата α_i.

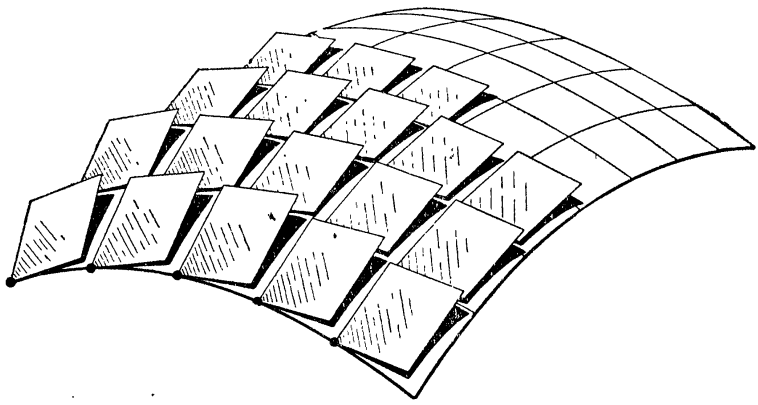
Составим параметрические уравнения касательной плоскости к поверхности в точке P_0, для этого достаточно приращения функций

$x(u, v)$, $y(u, v)$ и $z(u, v)$ заменить их дифференциалами:

$$\left.\begin{aligned} x^* - x_i &= x'_{u_i} \cdot (u - u_i) + x'_{v_i} \cdot (v - v_i) \\ y^* - y_i &= y'_{u_i} \cdot (u - u_i) + y'_{v_i} \cdot (v - v_i) \\ z^* - z_i &= z'_{u_i} \cdot (u - u_i) + z'_{v_i} \cdot (v - v_i) \end{aligned}\right\}. \qquad (L)$$

Образом квадрата α_i на касательной плоскости (L) служит параллелограмм σ_i^*, построенный на векторах $\overline{P_0P_1}^*$ и $\overline{P_0P_3}^*$, где P_1^*, P_2^* и P_3^* — образы точек M_1, M_2 и M_3 на плоскости L.

При достаточно малом квадрате α_i параллелограмм σ_i^* можно рассматривать как фигуру, локально аппроксимирующую кривую ячейку σ_i (в самом деле расстояние точки $X \in \sigma_i$ до касательной плоскости L имеет вид $\omega\rho(X, P_0)$, где $\lim\limits_{X \to P_0} \omega = 0$).



Черт. 242.

Рассмотрим множество всех квадратных ячеек α_i, содержащихся внутри области $\overline{D}_{uv}$, этому множеству соответствует «пластинчатая поверхность», состоящая из соответственных параллелограммов σ_i^* (черт. 242).

Площадь $\sum \sigma_i^*$ пластинчатой поверхности определяется разбиением области D_{uv} на квадратные ячейки α_i.

Определение. *Площадью простого куска поверхности S называется предел площади пластинчатой поверхности:*

$$S = \lim \sum \sigma_i^*.$$

Это значит, что неравенство $\left|\sum \sigma_i^* - S\right| < \varepsilon$ выполняется для любого достаточно мелкого δ-разбиения (δ определяется заданием ε) области D_{uv} на квадратные ячейки.

Будем придерживаться следующего обозначения, принятого в дифференциальной геометрии:

$$E = x_u'^2 + y_u'^2 + z_u'^2, \quad G = x_v'^2 + y_v'^2 + z_v'^2, \quad F = x'_u x'_v + y'_u y'_v + z'_u z'_v.$$

Теорема. *Площадь куска поверхности S выражается двойным интегралом:*

$$S=\iint\limits_{D_{uv}}\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv.$$

Доказательство. Вычислим площадь параллелограмма σ_i^*, соответствующего ячейке

$$u_i\leqslant u\leqslant u_i+h,\quad v_i\leqslant v\leqslant v_i+h. \qquad (\alpha)$$

Подсчитаем проекции вектора $\overrightarrow{P_0P_1^*}$ на координатные оси.

Подставив в уравнения касательной плоскости координаты $u=u_i+h$, $v=v_i$ точки M_1, образом которой (на L) служит точка P_1^*, получим:

$$x^*-x_i=hx'_{u_i},\quad y^*-y_i=hy'_{u_i},\quad z^*-z_i=hz'_{u_i}$$

и, следовательно,

$$\overrightarrow{P_0P_1^*}=hx'_{u_i}\mathbf{i}+hy'_{u_i}\mathbf{j}+hz'_{u_i}\mathbf{k}.$$

Аналогично, подставив в уравнения касательной плоскости координаты точки $M_3(u_i,\ v_i+h)$, получим:

$$\overrightarrow{P_0P_3}=hx'_{v_i}\mathbf{i}+hy'_{v_i}\mathbf{j}+hz'_{v_i}\mathbf{k}.$$

Площадь параллелограмма σ_i^*, построенного на векторах $\overrightarrow{P_0P_1^*}$ и $\overrightarrow{P_0P_3}$, равна модулю векторного произведения этих векторов.

Так как

$$[\overrightarrow{P_0P_1^*},\ \overrightarrow{P_0P_3^*}]=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ hx'_{u_i}&hy'_{u_i}&hz'_{u_i}\\ hx'_{v_i}&hy'_{v_i}&hz'_{v_i}\end{vmatrix}=$$

$$=h^2\begin{vmatrix}y'_{u_i}&z'_{u_i}\\ y'_{v_i}&z'_{v_i}\end{vmatrix}\mathbf{i}+h^2\begin{vmatrix}z'_{u_i}&x'_{u_i}\\ z'_{v_i}&x'_{v_i}\end{vmatrix}\mathbf{j}+h^2\begin{vmatrix}x'_{u_i}&y'_{u_i}\\ x'_{v_i}&y'_{v_i}\end{vmatrix}\mathbf{k},$$

то

$$\sigma_i^*=\sqrt{\begin{vmatrix}x'_{u_i}&y'_{u_i}\\ x'_{v_i}&y'_{v_i}\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}y'_{u_i}&z'_{u_i}\\ y'_{v_i}&z'_{v_i}\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}z'_{u_i}&x'_{u_i}\\ z'_{v_i}&x'_{v_i}\end{vmatrix}^2}\,h^2=$$

$$=\sqrt{\left(x'^2_{u_i}+y'^2_{u_i}+z'^2_{u_i}\right)\left(x'^2_{v_i}+y'^2_{v_i}+z'^2_{v_i}\right)-\left(x'_{u_i}x'_{v_i}+y'_{u_i}y'_{v_i}+z'_{u_i}z'_{v_i}\right)^2}\,h^2=$$

$$=\sqrt{EG-F^2}\,h^2=\sqrt{EG-F^2}\,\alpha_i^*.$$

---

* Мы пользуемся следующим тождеством Лагранжа, которое нетрудно проверить

$$\begin{vmatrix}a_1&b_1\\ a_2&b_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}b_1&c_1\\ b_2&c_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}c_1&a_1\\ c_2&a_2\end{vmatrix}^2=$$

$$=\left(a_1^2+b_1^2+c_1^2\right)\left(a_2^2+b_2^2+c_2^2\right)-\left(a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2\right)^2.$$

Просуммировав площади параллелограммов σ_i^*, получим площадь пластинчатой поверхности:

$$\sum \sigma_i^* = \sum \sqrt{(EG - F^2)}_{\substack{u=u_i \\ v=v_i}} \alpha_i$$

в виде интегральной суммы от функции $\sqrt{EG - F^2}$, распространенной на все квадратные ячейки α_i, содержащиеся внутри $\overline{D}_{uv}$. Перейдя к пределу, получим:

$$S = \lim \sum \sqrt{(EG - F^2)}_{\substack{u=u_i \\ v=v_i}} \alpha_i = \int\int_{D_{uv}} \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv, \text{ ч. т. д.}$$

Рассмотрим частный случай, когда простой кусок S есть график функции $z = f(x, y)$ гладкой в простой квадрируемой замкнутой области D_{xy}. Приняв за параметры координаты x и y, получим:

$$E = x_x'^2 + y_x'^2 + z_x'^2 = 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2; \quad G = x_y'^2 + y_y'^2 + z_y'^2 = 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2;$$

$$F = x_x' x_y' + y_x' y_y' + z_x' z_y' = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} \text{ и}$$

$$EG - F^2 = 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2;$$

откуда

$$S = \int\int_{D_{xy}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy.$$

Геометрическая интерпретация. Ячейка α_i есть квадрат $x_i \leqslant x \leqslant x_i + h$, $y_i \leqslant y \leqslant y_i + h$ в плоскости (x, y) уравнение касательной плоскости к поверхности имеет вид:

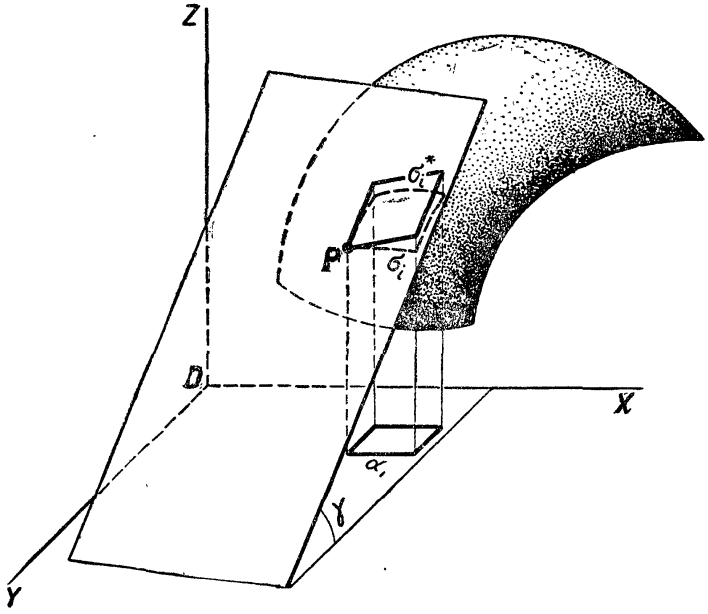
$$z^* - z - (x^* - x)\frac{\partial f}{\partial x} - (y^* - y)\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Выражение $\dfrac{1}{\sqrt{1 + (f_x')^2 + (f_y')^2}}$ есть косинус двугранного угла (острого) γ, который образует касательная плоскость с плоскостью (x, y) (черт. 243). Площадь поверхности есть предел интегральной суммы $\sum \sqrt{1 + (f_x')^2 + (f_y')^2}\alpha_i$, привзнос ячейки α_i в этой сумме равен $\sigma_i^* = \dfrac{1}{\cos \gamma_i}\alpha_i$. Из равенства $\alpha_i = \sigma_i^* \cos \gamma_i$ следует, что α_i есть проекция σ_i^* на плоскость (x, y).

Иными словами, в рассматриваемом случае σ_i^* есть параллелограмм, который высекают на касательной плоскости к поверхности в точке (x_i, y_i, z_i) вертикальные (параллельные оси OZ) плоскости, проходящие через стороны квадрата α_i.

Примеры.

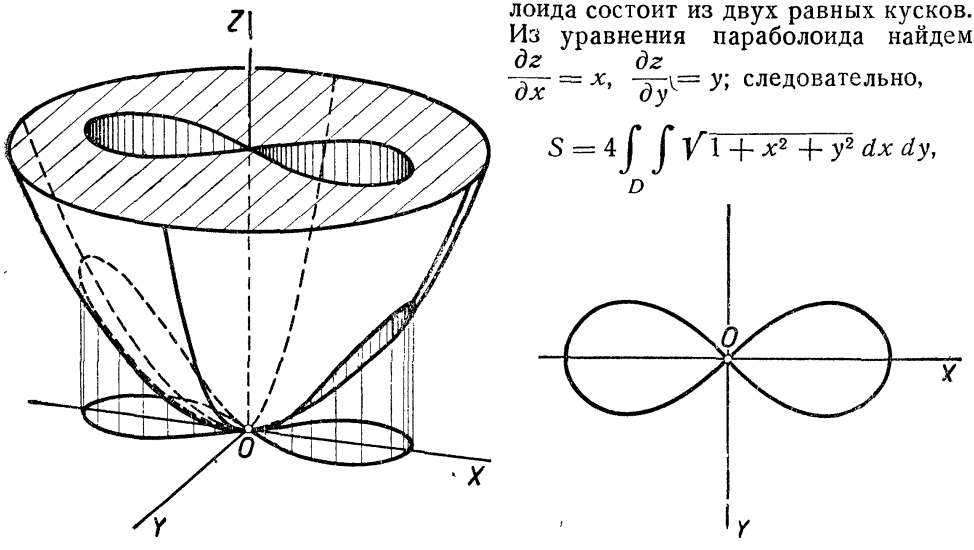
1. Вычислить площадь S части поверхности параболоида $2z = x^2 + y^2$, вырезанной цилиндром $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$ (черт. 244).



Черт. 243.

Основанием цилиндра является лемниската; вырезаемая им часть параболоида состоит из двух равных кусков. Из уравнения параболоида найдем $\frac{\partial z}{\partial x} = x$, $\frac{\partial z}{\partial y} = y$; следовательно,

$$S = 4\int_D \int \sqrt{1 + x^2 + y^2}\, dx\, dy,$$



Черт. 244.

где интеграл распространяется на область, ограниченную половиной петли лемнискаты (параболоид и цилиндр симметричны относительно плоскостей,

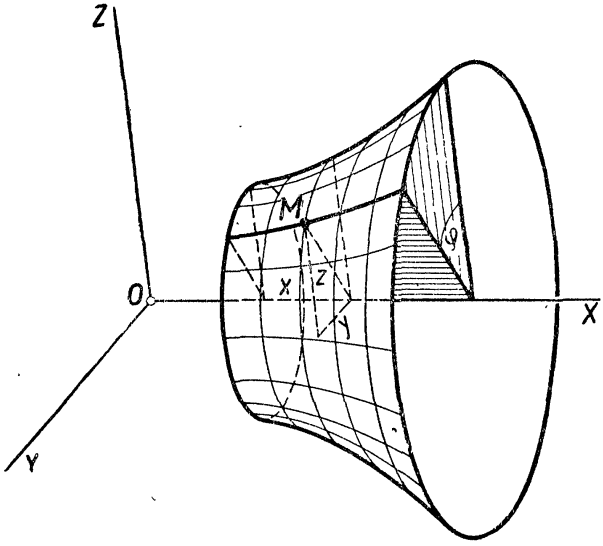
(x, z) и (y, z)). Выполнив преобразование к полярным координатам, получим:

$$S = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\sqrt{\cos 2\varphi}} \sqrt{1+\rho^2}\,\rho\, d\rho = \frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (2\sqrt{2}\cos^3\varphi - 1)\, d\varphi = \frac{20}{9} - \frac{\pi}{3}.$$

2. Вычислить площадь S части поверхности сферы $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, вырезаемую цилиндром $x^2 + y^2 - rx = 0$.

Рассматриваемая часть состоит из двух равных кусков, ограничивающих снизу и сверху тело Вивиани (см. пример 1, стр. 446). Рассмотрим параметрические уравнения сферы

$$x = r\cos\varphi\sin\theta,$$
$$y = r\sin\varphi\sin\theta,$$
$$z = r\cos\theta.$$



Черт. 245.

В сферических координатах уравнение цилиндра принимает вид:

$$(\rho\cos\varphi\sin\theta)^2 + (\rho\sin\varphi\sin\theta)^2 - r\rho\cos\varphi\sin\theta = 0$$

или $\rho\sin\theta - r\cos\varphi = 0$; на поверхности сферы $\rho = r$, а потому $\sin\theta = \cos\varphi$ есть уравнение в географических координатах линии пересечения сферы и цилиндра. В силу симметрии тела Вивиани относительно плоскостей (x, y) и (x, z) достаточно вычислить четвертую часть поверхности, содержащуюся в первом октанте: $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$, $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$. При этих условиях из уравнения $\sin\theta = \cos\varphi$ находим $\theta = \frac{\pi}{2} - \varphi$.

Следовательно, рассматриваемая часть поверхности может быть задана неравенствами $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2} - \varphi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Из уравнений сферы находим:

$$E = x_\varphi'^2 + y_\varphi'^2 + z_\varphi'^2 = r^2\sin^2\theta;\quad G = x_\theta'^2 + y_\theta'^2 + z_\theta'^2 = r^2,$$
$$F = x_\varphi' x_\theta' + y_\varphi' y_\theta' + z_\varphi' z_\theta' = 0;\quad \sqrt{EG - F^2} = r^2\sin\theta.$$

Следовательно,

$$S = 4\iint_{D_{\varphi\theta}} \sqrt{EG - F^2}\, d\varphi\, d\theta = 4r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}-\varphi} \sin\theta\, d\theta =$$

$$= 4r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin\varphi)\, d\varphi = 4r^2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right).$$

3. Дуга $z=f(x)$, где $a\leqslant x\leqslant b$ и $f(x)>0$ в плоскости (x, z), вращается вокруг оси OX. Вычислить площадь поверхности тела вращения.

Составим параметрические уравнения поверхности вращения, приняв за параметры x и угол φ, образуемый вращающейся плоскостью с плоскостью (x, z). Пусть $M(x, y, z)$ — любая точка поверхности; имеем (черт. 245):

$$x=x,\quad y=f(x)\sin\varphi,\quad z=f(x)\cos\varphi,$$

откуда

$$E=x_x'^2+y_x'^2+z_x'^2=1+[f'(x)]^2,\quad G=x_\varphi'^2+y_\varphi'^2+z_\varphi'^2=[f(x)]^2,$$
$$F=x_x'x_\varphi'+y_x'y_\varphi'+z_x'z_\varphi'=0.$$

Поверхность вращения служит образом прямоугольника $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$, $a\leqslant x\leqslant b$; следовательно,

$$S=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_a^b\sqrt{EG-F^2}\,dx=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx.$$

Мы получили ту же формулу, которая была выведена для поверхности тела вращения в интегральном исчислении функции одного аргумента.

§ 96. Основные свойства площади поверхности

Площадь кривой поверхности (параметризуемой гладкими функциями) обладает нижеследующими свойствами, присущими площадям плоских фигур.

1°. *Площадь простого куска есть положительное число.*

В самом деле, подинтегральная функция $\sqrt{EG-F^2}$ есть непрерывная положительная функция параметров. Следовательно,

$$S=\iint_{D_{uv}}\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv>0\ *.$$

2°. Пусть $D_1, D_2, \ldots, D_n$ — произвольное разбиение замкнутой области $\overline{D}_{uv}$ на n квадрируемых частей. Этому разбиению соответствует разбиение куска поверхности S на n частей $S_1, S_2, \ldots, S_n$.

Теорема (свойство аддитивности). *Площадь куска S равна сумме площадей частей $S_1, S_2, \ldots, S_n$:*

$$S=S_1+S_2+\ldots+S_n.$$

Доказательство. В самом деле, в силу свойства аддитивности интеграла имеем:

$$S=\iint_{D_{uv}}\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv=\iint_{D_1}+\iint_{D_2}+\ldots+\iint_{D_n}=S_1+S_2+\ldots S_n,\ \text{ч. т. д.}$$

3°. ***Теорема.*** *Площадь данного куска поверхности является одним и тем же числом независимо от способа параметризации поверхности.*

Доказательство. Составим выражение для суммы квадратов дифференциалов координат при данной параметризации поверхности:

$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2=(x_u'\,du+x_v'\,dv)^2+(y_u'\,du+y_v'\,dv)^2+$$
$$+(z_u'\,du+z_v'\,dv)^2=E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2.$$

---

* Будучи равным сумме квадратов миноров матрицы Якоби, выражение $EG-F^2$ может обратиться в нуль лишь в особых точках поверхности.

Полученная квадратичная форма относительно du и dv называется метрической формой поверхности, так как она выражает квадрат дифференциала длины дуги линии, лежащей на поверхности.

Предположим, что переход к другой параметризации осуществляется посредством взаимно однозначного регулярного отображения

$$u = u(\xi, \eta), \quad v = v(\xi, \eta).$$

Дифференциалы параметров преобразуются посредством аффинного (относительно этих дифференциалов) отображения:

$$du = u'_\xi\, d\xi + u'_\eta\, d\eta, \quad dv = v'_\xi\, d\xi + v'_\eta\, d\eta. \tag{1}$$

Метрическая форма в новой параметризации

$$E_1\, d\xi^2 + 2F_1\, d\xi\, d\eta + G_1\, d\eta^2$$

может быть получена при помощи аффинного преобразования (1) метрической формы в первоначальной параметризации. Как известно, при аффинном преобразовании дискриминант квадратичной формы умножается на квадрат детерминанта преобразования, а потому имеем:

$$E_1G_1 - F_1^2 = (EG - F^2)\begin{vmatrix} u'_\xi & u'_\eta \\ v'_\xi & v'_\eta \end{vmatrix}^2 = (EG - F^2)\left[\frac{D(u, v)}{D(\xi, \eta)}\right]^2$$

(последнее равенство легко проверить и непосредственным вычислением).

Преобразуем выражение для площади поверхности к новым параметрам:

$$S = \iint\limits_{D_{uv}} \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv = \iint\limits_{D_{\xi\eta}} \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{D(u, v)}{D(\xi, \eta)}\right)^2}(E_1G_1 - F_1^2)}\left|\frac{D(u, v)}{D(\xi, \eta)}\right| d\xi\, d\eta =$$

$$= \iint\limits_{D_{\xi\eta}} \sqrt{E_1G_1 - F_1^2}\, d\xi\, d\eta.$$

Итак, при новой параметризации площадь S выражается той же формулой.

4°. *Два равные куска поверхности имеют одну и ту же площадь.*

Если куски S и S_1 являются конгруэнтными фигурами, то S_1 может быть получен из S при помощи ортогонального преобразования:

$$x_1 = \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z + a,$$
$$y_1 = \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z + b,$$
$$z_1 = \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z + c.$$

При этом дифференциалы испытывают соответствующее однородное ортогональное преобразование:

$$dx_1 = \alpha_1\, dx + \beta_1\, dy + \gamma_1\, dz \quad \text{и т. д.}$$

Как известно из аналитической геометрии, при однородном ортогональном преобразовании сумма квадратов координат (в данном случае дифференциалов) не меняется, а потому

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2.$$

Итак, метрическая форма, а следовательно, и ее дискриминант $EG - F^2$ остаются неизменными.

Свойства 3° и 4° показывают, что площадь поверхности есть геометрический инвариант, не зависящий ни от способа параметризации, ни от выбора системы координат и определяющийся лишь самой поверхностью.

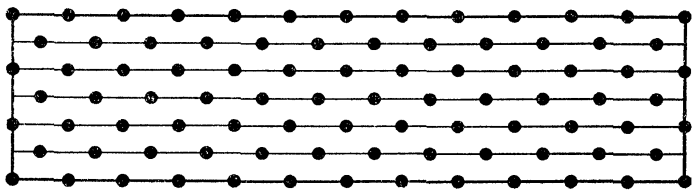
5°. *Если кусок поверхности S является плоским (квадрируемым), то формула площади кривой поверхности выражает его площадь (в обычном смысле).*

В самом деле, пусть D_{xy} — квадрируемая область в плоскости (x, y) при простейшем способе параметризации $x = x$, $y = y$, $z = 0$; получим:

$$\iint\limits_{D_{xy}} \sqrt{EG - F^2}\, dx\, dy = \iint\limits_{D_{xy}} dx\, dy = D_{xy}.$$

Это свойство позволяет понятие площади кривой поверхности рассматривать как о б о б щ е н и е понятия площади плоской фигуры.

Если основываться на аналогии с определением длины дуги кривой линии, то казалось бы естественным площадь куска кривой поверхности определить как предел площади поверхности «вписанной» многогранной поверхности, т. е. м н о г о г р а н н и к а с достаточно малыми гранями, вершины которого



Черт. 246.

расположены на данной к р и в о й поверхности. Однако оказывается, что для к р и в о й поверхности предел площадей вписанных многогранников н е с у щ е с т в у е т, и рассматривать площадь поверхности как этот предел н е и м е е т с м ы с л а. Покажем это на примере ц и л и н д р и ч е с к о й поверхности.

Пример.

Рассмотрим боковую поверхность прямого круглого цилиндра; для простоты положим радиус основания и высоту равными 1.

Разделим высоту цилиндра на n равных частей и через точки деления проведем плоскости, перпендикулярные оси. В сечениях с поверхностью получается $n + 1$ окружностей (считая также окружности верхнего и нижнего оснований). Каждую из этих окружностей разделим на m равных частей, так чтобы точки деления следующей окружности приходились над серединами тех дуг, на которые разделена предыдущая окружность. На чертеже 246 представлены точки деления на развертке боковой поверхности цилиндра. Рассмотрим вписанный многогранник, гранями которого являются равнобедренные треугольники; эти треугольники имеют основаниями хорды, соединяющие соседние точки деления горизонтальных окружностей, а вершинами — точки деления соседних (верхней и нижней) окружностей, лежащие над и под серединой дуги, стягиваемой основанием. Построенный таким образом многогранник Π составлен из $2mn$ равных треугольников (черт. 247). Основание и высота каждого из этих треугольников равны соответственно:

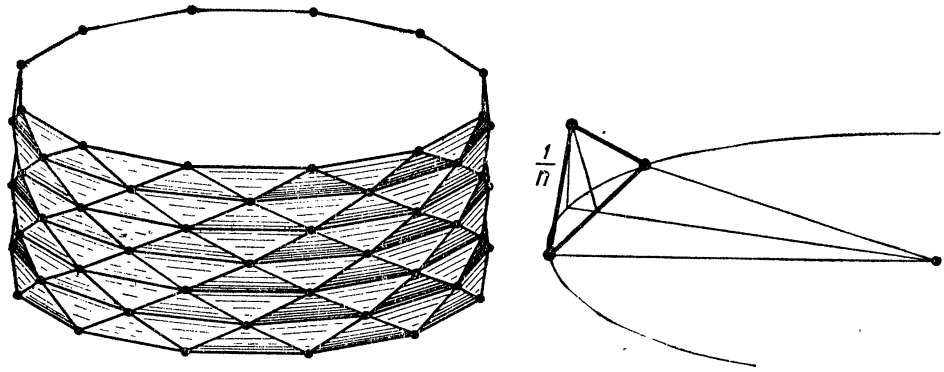
$$2 \sin \frac{\pi}{m} \quad \text{и} \quad \sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(1 - \cos \frac{\pi}{m}\right)^2}.$$

Следовательно, площадь вписанного многогранника равна

$$S_{\text{П}} = 2mn \sin\frac{\pi}{m}\sqrt{\frac{1}{n^2}+\left(1-\cos\frac{\pi}{m}\right)^2} = 2\pi E\sqrt{1+\frac{\pi^4}{4}\left(\frac{n}{m^2}\right)^2 E_1}$$

$\left(\text{где } \lim\limits_{m\to+\infty} E = \lim\limits_{m\to+\infty} E_1 = 1\right)$.

Так как $\lim\limits_{\substack{m\to+\infty\\ n\to+\infty}}\left(\frac{n}{m^2}\right)$ не существует, то не существует и $\lim S_{\text{П}}$. Пусть $n = m = k$ (k — любое натуральное число), для таких многогранников $\lim S_{\text{П}} = 2\pi$, т. е. в пределе получается то же число, которое принимается в элементарной



Черт. 247.

геометрии за площадь боковой поверхности цилиндра. Рассмотрим последовательность многогранников, для которых $n = k^2$, $m = k$. Для таких многогранников $\lim S_{\text{П}} = 2\pi\sqrt{1+\frac{\pi^4}{4}}$. Если же положить $n = k^4$, $m = k$, то получим $\lim S_{\text{П}} = +\infty$, такие многогранники могут иметь как угодно большую площадь поверхности.

Этот пример показывает, что площади поверхностей двух вписанных в одну и ту же поверхность многогранников могут не быть близкими, хотя оба многогранника берутся «как угодно близкими» к одной и той же поверхности.

Примечание. Существует большое количество «парадоксов», в которых вычисление площади одной и той же поверхности (например, шара) двумя «различными способами» приводит к различным результатам. Все эти «парадоксы» основаны на наивной уверенности, что площади поверхностей произвольных вписанных многогранников (или каких-либо других фигур) имеют общий предел. Однако на самом деле это не так, упомянутый общий предел не существует, и всегда можно построить частного вида вписанные фигуры, поверхности которых имеют различные пределы.

§ 97. Приложения кратных интегралов к механике

Рассмотрим кубируемое тело V. Отношение массы M тела V к его объему $\frac{M}{V}$ называется в физике средней плотностью данного тела. Пусть $X(x, y, z)\in V$ — данная точка, а $U_\varepsilon \subset V$ — ее ε-окрест-

ность, обозначим через μ_ε среднюю плотность рассматриваемой окрестности $\mu_\varepsilon = \frac{M_\varepsilon}{U_\varepsilon}$.

Предел $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \mu_\varepsilon = \mu(x, y, z)$ называется плотностью тела V в данной точке X.

Пусть V — данное, вообще говоря, неоднородное тело, а $\mu(x, y, z)$ — его плотность в точке $X(x, y, z)$. Разделим тело V на ячейки и рассмотрим какую-либо одну из этих ячеек с объемом ΔV_i. Пусть (x_i, y_i, z_i) — произвольная точка, принадлежащая ΔV_i. Считая ячейку ΔV_i достаточно малой, будем рассматривать ее как однородное тело с плотностью $\mu(x_i, y_i, z_i)$, равной значению плотности в точке (x_i, y_i, z_i). Произведение $\Delta M_i = \mu(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i$ можно рассматривать как приближенное значение массы ячейки. Произведя суммирование по всем ячейкам, мы получим приближенное значение массы данного тела V:

$$\sum \Delta M_i = \sum \mu(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i.$$

Найденное выражение есть интегральная сумма, составленная для функции $\mu(x, y, z)$, а ее предел даст истинное значение массы M данного тела:

$$M = \lim \sum \mu(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i = \iiint\limits_V \mu(x, y, z)\,dx\,dy\,dz.$$

Для вычисления координат центра тяжести тела V вспомним известные из аналитической геометрии формулы для координат центра тяжести конечного множества материальных точек. Если в точках

$$M_1(x_1, y_1, z_1),\ M_2(x_2, y_2, z_2),\ \ldots,\ M_n(x_n, y_n, z_n)$$

сосредоточены соответственно массы $m_1, m_2, \ldots, m_n$, то абсцисса центра тяжести данной системы точек вычисляется по формуле:

$$\bar{x} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = \frac{\sum m_ix_i}{\sum m_i}.$$

Аналогичные формулы имеют место для ординаты и аппликаты центра тяжести. Разбив данное тело на малые ячейки, будем считать массу каждой ячейки сосредоточенной в какой-либо его одной точке (x_i, y_i, z_i). Заменим каждую ячейку ΔV_i материальной точкой, в которой сосредоточена масса

$$\Delta M_i = \mu(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i,$$

тогда для абсциссы центра тяжести получим значение:

$$\frac{\sum x_i\mu(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i}{\sum \mu(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i}.$$

Истинным значением абсциссы центра тяжести данного тела называется предел

$$\bar{x} = \lim \frac{\sum x_i \mu(x_i, y_i, z_i)\,\Delta V_i}{\sum \mu(x_i, y_i, z_i)\,\Delta V_i} = \frac{\int\int\int x\mu\,dx\,dy\,dz}{\int\int\int \mu\,dx\,dy\,dz} = \frac{\int\int\int x\mu\,dV}{M},$$

где M — масса тела V. Для ординаты и аппликаты центра тяжести получаются аналогичные формулы. Если тело V является однородным, то $\mu(x, y, z) = \mu = \text{const}$, и полученные формулы принимают вид:

$$\bar{x} = \frac{\int\int\int x\,dV}{V} \quad \text{и т. д., где } V \text{ — объем тела } V.$$

Тем же методом может быть вычислен момент инерции тела относительно данной оси. Моментом инерции материальной точки относительно прямой называется произведение ее массы на квадрат расстояния от точки до прямой. Вычислим, например, момент инерции тела V относительно оси OZ; разбив V на ячейки, получим для момента инерции ячейки ΔV_i следующее приближенное значение:

$$\Delta I_i = (x_i^2 + y_i^2)\,\mu(x_i, y_i, z_i)\,\Delta V_i.$$

Суммируя и переходя к пределу, получим по определению искомое значение момента инерции тела V:

$$I = \int\limits_V\int\int (x^2 + y^2)\,\mu\,dx\,dy\,dz.$$

Примеры.

1. Вычислить координаты центра тяжести однородного конуса, вершина которого находится в начале координат, а ось совпадает с осью OZ. Пусть R и H — радиус основания и высота конуса. Вследствие симметрии конуса относительно его оси имеем $\bar{x} = \bar{y} = 0$, координату $\bar{z}$ вычислим по формуле:

$$\bar{z} = \frac{\int\int\int z\,dV}{V}.$$

Для преобразования тройного интеграла в числителе составим уравнение поверхности конуса в цилиндрических координатах. Из чертежа 248 (на котором конус изображен в разрезе), пользуясь подобием треугольников, найдем:

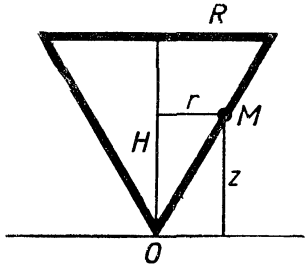
$$\frac{z}{H} = \frac{r}{R}, \quad \text{откуда} \quad r = \frac{R}{H}z.$$

Интегрируя сперва по r, а затем по z и φ, получим:

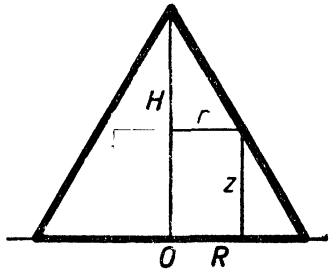
$$\iiint_V z\,dV = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^H z\,dz \int_0^{\frac{R}{H}z} r\,dr = \frac{\pi R^2}{H^2}\int_0^H z^3\,dz = \frac{\pi R^2 H^2}{4},$$

откуда $\bar{z} = \frac{3}{4}H$.

2. Вычислить момент инерции однородного конуса ($\mu = 1$) относительно диаметра основания. Примем диаметр основания за ось OX, а основание конуса за плоскость (x, y). На чертеже 249 тело изображено в разрезе. Квадрат расстояния точки до оси OX равен $y^2 + z^2 = r^2\sin^2\varphi + z^2$ (в цилиндрических координатах). Уравнение поверхности конуса найдем из подобия треугольников:



Черт. 248.



Черт. 249.

$$\frac{z}{H} = \frac{R-r}{R},$$

где H — высота и R — радиус основания. Имеем:

$$I = \iiint (y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r\,dr \int_0^{\frac{R-r}{R}H} (r^2\sin^2\varphi + z^2)\,dz =$$

$$= \frac{\pi H R^2}{60}(2H^2 + 3R^2).$$

ГЛАВА X

КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ. ИНТЕГРАЛЫ ПО ПОВЕРХНОСТИ

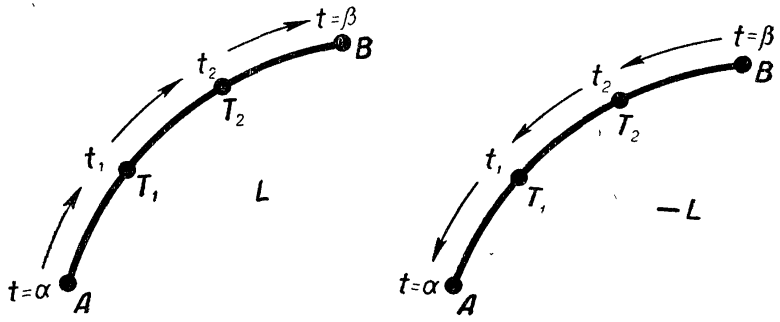
§ 98. Ориентированные линии

Рассмотрим простую линию L:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta \qquad (L)$$

(в случае простой замкнутой линии $x(\alpha) = x(\beta)$ и $y(\alpha) = y(\beta)$).

Принято на линии L устанавливать соотношение взаимного расположения точек одним из следующих способов: *из двух произвольных различных точек T_1 и T_2 предшествующей считается либо*



Черт. 250.

a) *точка, соответствующая меньшему значению параметра, либо*

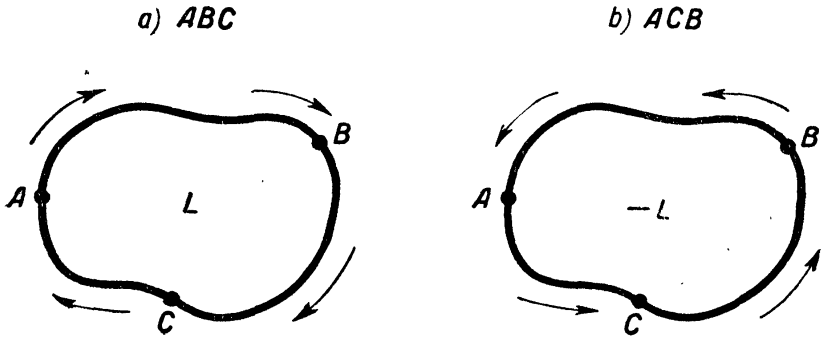
b) *точка, соответствующая большему значению параметра.*

Линия, на которой установлено соотношение взаимного расположения точек, называется ориентированной (направленной). Два способа ориентации a) и b) называются взаимно противоположными направлениями на данной линии L.

Если точка T_1 предшествует точке T_2, то точка T_2 считается следующей за T_1. Если T_1 предшествует T_2, то пишут $T_1 \prec T_2$. Если $t_1 < t_2$, то при способе ориентации a) имеем $T_1 \prec T_2$, а при способе b) $T_2 \prec T_1$ (черт. 250).

Точка ориентированной простой дуги, предшествующая всем прочим точкам, называется началом, а точка, следующая за всеми

прочими точками, — концом дуги. При способе ориентации a) точка $A(x(\alpha), y(\alpha))$ есть начало, а точка $B(x(\beta), y(\beta))$ — конец; при способе b) B — начало и A — конец. Для обозначения простой ориентированной дуги на первом месте пишут букву, обозначающую начало, а на втором — букву, обозначающую конец.



Черт. 251.

Если L есть ориентированная дуга AB, то та же дуга при противоположной ориентации обозначается символом $-L$ или BA.

Для обозначения ориентированной замкнутой линии указывают три ее попарно различные точки в порядке их следования (черт. 251).

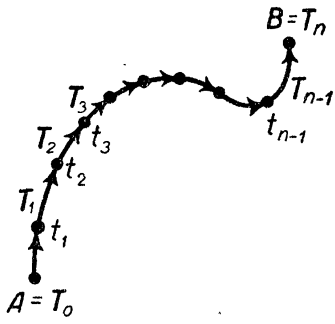
Разбиением ориентированной линии L называется такое ее разбиение, при котором точки деления $T_0, T_1, \ldots, T_n$ нумеруются в порядке следования (черт. 252):

$$A = T_0 \prec T_1 \prec T_2 \prec \cdots \prec T_{n-1} \prec T_n = B.$$

Разбиению дуги соответствует разбиение

$$t_0 = \alpha,\ t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_n = \beta$$

сегмента $[\alpha, \beta]$, этот сегмент может быть положительным ($\alpha < \beta$) или отрицательным ($\alpha > \beta$) в зависимости от ориентации L.



Черт. 252.

Все сказанное применимо к пространственным простым дугам и замкнутым линиям.

Обычно, если не сделано никаких оговорок, под ориентацией линии подразумевается та ориентация, в которой следующей считается точка, соответствующая большему значению параметра (способ a).

Примеры.

1. Для отрезка

$$x = a_1 + t(a_2 - a_1),\quad y = b_1 + t(b_2 - b_1),\quad \text{где } 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

точка $A(a_1, b_1)$ является началом, точка $B(a_2, b_2)$ — концом.

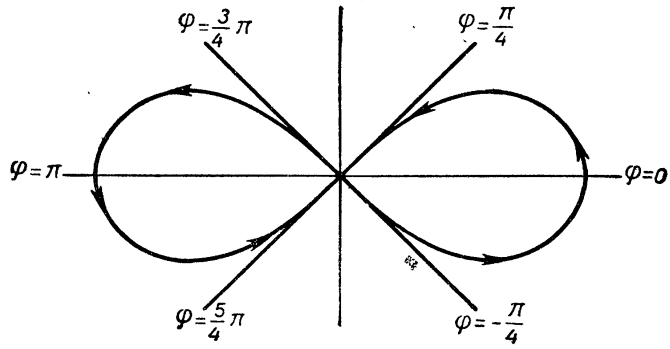
2. Для окружности, параметризованной уравнениями

$$x = a\cos t, \quad y = a\sin t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi,$$

имеем:

$$A_1(1, 0) \prec A_2(0, 1) \prec A_3(-1, 0).$$

Для полуокружности, представленной уравнением $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ (параметр x), имеем $A_3(-1, 0) \prec A_2(0, 1) \prec A_1(1, 0)$.



Черт. 253.

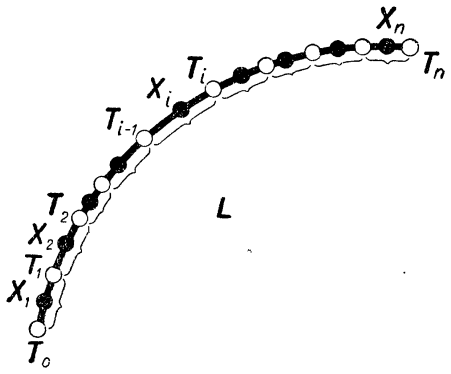
Два указанные способа параметризации определяют на одной и той же полуокружности противоположные направления.

3. Полярное уравнение лемнискаты $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$ (параметр φ) ориентирует ее петли, как показано на чертеже 253.

§ 99. Криволинейные интегралы

Пусть $P(x, y)$ — функция, ограниченная на ориентированной линии L. Рассмотрим некоторое разбиение L и обозначим через $X_1(\xi_1, \eta_1)$, $X_2(\xi_2, \eta_2)$, ..., $X_n(\xi_n, \eta_n)$ точки, произвольно выбранные на соответствующих частичных дугах (криволинейных ячейках):

$$X_1 \in T_0T_1, \quad X_2 \in T_1T_2, \quad \ldots,$$
$$X_n \in T_{n-1}T_n \text{ (черт. 254).}$$



Черт. 254.

Определение. *Сумма парных произведений разностей абсцисс точек деления $x(t_i) - x(t_{i-1})$ на значения функции $P(x, y)$ в соответствующих точках X_i называется интегральной суммой по абсциссе:*

$$S_x = \sum P(X_i)\big(x(t_i) - x(t_{i-1})\big) =$$
$$= P(\xi_1, \eta_1)(x_1 - x_0) + P(\xi_2, \eta_2)(x_2 - x_1) + \ldots + P(\xi_n, \eta_n)(x_n - x_{n-1}).$$

Аналогично определяется интегральная сумма по ординате

$$S_y = \sum Q(X_i)\big(y(t_i) - y(t_{i-1})\big),$$

где $Q(X)$ — функция, ограниченная на L.

Если линия L спрямляема, то можно составлять интегральные суммы по длине дуги:

$$S_s = \sum P(X_i)(s_i - s_{i-1}).$$

Определение. *Криволинейным интегралом* $\int_L P\,dx$ *по абсциссе вдоль линии* L *называется предел интегральных сумм по абсциссе,*

$$\int_L P\,dx = \lim S_x = \lim \sum P(\xi_i, \eta_i)(x(t_i) - x(t_{i-1})).$$

В этом определении термин «предел» понимается в том же смысле, как предел обычных интегральных сумм; именно неравенство

$$\left| S_x - \int_L P\,dx \right| < \varepsilon$$

должно выполняться для произвольного достаточно мелкого δ-разбиения сегмента $[\alpha, \beta]$ (т. е. если диаметры $|t_i - t_{i-1}|$ всех ячеек меньше, чем число $\delta > 0$, определяемое заданием ε).

Примечание. Условие $|t_i - t_{i-1}| < \delta$ можно заменить следующим: каждая из частичных дуг $T_{i-1}T_i$ является δ-дугой (см. т. I, § 145). В самом деле, в силу взаимной однозначности и непрерывности отображения линии L и сегмента $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ всякому достаточно мелкому разбиению $[\alpha, \beta]$ соответствует достаточно мелкое разбиение дуги, и обратно, достаточно мелкому разбиению дуги соответствует достаточно мелкое разбиение сегмента.

Аналогично определяются криволинейные интегралы по ординате и по длине дуги (от данной функции вдоль данной линии) как пределы соответственных интегральных сумм:

$$\int_L Q\,dy = \lim S_y \quad \text{и} \quad \int_L F\,ds = \lim S_s.$$

Криволинейным интегралом $\int_L P\,dx + Q\,dy$ называется сумма интегралов $\int_L P\,dx$ и $\int_L Q\,dy$

$$\int_L P\,dx + Q\,dy = \int_L P\,dx + \int_L Q\,dy.$$

Примечание. Каждый из интегралов $\int_L P\,dx$ и $\int_L Q\,dy$ можно представить в виде $\int_L P\,dx + Q\,dy$. Так, например, положив $Q(x, y) = \text{const} = 0$, получим $\int_L P\,dx = \int_L P\,dx + Q\,dy$.

Определения криволинейных интегралов остаются в силе применительно к функциям любого числа аргументов, рассматриваемых на простых линиях в пространстве соответствующего числа измерений. Так, для функций трех аргументов рассматриваются следующие криволинейные интегралы:

$$\int_L P(x, y, z)\,dx, \quad \int_L Q(x, y, z)\,dy, \quad \int_L R(x, y, z)\,dz,$$

$$\int P\,dx + Q\,dy + R\,dz \quad \text{и} \quad \int A(x, y, z)\,ds.$$

Свойства криволинейных интегралов. Достаточно (в целях краткости) ограничиться рассмотрением интегралов вида $\int P\,dx$.

1°. Дистрибутивность:

$$\int_L (C_1P_1 + C_2P_2 + \ldots + C_nP_n)\,dx =$$

$$= C_1\int_L P_1\,dx + C_2\int_L P_2\,dx + \ldots + C_n\int_L P_n\,dx,$$

в предположении, что каждый из интегралов $\int_L P_i\,dx$ *существует.*

Доказательство такое же, как для обычных интегралов.

2°. Аддитивность. *Если существует интеграл* $\int P\,dx$ *вдоль каждой из дуг* A_0A_1, A_1A_2, ..., $A_{n-1}A_n$, *то существует* $\int_{A_0A_n} P\,dx$, *и имеет место равенство,*

$$\int_{A_0A_n} P\,dx = \int_{A_0A_1} P\,dx + \int_{A_1A_2} P\,dx + \ldots + \int_{A_{n-1}A_n} P\,dx.$$

Доказательство. Пусть, например, линия AB составлена из двух дуг AC и CB и интегралы $\int_{AC} P\,dx$ и $\int_{CB} P\,dx$ существуют. Рассмотрим любое разбиение (σ_{AB}) дуги AB. Присоединив точку C к точкам деления, получим разбиения (σ_{AC}) и (σ_{CB}) дуг AC и CB. Составим интегральные суммы по абсциссе S_{AB}, S_{AC} и S_{CB} вдоль соответствующих дуг, при этом точки X_k в ячейках, не содержащих точки C, для дуги AB и дуг AC и CB выберем одними и теми же. В разности $S_{AB} - (S_{AC} + S_{CB})$ сократятся привзносы ячеек, не содержащих точки C:

$$S_{AB} - (S_{AC} + S_{CB}) = (x_i - x_{i-1})\,P(X_i) - [(x_C - x_{i-1})\,P(X_i') + (x_i - x_C)\,P(X_i'')].$$

В силу непрерывности функции $x = x(t)$ при достаточно мелком разбиении каждая из разностей $x_i - x_{i-1}$, $x_C - x_{i-1}$ и $x_i - x_C$ по абсолютной величине будет меньшей ε, и тогда

$$|S_{AB} - (S_{AC} + S_{CB})| < 3M\varepsilon,$$

где $|P(X)| < M$ на дуге AB. Следовательно,

$$\lim S_{AB} = \lim (S_{AC} + S_{CB}) = \lim S_{AC} + \lim S_{CB},$$

т. е.

$$\int_{AB} P\,dx = \int_{AC} P\,dx + \int_{CB} P\,dx, \quad \text{ч. т. д.}$$

3°. *Если существует интеграл* $\int_L P\,dx$, *то существует интеграл* $\int_{-L} P\,dx$, *и имеет место равенство*:

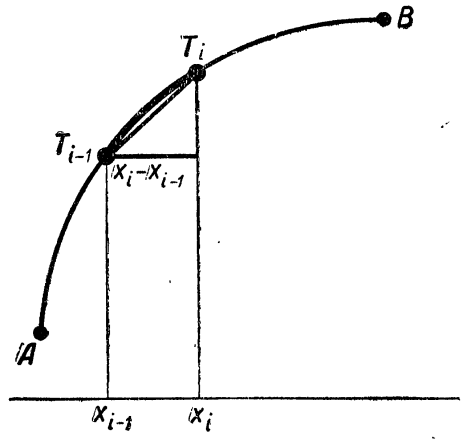
$$\int_L P\,dx = -\int_{-L} P\,dx.$$

В самом деле, достаточно принять во внимание, что ячейки $T_{i-1}T_i$ разбиения в суммах S_L и S_{-L} дают (каждая) взаимно противоположные привзносы $(x_i - x_{i-1})P(X_i)$ и $(x_{i-1} - x_i)P(X_i)$.

4°. *Если простая линия* L *спрямляема и* $\int_L P\,dx$ *существует, то имеет место неравенство*:

$$\left|\int_L P\,dx\right| \leqslant ML, \text{ где } |P(X)| \leqslant M,$$

а через L обозначена как сама линия, так и ее длина.



Черт. 255.

Доказательство. Для интегральной суммы S_x имеем очевидные неравенства:

$$\left|\sum P(X_i)(x_i - x_{i-1})\right| \leqslant \sum |P(X_i)|\,|x_i - x_{i-1}| \leqslant M \sum |x_i - x_{i-1}|.$$

Так как $|x_i - x_{i-1}|$ не больше (черт. 255) длины отрезка $\overline{T_{i-1}T_i}$, а $\overline{T_{i-1}T_i}$ не больше длины стягиваемой криволинейной ячейки $T_{i-1}T_i$, то имеем и подавно:

$$|S_x| = \left|\sum P(X_i)(x_i - x_{i-1})\right| \leqslant M \sum T_{i-1}T_i = ML.$$

Следовательно,

$$\left|\int_L P\,dx\right| = \lim |S_x| \leqslant ML, \quad \text{ч. т. д.}$$

5°. *Если L есть отрезок, перпендикулярный оси абсцисс, то* $\int\limits_L P\,dx = 0$.

В самом деле, при любом разбиении L имеем: $x_0 = x_1 = \ldots = x_{i-1} = x_i = \ldots = x_n$, а потому

$$S_x = \sum P(X_i)(x_i - x_{i-1}) = 0.$$

Примечание. Свойства 3° и 5°, как это ясно из их смысла, не имеют места для интегралов по дуге.

Если линия интеграции L может быть разбита на конечное число частей $L_1, L_2, \ldots, L_n$, являющихся (каждая) либо простой дугой, либо простой замкнутой линией (петля), то под интегралом вдоль L принято понимать сумму интегралов, распространенных на части, составляющие L:

$$\int\limits_L = \int\limits_{L_1} + \int\limits_{L_2} + \ldots + \int\limits_{L_n}.$$

Нижеследующая теорема дает достаточное условие существования криволинейного интеграла.

Теорема. *Если*

1° *функция* $P\big(x(t), y(t)\big)$ *интегрируема на сегменте* $[\alpha, \beta]$,

2° *функция* $x(t)$ *имеет производную, интегрируемую на сегменте* $[\alpha, \beta]$,

то существует криволинейный интеграл по абсциссе вдоль линии

$$x = x(t), \quad y = y(t); \quad t \in [\alpha, \beta], \qquad (L)$$

и имеет место равенство:

$$\int\limits_L P\,dx = \int\limits_\alpha^\beta P\big(x(t), y(t)\big)\,x'(t)\,dt.$$

Доказательство. Составим интегральную сумму вдоль L по абсциссе

$$S_x = \sum P(X_i)[x(t_i) - x(t_{i-1})],$$

где $X_i(x(\theta_i), y(\theta_i))$ — произвольная точка дуги $T_{i-1}T_i$ и, следовательно, $\theta_i \in [t_{i-1}, t_i]$.

Применим формулу Лейбница-Ньютона и внесем числовой множитель $P(X_i)$ под знак интеграла:

$$P(X_i)[x(t_i) - x(t_{i-1})] = P(X_i)\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} x'(t)\,dt = \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} P(X_i)\,x'(t)\,dt.$$

Просуммировав, получим:

$$S_x = \sum \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} P(X_i)\,x'(t)\,dt.$$

По условию интеграл $\int_{\alpha}^{\beta} P(x(t), y(t))\, x'(t)\, dt$ существует. Представим этот интеграл в виде суммы интегралов, распространенных на ячейки разбиения сегмента $[\alpha, \beta]$ (соответствующего разбиению дуги):

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} P(x(t), y(t))\, x'(t)\, dt = \sum \int_{t_{i-1}}^{t_i} P(x(t), y(t))\, x'(t)\, dt.$$

Оценим абсолютную величину разности $S_x - I$:

$$|S_x - I| = \left| \sum \int_{t_{i-1}}^{t_i} [P(X_i) - P(x(t), y(t))]\, x'(t)\, dt \right|.$$

Имеем: $|P(X_i) - P(x(t), y(t))| \leqslant \omega_i$, где $\omega_i = M_i - m_i$ — колебание $P(x(t), y(t))$ на сегменте $[t_{i-1}, t_i]$. Производная $x'(t)$ (будучи интегрируемой) ограничена на $[\alpha, \beta]$; пусть $|x'(t)| < M$. Для $|S_x - I|$ получим неравенства;

$$|S_x - I| \leqslant \sum \omega_i M |t_i - t_{i-1}| = M \sum \omega_i |t_i - t_{i-1}| = M\Omega_P.$$

В силу предположенной интегрируемости функции $P(x(t), y(t))$ имеем $\lim \Omega_P = 0$, а потому

$$\lim S_x = I, \text{ т. е. } \int_L P\, dx = \int_{\alpha}^{\beta} P(x(t), y(t))\, x'(t)\, dt, \quad \text{ч. т. д.}$$

Доказанная теорема устанавливает условия, при которых вычисление криволинейного интеграла может быть сведено к вычислению обычного определенного интеграла.

Следствие I. *Если линия L кусочно гладкая, а ограниченная функция $P(x, y)$ непрерывна на L, за исключением, быть может, конечного числа точек разрыва, то $\int P dx$ существует.*

В самом деле, функции $P(x, y)$ и $x'(t)$ интегрируемы, так как каждая из них может иметь лишь конечное число точек разрыва (в угловых точках $x'(t)$ может не существовать).

Следствие II. Если L есть график функции $f(x)$, непрерывной на сегменте $[a, b]$, а ограниченная функция $P(X)$ непрерывна на L, за исключением, быть может, конечного числа точек разрыва, то, взяв в качестве параметра абсциссу ($t = x$, $x' = 1 = \text{const}$), получим:

$$\int_L P\, dx = \int_a^b P(x, f(x))\, dx.$$

Интеграл по длине дуги $\int_L F(x, y)\, ds$ может быть представлен в виде обычного интеграла, если за параметр взять длину дуги, от-

считываемую от начала дуги:

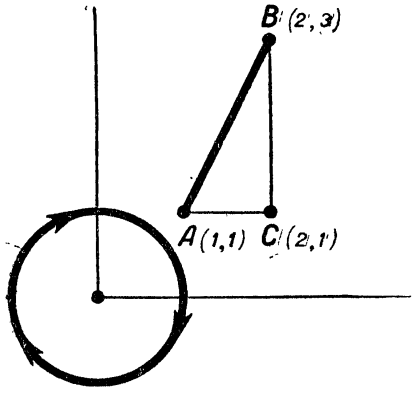
$$\int_L F(x,\ y)\,ds = \int_0^S F\big(x(s),\ y(s)\big)\,ds = \int_\alpha^\beta F\big(x(t),\ y(t)\big)\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt.$$

Формулировки и доказательства соответствующих теорем для интегралов $\int Q\,dy$ и $\int R\,dz$ предоставляем читателю.

Примечание. Легко доказать непосредственно, что значение интеграла $\int_\alpha^\beta P\big(x(t),\ y(t)\big)\,x'_t\,dt$ одно и то же при любом способе параметризации линии (косвенно это следует из доказанной теоремы). В самом деле, перейдем к новому параметру $t = t(\tau)$, (где $\alpha_1 < \tau < \beta_1$), тогда по формуле интегрирования подстановкой:

$$\int_\alpha^\beta P\big(x(t),\ y(t)\big)\,x'_t\,dt = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} P\big[x\big(t(\tau)\big),\ y\big(t(\tau)\big)\big]\,x'_t t'_\tau\,d\tau = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} P\big(x(\tau),\ y(\tau)\big)\,x'_\tau\,d\tau.$$

Мы получили интеграл того же вида, но в новой параметризации.



Черт. 256.

Примеры.

1. Вычислить интеграл

$$I = \int_L xy\,dx + (y-x)\,dy:$$

a) Вдоль отрезка A (1, 1) B (2, 3). Составив параметрические уравнения отрезка AB (черт. 256)

$$x = 1 + t,\quad y = 1 + 2t,$$

получим:

$$I = \int_0^1 [xyx' + (y-x)\,y']\,dt =$$

$$= \int_0^1 [(1+t)(1+2t) + 2t]\,dt =$$

$$= \int_0^1 (1 + 5t + 2t^2)\,dt = \frac{25}{6}.$$

b) Вдоль ломаной A (1, 1) C (2, 1) B (2, 3) (черт. 256). Вычислим интеграл вдоль звена AC ($y = 1$):

$$\int_{AC} xy\,dx + (y-x)\,dy = \int_{AC} xy\,dx = \int_0^2 x\,dx = \frac{3}{2}.$$

Вычислим интеграл вдоль звена CB ($x = 2$):

$$\int_{CB} xy\,dx + (y - x)\,dy = \int_1^3 (y - 2)\,dy = 0.$$

Следовательно, $I = \frac{3}{2}$.

c) Вдоль окружности $x^2 + y^2 = 1$, ориентированной в направлении вращения часовой стрелки. Окружности, ориентированной в направлении вращения часовой стрелки при параметризации $x = \cos\varphi$, $y = \sin\varphi$, соответствует отрицательный сегмент $[2\pi, 0]$; имеем:

$$I = \int_{2\pi}^{0} \left[xyx'_\varphi + (y - x)\,y'_\varphi\right] d\varphi = \int_0^{2\pi} (\sin^2\varphi\cos\varphi - \sin\varphi\cos\varphi + \cos^2\varphi)\,d\varphi = \pi.$$

2. Вычислить $I = \int_L dx + x\,dy$ по дуге $A(1, 1)$ $B(2, 4)$ параболы $y = x^2$.

Имеем:

$$I = \int_1^2 (1 + xy')\,dx = \int_1^2 (1 + 2x^2)\,dx = \frac{17}{3}.$$

3. Вычислить интеграл по длине дуги $I = \int_L \sqrt{y}\,ds$, где L есть первая арка циклоиды

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t).$$

Имеем:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = a\sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t}\,dt = 2a\left|\sin\frac{t}{2}\right| dt.$$

Следовательно,

$$I = 2a\int_0^{2\pi} \sqrt{a(1 - \cos t)}\left|\sin\frac{t}{2}\right| dt = (2a)^{\frac{3}{2}}\int_0^{2\pi} \sin^2\frac{t}{2}\,dt = \pi(2a)^{\frac{3}{2}}.$$

§ 100. Аппроксимация интегралами по ломаным

Пусть G — данная область (на плоскости или в пространстве), а $L \subset G$ — некоторая кусочно гладкая (а следовательно, спрямляемая) линия. Разбиение линии L

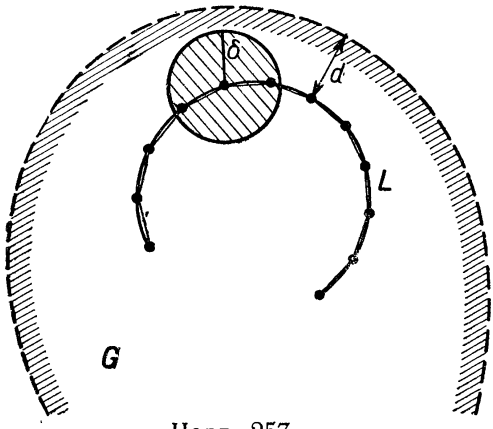
$$T_0T_1, \quad T_1T_2, \quad \ldots, \quad T_{n-1}T_n \qquad (\sigma)$$

будем называть δ-разбиением, если длина каждой криволинейной ячейки $\overset{\frown}{T_{i-1}T_i}$ меньше, чем δ. При достаточно малом δ вписанная ломаная $T_0T_1 \ldots T_{n-1}T_n$ лежит внутри области G. В самом деле, пусть d — расстояние L до границы G, если $\delta < d$, то длина каждой хорды $T_{i-1}T_i$ меньше δ. Любая точка этой хорды удалена от вершины T_{i-1} на расстояние $\delta < d$, а потому хорда $T_{i-1}T_i$ лежит внутри G. Следовательно, и вся ломаная лежит внутри G (черт. 257). Обозначим

через П вписанную ломаную (а также ее длину) $T_0T_1 \ldots T_n$. Пусть P, Q (и R в пространстве) — функции, непрерывные в G, тогда интеграл

$$\int P\,dx + Q\,dy \quad (+R\,dz)$$

существует вдоль любой кусочно гладкой линии $L \subset G$. Обозначим через I_L и $I_{\text{П}}$ значения данного интеграла вдоль L и П (соответственно).



Черт. 257.

Теорема. *При любом заданном* $\varepsilon > 0$ *существует такое число* δ, *что значения интеграла* $\int P\,dx + Q\,dy$ $(+R\,dz)$ *вдоль кусочно гладкой линии* L *и вдоль вписанной ломаной* П *удовлетворяют неравенству*

$$|I_L - I_{\text{П}}| < \varepsilon$$

для произвольной ломаной П, *если разбиение линии* L *есть* δ*-разбиение.*

Кратко эту теорему формулируют так: *криволинейный интеграл есть предел интегралов вдоль вписанных ломаных.*

Доказательство достаточно провести для интеграла вида $\int P\,dx$. При достаточно мелком δ-разбиении $\text{П} \subset G$, а потому $\int\limits_{\text{П}} P\,dx$ существует. Составим интегральную сумму по абсциссе (вдоль L), положив $X_i = T_{i-1}$:

$$S_x = \sum P(T_{i-1})(x_i - x_{i-1}) = \sum P(T_{i-1}) \int\limits_{T_{i-1}T_i} 1\,dx = \sum \int\limits_{T_{i-1}T_i} P(T_{i-1})\,dx.$$

Интеграл $I_{\text{П}}$ вдоль П представим в виде суммы интегралов вдоль звеньев, составляющих П:

$$I_{\text{П}} = \int\limits_{\text{П}} P\,dx = \sum \int\limits_{T_{i-1}T_i} P\,dx.$$

Имеем:

$$I_L - I_{\text{П}} = [I_L - S_x] + [S_x - I_{\text{П}}];$$

слагаемое в первой скобке есть разность между интегралом и интегральной суммой, а потому при достаточно мелком δ_1-разбиении $|I_L - S_x| < \frac{\varepsilon}{2}$. Слагаемое во второй скобке преобразуем следующим образом:

$$S_x - I_{\text{П}} = \sum \int\limits_{T_{i-1}T_i} P(T_{i-1})\,dx - \sum \int\limits_{T_{i-1}T_i} P(X)\,dx =$$
$$= \sum \int\limits_{T_{i-1}T_i} [P(T_{i-1}) - P(X)]\,dx.$$

В силу равномерной непрерывности* функции $P(X)$ неравенство $|P(T_i) - P(X)| < \frac{\varepsilon}{2L}$ будет иметь место для каждого звена при достаточно мелком δ_2-разбиении, а потому

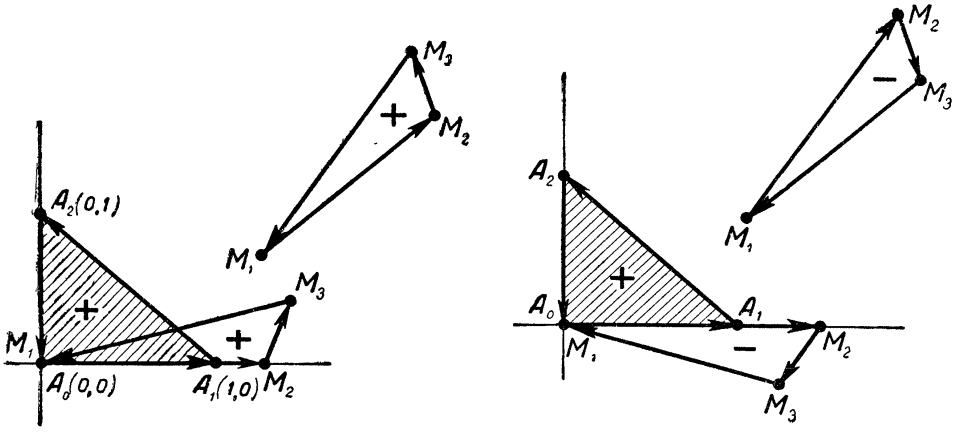
$$|S_x - I_{\text{П}}| \leqslant \sum \left| \int_{T_{i-1}T_i} \frac{\varepsilon}{2L}\, dx \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2L} \sum \text{дл. } T_{i-1}T_i = \frac{\varepsilon}{2L} \cdot \Pi \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Если δ не больше наименьшего из чисел δ_1 и δ_2, то при любом δ-разбиении линии L будем иметь: $|I_L - I_{\text{П}}| < \varepsilon$, ч. т. д.

§ 101. Формула Грина

Отметим следующие положения, относящиеся к геометрии.

1°. На координатной плоскости (x, y) ориентированный треугольник $A_0(0, 0)$, $A_1(1, 0)$, $A_2(0, 1)$ (черт. 258) будем называть единичным треугольником, его ориентацию $A_0A_1A_2$ будем называть положительной ориентацией в данной плоскости. Пусть $M_1M_2M_3$ — произвольный ориентированный треугольник; совместим при помощи движения** вершину M_1 с точкой $O = A_0$ так, чтобы вершина M_2 расположилась на положительной части оси OX, тогда $\triangle M_1M_2M_3$ считается положительно (отрицательно) ориентированным, если вершина M_3 расположится в верхней (в нижней) полуплоскости*** (черт. 258).



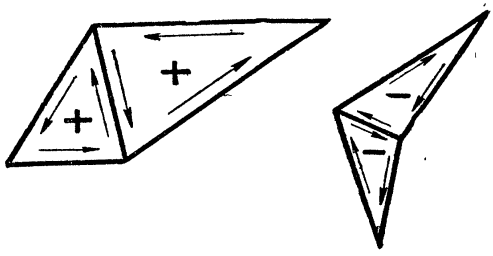
Черт. 258.

* Всегда возможно, взяв замкнутую область $\bar{G}_1 \subset G$ и содержащую обе линии L и П, считать функцию $P(x)$ непрерывной в замкнутой области.

** То есть при помощи ортогонального преобразования с детерминантом, равным 1.

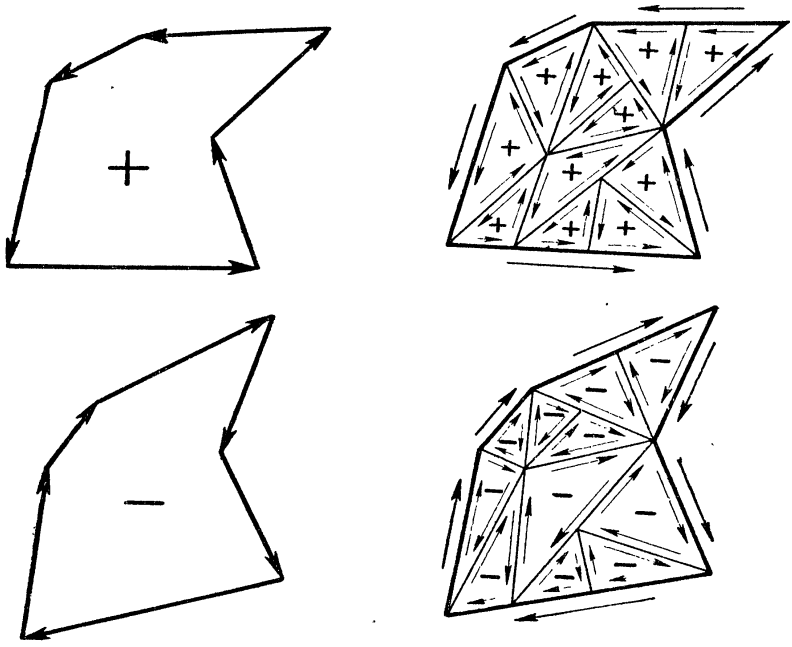
*** Как известно из аналитической геометрии, детерминант $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix}$ положителен (отрицателен), если данный треугольник $M_1(a_1, b_1)$, $M_2(a_2, b_2)$, $M_3(a_3, b_3)$ положительно (отрицательно) ориентирован.

2°. Если два не перекрывающиеся о д и н а к о в о ориентированные треугольника Δ_1 и Δ_2 имеют общую сторону, то направление этой общей стороны в ориентации первого треугольника п р о т и в о п о л о ж н о ее направлению в ориентации второго треугольника (черт. 259).



Черт. 259.

3°. Многоугольник, ограниченный простой (без самопересечений) замкнутой ориентированной ломаной линией, может быть разбит на конечное число одинаково ориентированных треугольников, при этом: *a*) два различные треугольника попарно не перекрываются, а могут иметь либо общую сторону, либо общую вершину; *b*) направления сторон треугольников, входящих в состав границы данного многоугольника, и направления этих сторон в ориентации ломаной совпадают. Всякое такое



Черт. 260.

разбиение многоугольника называется его т р и а н г у л я ц и е й (черт. 260).

Многоугольник, ограниченный ориентированной простой ломаной линией, называется п о л о ж и т е л ь н о (отрицательно) ориентированным, если треугольники, составляющие какую-либо его триангуля-

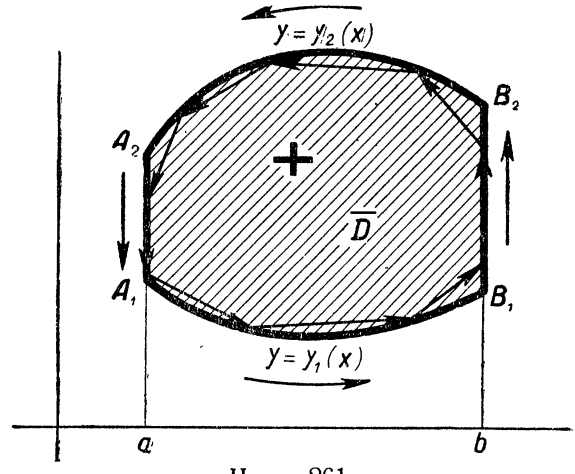
цию, положительно (отрицательно) ориентированы. Ориентация многоугольника определяется заданием порядка следования его вершин*.

Рассмотрим замкнутую область $\overline{D}$, заданную неравенствами:

$$y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x), \quad a \leqslant x \leqslant b,$$

где функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ непрерывны и $y_1(x) < y_2(x)$ в интервале $a < x < b$ (черт. 261). Граница этой области есть замкнутая линия L, состоящая из четырех частей: из двух дуг A_1B_1 и A_2B_2 и из двух прямолинейных отрезков A_1A_2 и B_1B_2, где концы дуг, ограничивающих область, обозначены следующим образом:

$$A_1(a,\ y_1(a)),\ B_1(b,\ y_1(b)),$$
$$A_2(a,\ y_2(a)),\ B_2(b,\ y_2(b)).$$



Черт. 261.

В частных случаях отрезки A_1A_2 и B_1B_2 (один или оба) могут выродиться в точку; так будет, например, если правые или левые, или оба конца дуг A_1B_1 и A_2B_2 совпадают.

Условимся положительным направлением линии L называть такую ее ориентацию, при которой концы дуг, составляющих L, расположены в следующем порядке:

$$A_1 \prec B_1 \prec B_2 \prec A_2,$$

или при любом порядке, получающемся из данного порядка круговой перестановкой букв:

$$B_1 \prec B_2 \prec A_2 \prec A_1, \quad B_2 \prec A_2 \prec A_1 \prec B_1, \quad A_2 \prec A_1 \prec B_1 \prec B_2$$

(при этих перестановках лишь различные концы дуг принимаются за начальную точку). Всякий замкнутый простой (не имеющий точек самопересечения) многоугольник, вписанный в линию L, является положительно ориентированным, если его вершины задаются в порядке их следования при положительной ориентации L.

Область $\overline{D}$ будем считать положительно ориентированной, если на ее границе L установлена положительная ориентация.

* В геометрии доказывается, что при любой триангуляции многоугольника, ограниченного ориентированной простой ломаной линией, всегда получаются треугольники одной и той же ориентации, т. е. понятие положительной и отрицательной ориентации многоугольника не зависит от способа триангуляции.

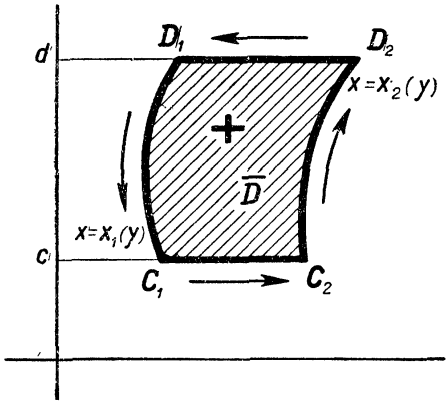
Применительно к областям рассматриваемого вида имеет место следующая лемма:

Лемма I. *Если функция $P(x, y)$ непрерывна и имеет непрерывную производную $\frac{\partial P}{\partial y}$ в замкнутой области $\overline{D}$, то*

$$\int_L P\,dx = -\int_D\int \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy,$$

где L есть положительно ориентированная граница области D.

Доказательство. В силу непрерывности $P(x, y)$ и $\frac{\partial P}{\partial y}$ как криволинейный, так и двойной интеграл в левой и правой частях доказываемого равенства существуют. Вычислим двойной интеграл $\int\int_D P'_y dx\,dy$ посредством повторного интегрирования в следующем порядке:



Черт. 262.

$$\int\int_D P'_y(x, y)\,dx\,dy =$$

$$= \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} P'_y(x, y)\,dy =$$

$$= \int_a^b [P(x, y_2(x)) - P(x, y_1(x))]\,dx =$$

$$= -\int_b^a P(x, y_2(x))\,dx - \int_a^b P(x, y_1(x))\,dx.$$

Первое слагаемое есть взятый с обратным знаком криволинейный интеграл $\int_{B_2A_2} P\,dx$, а второе равно интегралу $\int_{A_1B_1} P\,dx$, взятому с обратным знаком.

Приняв во внимание, что $\int_{B_1B_2} P\,dx = \int_{A_2A_1} P\,dx = 0$, получим:

$$\int\int_D P'_y\,dx\,dy = -\int_{B_2A_2} P\,dx - \int_{A_2A_1} P\,dx - \int_{A_1B_1} P\,dx - \int_{B_1B_2} P\,dx = -\int_L P\,dx,$$

ч. т. д.

Рассмотрим замкнутую область $\overline{D}$, заданную неравенствами (черт. 262):

$$x_1(y) \leqslant x \leqslant x_2(y), \quad c \leqslant y \leqslant d,$$

где $x_1(y)$ и $x_2(y)$ — функции, непрерывные на сегменте $c \leqslant y \leqslant d$, причем в интервале (c, d) имеет место неравенство $x_1(y) < x_2(y)$.

Пусть $C_1(x_1(c), c)$, $C_2(x_2(c), c)$, $D_1(x_1(d), d)$, $D_2(x_2(d), d)$—концы дуг, ограничивающих область и составляющих вместе замкнутую линию L (границу D). Положительной ориентацией линии L считается такая ее ориентация, в которой концы дуг, ее составляющих, задаются в следующем порядке:

$$C_1 \to C_2 \to D_2 \to D_1,$$

или в любом порядке, получающемся из данного круговой перестановкой.

Для областей рассматриваемого вида имеет место следующая лемма:

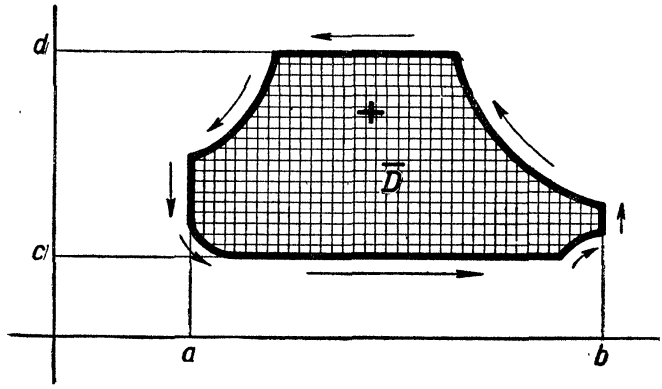
Лемма II. *Если функция $Q(x, y)$ непрерывна и имеет производную $\frac{\partial Q}{\partial x}$, непрерывную в замкнутой области $\overline{D}$, то*

$$\int_L Q\,dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy,$$

где L — положительно ориентированная граница области D.

Доказательство аналогично доказательству леммы I, достаточно двойной интеграл представить в виде повторного:

$$\int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} Q'_x\,dx.$$



Черт. 263.

Условимся ограниченную область $\overline{D}$ называть элементарной, если прямая, проходящая через любую внутреннюю точку $M \in D$ и параллельная либо оси OX, либо оси OY, пересекает границу области D в двух различных точках (черт. 263). Всякая элементарная область может быть представлена как посредством неравенств вида

$$y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x), \quad a \leqslant x \leqslant b,$$

так и посредством неравенств вида

$$x_1(y) \leqslant x \leqslant x_2(y), \quad c \leqslant y \leqslant d.$$

Теорема. *Если функции P, Q и их производные P'_y и Q'_x непрерывны в элементарной замкнутой области $\overline{D}$, то имеет место формула Грина:*

$$\int_L P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy,$$

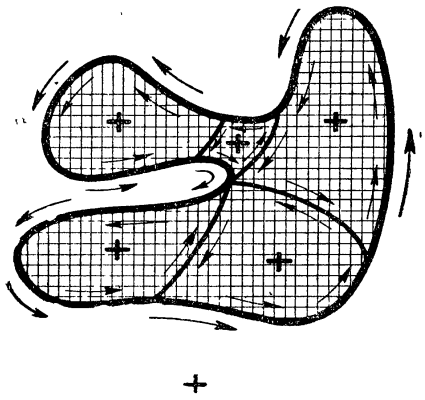
где L — положительно ориентированная граница области D.

Доказательство. Достаточно применить к интегралам $\int_L P\,dx$ и $\int_L Q\,dy$ леммы I и II (соответственно) и сложить почленно полученные равенства, ч. т. д.

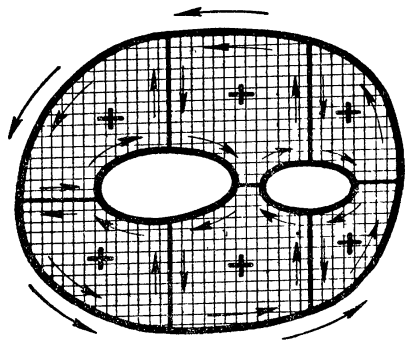
Рассмотрим такую замкнутую область $\overline{D}$, которая может быть разбита на конечное число элементарных областей, не имеющих попарно общих внутренних точек:

$$\overline{D}=\overline{D}_1+\overline{D}_2+\ \ldots\ +\overline{D}_n.$$

Предположим, что каждая из областей $\overline{D}_1, \overline{D}_2, \ldots, \overline{D}_n$ положительно ориентирована. Всякая дуга l, входящая в состав границы двух раз-



Черт. 264.



Черт. 265.

личных областей D_i и D_j, содержится внутри (кроме, быть может, концов) области D; положительная ориентация двух примыкающих к l областей порождает на этой дуге взаимно противоположные направления * (черт. 264). Дуги, входящие в состав границы области D, образуют в своей совокупности линию L, служащую границей этой области. Заметим, что L может состоять из нескольких замкнутых линий, не имеющих общих точек (черт. 265). Положительная ориентация областей $\overline{D}_i$ определяет на границе области $\overline{D}$ направление, которое называется положительным направлением линии L. Область с поло-

* Рассмотрим для определенности две области $\overline{D}_1$ и $\overline{D}_2$, ограниченные соответственно линиями AMB и ABN (черт. 266). Если (в частности) эти линии суть многоугольники, то при любой триангуляции многоугольников $\overline{D}_1$ и $\overline{D}_2$ на отрезках, по которым примыкают два различные треугольника, порождаются противоположные направления. Значит, и на ломаной AB порождаются противоположные направления. Если элементарные области D_1 и D_2 ограничены кривыми линиями, то впишем в них два простые многоугольника с общими

жительно ориентированной границей называется положительно ориентированной.

Теорема. Если

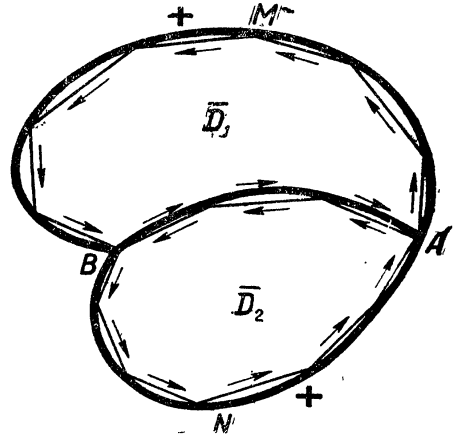
1° *замкнутая область* $\bar{D}$ *может быть разбита на конечное число элементарных областей,*

1° *функции* P, Q, P'_y и Q'_x *непрерывны в* $\bar{D}$, *то имеет место формула Грина*:

$$\int_L P\,dx + Q\,dy = \iint_D (Q'_x - P'_y)\,dx\,dy,$$

где L — *положительно ориентированная граница области* D.

Доказательство. Пусть $\bar{D}_1$, $\bar{D}_2$, ..., $\bar{D}_n$ — разбиение области $\bar{D}$ на элементарные области. Применим формулу Грина к каждой из элементарных областей $\bar{D}_i$ и сложим почленно полученные равенства, тогда в левой части криволинейные интегралы по дугам, входящим в состав границ смежных областей, сократятся, а интегралы по дугам, ограничивающим $\bar{D}$, дадут в сумме интеграл по L, в правой части получится двойной интеграл, распространенный на область $\bar{D}$, ч. т. д.



Черт. 266.

Следствие. Всякий треугольник есть элементарная область, следовательно, формула Грина применима к произвольному треугольнику. Формула Грина применима к произвольному простому замкнутому многоугольнику, так как всякий такой многоугольник может быть разбит на конечное множество треугольников.

Примечание. Можно доказать (доказательство выходит за рамки настоящей книги), что в любую простую замкнутую линию может быть вписан простой многоугольник со сколь угодно малыми сторонами. Это позволяет распространить понятие положительной ориентации на любые простые замкнутые линии. Предельным переходом можно установить справедливость формулы Грина применительно к любым квадрируемым областям, ограниченным линиями, вдоль которых существует интеграл $\int P\,dx + Q\,dy$.

вершинами на линии AB, тогда порядок следования вершин на этой линии относительно областей D_1 и D_2 будет противоположным. Это показывает, что на линии AB порождаются противоположные направления. Ориентированные дуги AMB и BNA составляют вместе замкнутую ориентированную линию $AMBNA$.

Теорема. *Площадь области $\bar{D}$, к которой применима формула Грина, выражается криволинейным интегралом*

$$D=\frac{1}{2}\int_L x\,dy-y\,dx.$$

Доказательство. Положив в формуле Грина $P=-y$ и $Q=x$, получим:

$$\frac{1}{2}\int_L x\,dy-y\,dx=\frac{1}{2}\iint_D 2\,dx\,dy=D,$$ ч. т. д.

Примеры.

1. Вычислить посредством криволинейного интеграла площадь эллипса: $x=a\cos t$, $y=b\sin t$.

$$S=\frac{1}{2}\int_L x\,dy-y\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(ab\sin^2 t+ab\cos^2 t)\,dt=\pi ab.$$

2. Вычислить площадь петли декартова листа:

$$x=\frac{3at}{1+t^3},\quad y=\frac{3at^2}{1+t^3}.$$

Так как $y=tx$, то

$$x\,dy-y\,dx=x(t\,dx+x\,dt)-tx\,dx=x^2\,dt,$$

откуда

$$S=\frac{9a^2}{2}\int_0^{+\infty}\frac{t^2\,dt}{(1+t^3)^2}=\frac{3a^2}{2}\left[-\frac{1}{1+t^3}\right]_0^{+\infty}=\frac{3a^2}{2}.$$

§ 102. Условия независимости криволинейного интеграла от формы пути интеграции

Будем предполагать линии, вдоль которых берется интеграл

$$I_L=\int P\,dx+Q\,dy\quad(+R\,dz\text{ в пространстве})$$

либо простыми кусочно гладкими, либо составленными из конечного числа таких линий. Функции P, Q (и R) будем считать непрерывными в данной области G.

При данных начальной и конечной точках A и B значение интеграла I_L вдоль различных линий $L\subset G$, соединяющих точки A и B, в общем случае различны: $I_{AMB}\neq I_{ANB}$ (черт. 267).

Определение. *Интеграл*

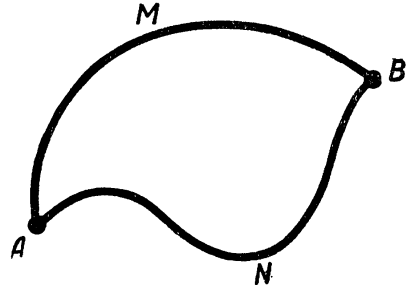
$$\int P\,dx+Q\,dy\quad(+R\,dz)$$

называется независящим от формы пути интегрирования в области G, если, каковы бы ни были точки $A\in G$ и $B\in G$, значение дан-

ного интеграла одно и то же вдоль любой линии $L \subset G$ с началом и концом в точках A и B (соответственно).

Значение интеграла, не зависящего от формы пути интегрирования, определяется заданием начальной и конечной точек линии интеграции. В обозначении такого интеграла достаточно указать лишь начальную и конечную точки; принято писать:

$$I_B^A = \int_A^B P\,dx + Q\,dy \quad (+R\,dz).$$



Черт. 267.

Теорема. *Для независимости криволинейного интеграла от формы пути интегрирования в области G необходимо и достаточно, чтобы в произвольно заданных начальной и конечной точках интеграл имел одно и то же значение вдоль любой ломаной линии $\Pi \subset G$.*

Доказательство. Условие необходимо. Если интеграл не зависит от формы пути интегрирования, то он имеет одно и то же значение вдоль любой кусочно гладкой и, в частности, вдоль любой ломаной линии $\Pi \subset G$ с началом и концом в данных точках.

Условие достаточно. Предположим, что интеграл имеет одно и то же значение $I_\Pi = C$ вдоль любой ломаной $\Pi \subset G$ с началом и концом в точках A и B. Интеграл I_L вдоль любой кусочно гладкой линии $L \subset G$ с началом и концом в тех же точках можно рассматривать как предел интегралов вдоль вписанных ломаных линий. (См. § 100.) Следовательно,

$$I_L = \lim I_\Pi = C, \qquad \text{ч. т. д.}$$

Теорема. *Необходимым и достаточным условием независимости в области G криволинейного интеграла I_L от формы пути интегрирования является равенство нулю этого интеграла вдоль любой простой замкнутой линии $L \in G$.*

Доказательство. Условие необходимо. Предположим, что I_L в области G не зависит от формы пути интегрирования. Пусть $L \subset G$ — произвольная простая замкнутая линия; любые две различные точки $A \in L$ и $B \in L$ разделяют L на две простые дуги AMB и BNA (см. черт. 267). В силу независимости I_L от формы пути интегрирования имеем:

$$I_{AMB} = I_{ANB}.$$

Но тогда

$$I_L = I_{AMB} + I_{BNA} = I_{AMB} - I_{ANB} = 0.$$

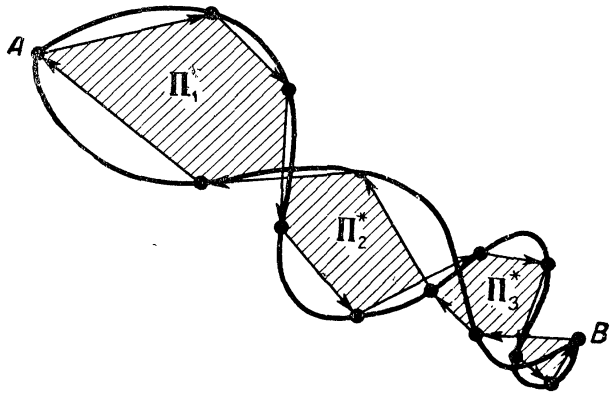
Условие достаточно. Предположим, что $I_L = 0$ вдоль любой простой (кусочно гладкой) замкнутой линии $L \subset G$. Докажем, что этот интеграл не зависит от формы пути интегрирования:

$$I_{L_1} = I_{L_2}, \tag{1}$$

где L_1 и L_2 — любые две кусочно гладкие линии с началом и концом в точках A и B. Рассмотрим замкнутую линию L, составленную из дуг L_1 и $-L_2$. Эта линия в общем случае не является простой замкнутой линией, так как она может иметь точки самопересечения (быть может, бесконечное множество таких точек) (черт. 268). Для доказательства равенства (1) достаточно доказать, что

$$I_L = I_{L_1} + I_{-L_2} = I_{L_1} - I_{L_2} = 0.$$

Пусть $\Pi_1 \subset G$ и $\Pi_2 \subset G$ — произвольные ломаные, вписанные в L_1 и L_2 (соответственно). Рассмотрим замкнутую ломаную Π, составленную из ломаных Π_1 и $-\Pi_2$. Многоугольник Π имеет конечное число звеньев и может быть разложен на конечное число простых замкнутых (ориентированных) многоугольников $\Pi_1^*, \Pi_2^*, \ldots, \Pi_k^*$. По предположению $I_L = 0$ вдоль любой простой замкнутой линии, а потому $I_{\Pi_1^*} = I_{\Pi_2^*} = \ldots = I_{\Pi_k^*} = 0$, откуда $I_\Pi = I_{\Pi_1^*} + I_{\Pi_2^*} + \ldots + I_{\Pi_k^*} = 0$, но тогда



Черт. 268.

$$I_L = \lim I_\Pi = 0,$$

ч. т. д.

Следствие. Из доказательства видно, что *интеграл I_L не зависит от формы пути интегрирования в том и только в том случае, когда он равен нулю вдоль любого простого замкнутого многоугольника $\Pi \subset G$.*

Нижеследующая теорема устанавливает условия, которым должны удовлетворять функции $P(x)$, $Q(x)$, (и $R(x)$), непрерывные в данной области G, чтобы интеграл

$$I_L = \int P\,dx + Q\,dy \quad (+R\,dz)$$

не зависел от формы пути интегрирования.

Теорема. *Необходимым и достаточным условием независимости интеграла I_L от формы пути интегрирования является существование функции $V(X)$, дифференцируемой в области G, дифференциал которой равен подинтегральному выражению*

$$dV(X) = P\,dx + Q\,dy \quad (+R\,dz);$$

при выполнении этого условия имеет место равенство

$$V(B) - V(A) = I_A^B.$$

Доказательство. Условие необходимо. Допустим, что интеграл не зависит от формы пути интегрирования. Положим

$$U(X) = \int_A^X P\,dx + Q\,dy \quad (+R\,dz)$$

при $X \neq A$ и $U(A) = 0$. Докажем, что в любой точке $X \in G$

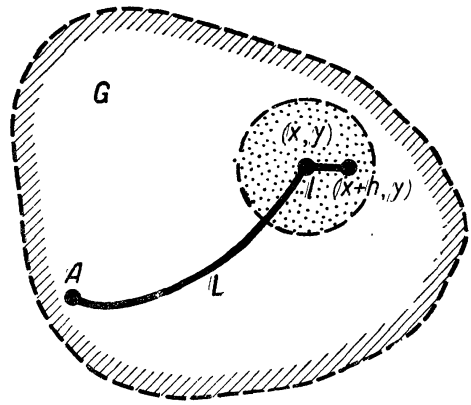
$$\frac{\partial U}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = Q \quad \left(\text{и } \frac{\partial U}{\partial z} = R\right).$$

Рассмотрим приращение (при данном значении y):

$$\Delta_x U = U(x+h, y) - U(x, y) = I_A^{(x+h,\,y)} - I_A^{(x,\,y)}$$

(в пространстве $\Delta_x U = U(x+h, y, z) - U(x, y, z)$).

Приращение h предполагается достаточно малым, чтобы точка $(x+h, y)$ принадлежала некоторой окрестности $U_X \subset G$ точки X (черт. 269). Для вычисления значения $U(x+h, y)$ можно взять интеграл $I_A^{(x+h,\,y)}$ вдоль любой (в силу независимости от формы пути интегрирования) линии, соединяющей точки A и $(x+h, y)$. В частности, можно взять линию, состоящую из какой-либо линии $L \subset G$, соединяющей точки A и $X(x, y)$, и из прямолинейного отрезка l, соединяющего точки $X(x, y)$ и $(x+h, y)$. Имеем:



Черт. 269.

$$U(x+h, y) - U(x, y) = (I_L + I_l) - I_L = I_l = \int_l P\,dx + Q\,dy = \int_x^{x+h} P(t, y)\,dt.$$

В силу теоремы о среднем значении,

$$U(x+h, y) - U(x, y) = hP(\xi, y),$$

где ξ заключено между числами x и $x+h$, откуда

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{U(x+h, y) - U(x, y)}{h} = \lim_{\xi \to x} P(\xi, y) = P(x, y).$$

Аналогично получим $\frac{\partial U}{\partial y} = Q\left(\text{и } \frac{\partial U}{\partial z} = R\right)$. Функция $U(x, y)$, как имеющая непрерывные производные $U'_x = P$ и $U'_y = Q$ $(U'_z = R)$, диф-

ференцируема, и

$$dU = P\,dx + Q\,dy \quad (+R\,dz).$$

Всякая функция $V(X)$, дифференциал которой равен $P\,dx + Q\,dy$, имеет вид $U(X) + C$, где $C = \text{const}$, поэтому

$$V(X) - V(A) = U(X) - U(A) = U(X) = \int_A^X P\,dx + Q\,dy.$$

Условие достаточно. Предположим, что в области G существует функция $V(X)$, для которой

$$dV(X) = P\,dx + Q\,dy \quad (+R\,dz).$$

Пусть

$$x = x(t),\ y = y(t),\ (z = z(t)) \qquad (L)$$

— любая гладкая линия с концами в точках A и X, соответствующих значениям параметра t_A и t; так как по условию

$$P = \frac{\partial V}{\partial x},\ Q = \frac{\partial V}{\partial y}\left(R = \frac{\partial V}{\partial z}\right),$$

то

$$\int_A^X (P\,dx + Q\,dy) = \int_{t_A}^{t} (V'_x x' + V'_y y')\,dt = \int_{t_A}^{t} \frac{d}{dt}[V(x(t),\ y(t))]\,dt =$$

$$= V(x(t),\ y(t)) - V(x(t_A),\ y(t_A)) = V(X) - V(A).$$

Итак, вдоль любой простой гладкой дуги AX интеграл имеет одно и то же значение

$$V(X) - V(A).$$

Если кусочно гладкая линия $L = AX$ составлена из конечного числа гладких звеньев

$$AX_1,\ X_1X_2,\ X_2X_3,\ \ldots,\ X_{n-1}X_n,$$

то получим также

$$I_L = I_{AX_1} + I_{X_1X_2} + \ldots + I_{X_{n-1}X_n} = [V(X_1) - V(A)] +$$
$$+ [V(X_2) - V(X_1)] + \ldots + [V(X) - V(X_{n-1})] =$$
$$= V(X) - V(A), \quad \text{ч. т. д.}$$

Пример.

Интеграл $\int_\Gamma \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ не зависит от формы пути интегрирования в любой области, не содержащей точку O (0, 0, 0), так как

$$d\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}};$$

имеем:

$$\int_{A_1(a_1, b_1, c_1)}^{A_2(a_2, b_2, c_2)} \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2} - \sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}.$$

§ 103. Условие интегрируемости. Отыскание функции по ее дифференциалу

Теорема. *Если функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ дифференцируемы в односвязной области G, то необходимым и достаточным условием существования функции $U(x, y)$, для которой выражение $P\,dx + Q\,dy$ есть дифференциал:*

$$dU = P\,dx + Q\,dy$$

в области G, является тождественное выполнение равенства

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Это равенство называется условием интегрируемости выражения $P\,dx + Q\,dy$.

Доказательство. Условие необходимо. Если существует функция $U(x, y)$, дифференциал которой равен данному выражению:

$$dU = P\,dx + Q\,dy,$$

то функция $U(x, y)$ имеет дифференцируемые производные:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = Q,$$

а потому;

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial x}, \text{ или, что то же, } \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Условие достаточно*. Предположим, что равенство $P'_y = Q'_x$ выполняется во всех точках области G. Требуется доказать существование функции $U(x, y)$, удовлетворяющей условию $dU = P\,dx + Q\,dy$. Пусть $\bar{R}$ — произвольный прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат, контур которого C содержится в области G. Докажем, что

$$I_C = \int_C P\,dx + Q\,dy = 0.$$

Обозначим $|I_C| = M$.

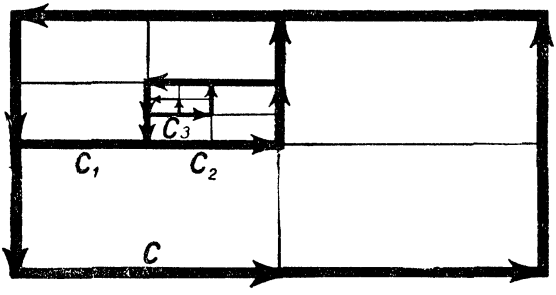
---

* Приведенное ниже доказательство принадлежит советскому ученому Г. П. Толстову («Успехи математических наук», том III, выпуск 5, Гостехиздат, М. — Л., 1948).

Разделим прямоугольник $\bar{R}$ прямыми, параллельными осям координат, на четыре равные прямоугольника $\bar{R}^{(1)}$, $\bar{R}^{(2)}$, $\bar{R}^{(3)}$ и $\bar{R}^{(4)}$, контуры которых соответственно суть $C^{(1)}$, $C^{(2)}$, $C^{(3)}$ и $C^{(4)}$. В силу предположенной односвязности области G прямоугольник $\bar{R}$ содержится в данной области $\bar{R} \subset G$, а потому и каждый из четырех прямоугольников, на которые разделен $\bar{R}$, содержится в области G. Будем считать все рассматриваемые прямоугольники одинаково для определенности положительно ориентированными. Так как

$$I_C = I_{C^{(1)}} + I_{C^{(2)}} + I_{C^{(3)}} + I_{C^{(4)}} \tag{1}$$

и $|I_C| = M$, то по крайней мере один из четырех интегралов в правой части равенства (1) по абсолютной величине не меньше, чем $\frac{M}{4}$. Обозначим через $\bar{R}_1$ и C_1 соответственный прямоугольник и его контур. Итак, имеем:



Черт. 270.

$$\bar{R}_1 \subset G \text{ и } |I_{C_1}| \geqslant \frac{M}{4}.$$

Далее, прямыми, параллельными осям координат, разделим прямоугольник $\bar{R}_1$ на четыре равные прямоугольника; из этих прямоугольников может быть выбран прямоугольник $\bar{R}_2$ (с контуром C_2) при условии

$$|I_{C_2}| \geqslant \frac{M}{4^2}.$$

Неограниченное продолжение этого процесса приведет к последовательности стягивающихся прямоугольников

$$\bar{R}_1 \supset \bar{R}_2 \supset \bar{R}_3 \supset \ldots \supset \bar{R}_n \supset \ldots \qquad \{\bar{R}_n\}$$

с контурами C_1, C_2, ..., C_n, ... (черт. 270), при этом $|I_{C_n}| \geqslant \frac{M}{4_n}$. Полученная последовательность $\{\bar{R}_n\}$ определяет единственную точку $A(a, b) \in G$, принадлежащую каждому прямоугольнику $\bar{R}_n$. Функции P и Q дифференцируемы в точке A, а потому

$$\left.\begin{aligned} P(x, y) &= P(A) + P'_x(A)(x-a) + P'_y(A)(y-b) + \omega_1 \rho \\ Q(x, y) &= Q(A) + Q'_x(A)(x-a) + Q'_y(A)(y-b) + \omega_2 \rho \end{aligned}\right\}. \tag{2}$$

Приняв во внимание условие $P'_y(A) = Q'_x(A)$ и равенства (2), представим интеграл I_{C_n} в следующем виде:

$$I_{C_n} = \int_{C_n} P\,dx + Q\,dy = \left[\int_{C_n} P(A)\,dx + Q(A)\,dy\right] +$$
$$+ \left[\int_{C_n} P'_x(A)(x-a)\,dx + Q'_y(A)(y-b)\,dy\right] +$$
$$+ \left[P'_y(A)\int_{C_n}(y-b)\,dx + (x-a)\,dy\right] + \left[\int_{C_n} \rho\cdot(\omega_1\,dx + \omega_1\,dy)\right].$$

Три первые интеграла, заключенные в квадратные скобки, равны (каждый) нулю, так как соответственные подинтегральные выражения суть дифференциалы:

$$P(A)\,dx + Q(A)\,dy = d\,[P(A)\,x + Q(A)\,y],$$
$$P'_x(x)(x-a) + Q'_y(A)(y-b)\,dy =$$
$$= d\,\frac{1}{2}\,[P'_x(A)(x-a)^2 + Q'_y(A)(y-b)^2]$$

и

$$(y-b)\,dx + (x-a)\,dy = d\,[(x-a)(y-b)].$$

Следовательно,

$$I_{C_n} = \int_{C_n} \rho\cdot(\omega_1\,dx + \omega_2\,dy).$$

Так как $\lim\limits_{X\to A}\omega_1 = \lim\limits_{X\to A}\omega_2 = 0$, то в достаточно малой окрестности U_A точки A будут выполняться неравенства

$$|\omega_1| < \varepsilon \quad \text{и} \quad |\omega_2| < \varepsilon.$$

При достаточно больших значениях n прямоугольник $\overline{R}_n$ содержится в окрестности U_A, а потому последние неравенства будут выполняться на C_n. Так как $\rho(X, A) < C_n$, если $X(x, y) \in C_n$ (через C_n обозначается как сам контур прямоугольника $\overline{R}_n$, так и его периметр), то

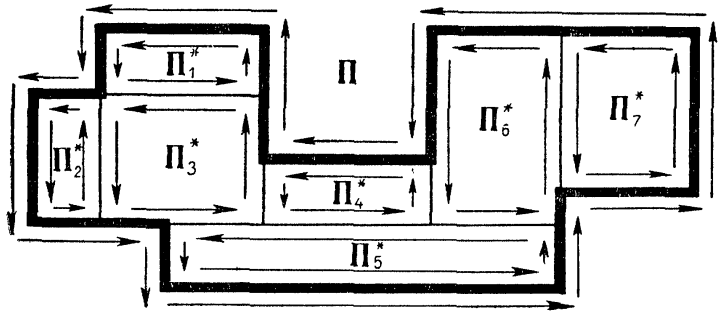
$$|I_{C_n}| = \left|\int_{C_n} \rho\cdot(\omega_1\,dx + \omega_2\,dy)\right| \leqslant (C_n 2\varepsilon)\,C_n = 2\varepsilon C_n^2.$$

Так как $C_n = \frac{C}{2^n}$, то $|I_{C_n}| \leqslant \frac{2\varepsilon C^2}{4^n}$; но, с другой стороны, $|I_{C_n}| \geqslant \frac{M}{4^n}$.

Следовательно, $\frac{M}{4^n} < \frac{2\varepsilon C^2}{4^n}$, или $M < 2\varepsilon C^2$, при любом $\varepsilon > 0$, что возможно лишь, если $M = 0$.

Итак $\int_c P\,dx + Q\,dy = 0$ по контуру любого прямоугольника $\overline{R} \subset G$ со сторонами, параллельными осям координат.

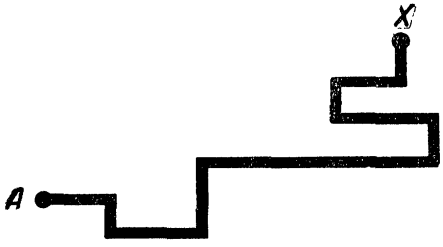
Пусть П — произвольная простая замкнутая ломаная, звеньями которой являются отрезки, параллельные осям координат (черт. 271). Многоугольник, ограниченный ломаной П, может быть составлен из конечного числа прямоугольников со сторонами, параллельными осям



Черт. 271.

координат. Имеем: $I_{\Pi} = \sum_{i=1}^{n} I_{\Pi_i^*}$, где Π_i^* — контуры прямоугольников, составляющих многоугольник, ограниченный ломаной П.

Так как каждый из интегралов $I_{\Pi_i^*} = 0$, то отсюда следует, что интеграл $\int P\,dx + Q\,dy$ равен нулю вдоль произвольной (простой или не простой) замкнутой ломаной с звеньями, параллельными осям координат, а также что этот интеграл имеет одно и то же значение вдоль произвольной ломаной с звеньями, параллельными осям координат, содержащейся в области G и соединяющей две данные точки $A \in G$ и $B \in G$. Положим



Черт. 272.

$$U(x, y) = \int_{A(a, b)}^{X(x, y)} P\,dx + Q\,dy,$$

где интеграл в правой части берется вдоль произвольной ломаной с звеньями, параллельными осям координат, с началом в точке $A(a, b)$ и с концом в точке $X(x, y)$ (черт. 272). Вычислив непосредственно производные функции $U(x, y)$, получим (производные вычисляются так же, как показано на стр. 487, только вместо кусочно гладких линий следует брать ломаные рассматриваемого вида):

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = Q.$$

Итак, функция $U(x, y)$ имеет непрерывные производные, следовательно, эта функция дифференцируема и

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy = P\,dx + Q\,dy,$$ ч. т. д.

Следствие. *Необходимым и достаточным условием независимости криволинейного интеграла*

$$\int P\,dx + Q\,dy$$

от формы пути интегрирования в односвязной области является выполнение условия интегрируемости

$$P'_y = Q'_x$$

в предположении, что функции P и Q дифференцируемы в области G.

В самом деле, интеграл не зависит от формы пути интегрирования тогда и только тогда, когда $P\,dx + Q\,dy$ есть дифференциал, для чего необходимо и достаточно выполнение условия интегрируемости.

Примечание. Условие односвязности области, в которой рассматриваются функции P и Q, существенно. Для неодносвязной области теорема (в общем случае) не имеет места.

Пример.

Пусть G — плоскость с исключенной точкой $O(0, 0)$. Положим

$$P = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad Q = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Функции P и Q и их производные непрерывны в области G и $P'_y = Q'_x$. Вычислим $\int\limits_L P\,dx + Q\,dy$ вдоль окружности $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ произвольного радиуса r с центром в начале координат:

$$\int\limits_L \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2 + y^2} = \int\limits_0^{2\pi} \frac{-r\sin\varphi\,(-r\sin\varphi) + r\cos\varphi\,(r\cos\varphi)}{r^2}\,d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi =$$

$$= 2\pi \neq 0.$$

Предположим, что выражение

$$P\,dx + Q\,dy\ (+R\,dz),$$

где P, Q (и R) — непрерывные функции в данной области G, является дифференциалом некоторой функции $U(X)$.

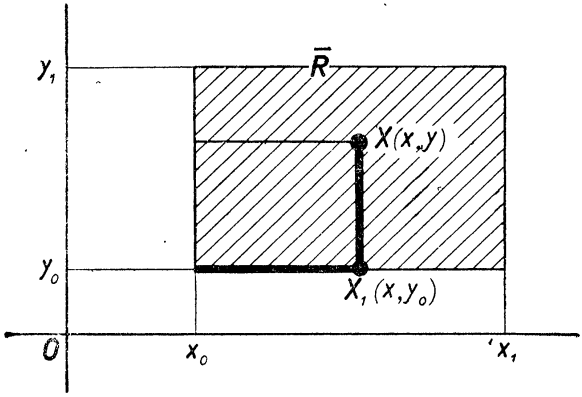
Для нахождения $U(X)$ достаточно, выбрав точку $A \in G$, вычислить интеграл

$$\int\limits_A^X P\,dx + Q\,dy\ (+R\,dz)$$

вдоль какой-либо кусочно гладкой линии, соединяющей точку A с произвольной точкой $X \in G$. Эту линию можно выбирать каким-либо специальным образом. Формула

$$V = C + \int_A^X P\,dx + Q\,dy \quad (+R\,dz)$$

при произвольном численном значении C дает множество всех функций, имеющих дифференциал, равный подинтегральному выражению.



Черт. 273.

Предположим, что функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ удовлетворяют условию интегрируемости в некотором прямоугольнике:

$$x_0 \leqslant x \leqslant x_1, \qquad y_0 \leqslant y \leqslant y_1. \qquad (\overline{R})$$

Пусть $X(x, y)$ — произвольная точка прямоугольника $\overline{R}$. Для отыскания функции $U(x, y)$ вычислим интеграл $\int P\,dx + Q\,dy$ вдоль двухзвенной ломаной линии с вершинами в точках $X_0(x_0, y_0)$, $X_1(x, y_0)$ и $X(x, y)$ (черт. 273). Интегрируя отдельно вдоль каждого звена, получим:

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y_0)} P\,dx + Q\,dy = \int_{x_0}^{x} P(x, y_0)\,dx \quad \text{и} \quad \int_{(x, y_0)}^{(x, y)} P\,dx + Q\,dy = \int_{y_0}^{y} Q(x, y)\,dy$$

(первый интеграл вычисляется при данном y, а второй — при данном, но произвольном x). Следовательно,

$$V(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(x, y_0)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x, y)\,dy + C.$$

Аналогично, интегрируя сперва вдоль отрезка, параллельного оси OY, и затем вдоль отрезка, параллельного оси OX, получим:

$$V(x, y) = \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)\,dy + \int_{x_0}^{x} P(x, y)\,dx + C.$$

Примеры.

1. Найти функцию $U(x, y)$ по ее дифференциалу

$$dU = \frac{2x(1 - e^y)}{(1 + x^2)^2}\,dx + \frac{e^y}{1 + x^2}\,dy.$$

Положим $P=\dfrac{2x\,(1-e^y)}{(1+x^2)^2}$, $Q=\dfrac{e^y}{1+x^2}$. Функции P и Q являются гладкими во всей плоскости. Так как

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=-\frac{2xe^y}{(1+x^2)^2},$$

то условие интегрируемости выполнено и, следовательно, искомая функция существует. Приняв точку $O\,(0,\,0)$ за начальную, получим:

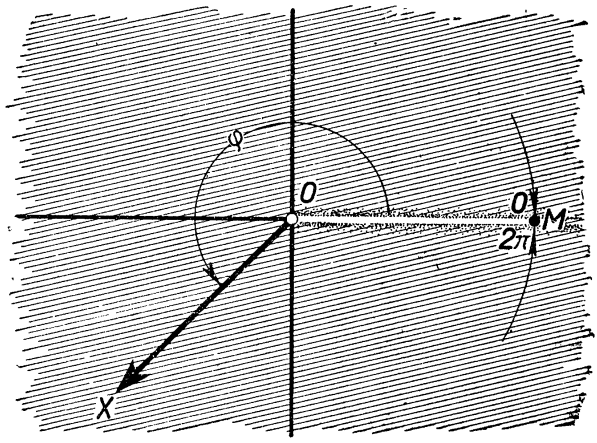
$$U(x,\,y)=\int_0^x\frac{2x\cdot 0}{(1+x^2)^2}\,dx+\int_0^y\frac{e^y}{1+x^2}\,dy+C=\frac{e^y-1}{1+x^2}+C.$$

2. Выражение $x\,dy-y\,dx$ не является дифференциалом никакой функции, так как не выполнено условие интегрируемости:

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial(-y)}{\partial y}=-1 \text{ и}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial(x)}{\partial x}=1.$$

Интеграл $\int\limits_L x\,dy-y\,dx$ по замкнутой линии отличен от нуля: как известно, этот интеграл равен площади области, ограниченной L.



Черт. 274.

3. Докажем, что в области G (неодносвязной), состоящей из всех точек плоскости, отличных от $O\,(0,\,0)$, не существует функции, дифференциал которой равен выражению

$$-\frac{y}{x^2+y^2}\,dx+\frac{x}{x^2+y^2}\,dy$$

(условие интегрируемости выполнено). Проведем разрез вдоль положительной полуоси абсцисс, т. е. исключим луч $x\geqslant 0$, $y=0$ из области G (черт. 274). В оставшейся односвязной области G_1 существует единственная, с точностью до числового слагаемого, функция $U(x,\,y)$, дифференциал которой равен данному выражению. Можно положить:

$$U(x,\,y)=\varphi(x,\,y),$$

где $\varphi(x,\,y)$ — угол в интервале $(0,2\pi)$, образованный вектором OX с осью абсцисс. В самом деле, в верхней полуплоскости $\varphi=\arccos\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ и в нижней $\varphi=2\pi-\arccos\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ и, как нетрудно проверить,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=-\frac{y}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{x}{x^2+y^2}.$$

Пусть $M\,(x,\,0)$ — любая точка положительной полуоси абсцисс.

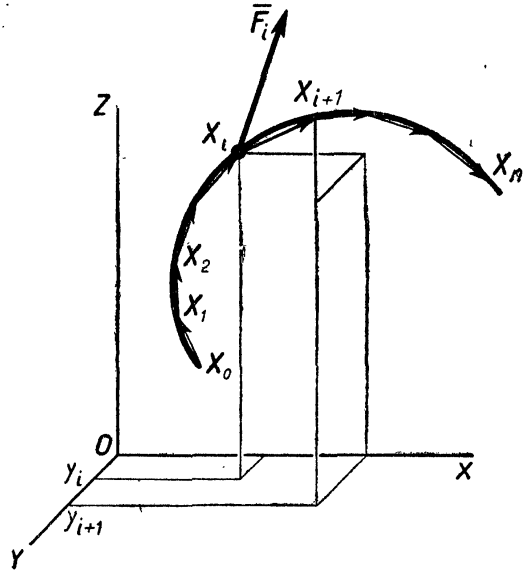
Имеем $\lim\limits_{X \to M} \varphi = 0$ на множестве точек верхней полуплоскости и $\lim\limits_{X \to M} = 2\pi$ на множестве точек нижней полуплоскости. Следовательно, M есть точка неустранимого разрыва функции $\varphi(x, y)$.

Если бы в области G существовала функция U, дифференциал которой равен данному выражению, то в области G_1 она имела бы вид $U = \varphi + C$ и не могла бы (вопреки предположению) быть непрерывной во всей области G.

§ 104. Механическая интерпретация криволинейного интеграла

Если под действием постоянной силы $\boldsymbol{F}$ материальная точка проходит прямолинейный путь S, то, как известно из физики, работа силы $\overline{F}$ есть произведение проекции силы на направление пути, на длину пути. Иными словами, работа есть скалярное произведение вектора силы на вектор пути: $\boldsymbol{FS}$. Если $X_1(x_1, y_1, z_1)$ и $X_2(x_2, y_2, z_2)$ — начальная и конечная точка пути, а F_x, F_y, F_z — проекции силы на координатные оси, то работа A силы F равна

$$A = F_x \cdot (x_2 - x_1) + F_y \cdot (y_2 - y_1) + F_z (z_2 - z_1).$$



Черт. 275.

Предположим, что материальная точка движется по криволинейному пути под действием переменной силы. Пусть $F_x(x, y, z)$, $F_y(x, y, z)$, $F_z(x, y, z)$ — проекции силы на координатные оси, эти проекции суть функции точки. Рассмотрим произвольное разбиение пути точками $X_0, X_1, X_2, \ldots, X_n$. Вычислим работу, которую произвела бы постоянная сила

$$\boldsymbol{F}_i = F_x(x_i, y_i, z_i)\,\mathbf{i} + F_y(x_i, y_i, z_i)\,\mathbf{j} + F_z(x_i, y_i, z_i)\,\mathbf{k},$$

если бы материальная точка двигалась по хорде X_iX_{i+1} (черт. 275):

$$A_i = F_x(x_i, y_i, z_i)(x_{i+1} - x_i) + F_y(x_i, y_i, z_i)(y_{i+1} - y_i) + F_z(x_i, y_i, z_i)(z_{i+1} - z_i).$$

Предел суммы $\sum A_i$ называется работой силы F на данном криволинейном пути L. Следовательно,

$$A = \lim \sum A_i = \int\limits_L F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz.$$

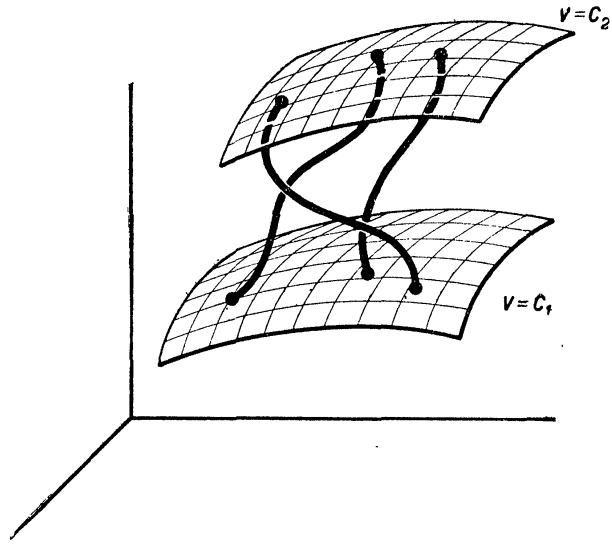
Если криволинейный интеграл не зависит от формы пути интегрирования, то существует функция $V(X)$, для которой

$$dV = F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz.$$

Функция $V(x)$ называется потенциальной функцией. Силовое поле, обладающее потенциальной функцией, называется консервативным полем. Формула

$$\int_{X_c}^{X} F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz = V(X) - V(X_0)$$

показывает, что для консервативного поля работа силы равна разности значений потенциальной функции в конце и в начале пути. Поверхности уровня потенциальной функции $V(X) = C$ называются эквипотенциальными поверхностями. При движении по эквипотенциальной поверхности работа силы равна нулю. При переходе с одной эквипотенциальной поверхности $V = C_1$ на другую $V = C_2$ (черт. 276) независимо от формы пути совершается одна и та же работа $C_2 - C_1$. Примером консервативного поля может служить поле ньютонианского тяготения.



Черт. 276.

§ 105. Двойные интегралы по ориентированным областям

Пусть $\overline{D}$ — данная квадрируемая ориентированная замкнутая область *. Условимся площади ориентированной области приписывать знак и считать *площадь положительно ориентированной области положительной, а площадь отрицательно ориентированной области отрицательной.* Под разбиением ориентированной области будем подразумевать разбиение $\overline{D}$ на ячейки, имеющие ту же ориентацию, что и область $\overline{D}$ (черт. 277).

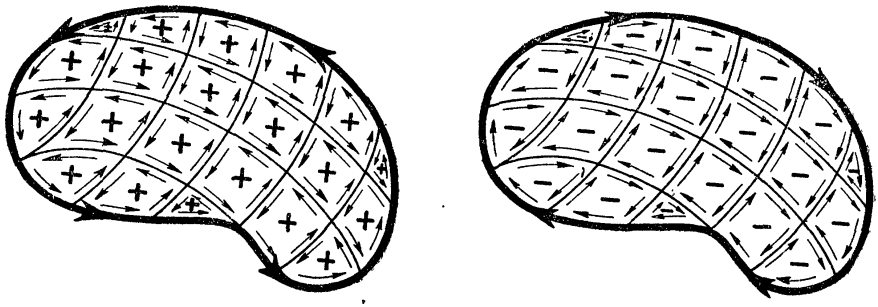
* В § 101 было подробно рассмотрено понятие ориентации применительно к областям, составленным из конечного числа элементарных областей. В настоящей главе мы ограничимся элементарным изложением теории интегралов по поверхности лишь в том объеме, который нужен в приложениях к физике и механике. Для элементарной теории достаточно ограничиться рассмотрением областей вышеуказанного частного вида.

Под интегральной суммой функции $f(x, y)$, рассматриваемой в $\overline{D}$, будем подразумевать сумму

$$\sum f(X_i)\,\alpha_i, \quad \text{где } X_i \in \alpha_i,$$

при этом площади ячеек положительны: $\alpha_i > 0$, если область $\overline{D}$ положительно ориентирована, и $\alpha_i < 0$, если область $\overline{D}$ отрицательно ориентирована. Предел этой суммы называется двойным интегралом от функции $f(X)$, распространенным на о р и е н т и р о в а н н у ю область $\overline{D}$.

При изменении ориентации области $\overline{D}$ двойной интеграл сохраняет абсолютную величину и изменяет знак на противоположный. В самом



Черт. 277.

деле, при изменении ориентации площади ячеек α_i в соответственных интегральных суммах меняют знаки на противоположные, а потому и в пределе получатся числа, противоположные по знаку.

Формула Грина остается в силе для ориентированных областей, если считать границу области интеграции ориентированной соответственно ориентации области.

В самом деле, формула была установлена для случая положительной ориентации области и ее границы. Для отрицательно ориентированной области ее граница также берется отрицательно ориентированной, но при изменении ориентации области и ограничивающей ее линии и двойной, и криволинейный интегралы оба изменяют знак, не изменяя абсолютной величины, а потому равенство не нарушается.

Рассмотрим систему функций

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v),$$

осуществляющих взаимно однозначное и регулярное отображение области $\overline{D}_{uv}$ на область $\overline{D}_{xy}$. Пусть $L_{uv} \subset \overline{D}_{uv}$ — п р о с т а я з а м к н у т а я ориентированная линия в плоскости (u, v), а L_{xy} — ее образ в рассматриваемом взаимно однозначном отображении.

Теорема. *Если якобиан отображения положителен,* $I = \dfrac{D(x, y)}{D(u, v)} > 0$, *то линия-прообраз L_{uv} и линия-образ L_{xy} имеют одинаковую (положительную или отрицательную) ориентацию в соответственных координатных плоскостях (u, v) и (x, y). Если $I < 0$, то ориентации линии-прообраза и линии-образа противоположны.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для простоты проведем доказательство в предположении, что функции $x(u, v)$ и $y(u, v)$ имеют непрерывные вторые прозводные (хотя для справедливости окончательного результата соблюдения этого условия не требуется). Обозначим через G_{uv} и G_{xy} области, ограниченные линиями L_{uv} и L_{xy} и ориентированные соответственно ориентациям этих линий.

Представим площадь ориентированной области G_{xy} в виде криволинейного интеграла $G_{xy} = \int\limits_{L_{xy}} x\,dy$. Координаты точек на линии L_{xy} и на соответственной линии L_{uv} можно рассматривать как функции параметра t (на некотором сегменте $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$). Имеем:

$$G_{xy} = \int\limits_{L_{xy}} x\,dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} x(u(t),\ v(t))\,y'\,dt = \int\limits_{\alpha}^{\beta} x(u(t),\ v(t))\left[y'_u u' + y'_v v'\right]dt =$$

$$= \int\limits_{L_{uv}} xy'_u\,du + xy'_v\,dv.$$

Применим к полученному интегралу формулу Грина:

$$\int\limits_{L_{uv}} xy'_u\,du + xy'_v\,dv = \iint\limits_{G_{uv}} \left[\frac{\partial\left(xy'_v\right)}{\partial u} - \frac{\partial\left(xy'_u\right)}{\partial v}\right]du\,dv =$$

$$= \iint\limits_{G_{uv}} \left[\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} + x\frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} - x\frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v}\right]du\,dv = \iint\limits_{G_{uv}} \frac{D(x,\ y)}{D(u,\ v)}\,du\,dv.$$

Итак:

$$G_{xy} = \iint\limits_{G_{uv}} I(u,\ v)\,du\,dv.$$

Применив теорему о среднем значении, получим:

$$G_{xy} = I(\xi,\ \eta)\ G_{uv}.$$

Если $I > 0$ (или $I < 0$), то площади G_{uv} и G_{xy} суть числа одинаковые (противоположные) по знаку. Это показывает, что области $\overline{G_{xy}}$ и $\overline{G_{uv}}$ одинаково (противоположно) ориентированы. В соответствии с этим, линии, ограничивающие эти области, также одинаково (противоположно) ориентированы, ч. т. д.

Доказанная теорема выясняет геометрический смысл знака якобиана отображения: *отображение с положительным якобианом не меняет ориентации области, отображение с отрицательным якобианом изменяет на противоположную ориентацию области.*

Формула интегрирования подстановкой по ориентированным областям пишется так:

$$\iint\limits_{D_{xy}} f(x,\ y)\,dx\,dy = \iint\limits_{D_{uv}} f(x(u,\ v),\ y(u,\ v))\,\frac{D(x,\ y)}{D(u,\ v)}\,du\,dv,$$

где D_{xy} и D_{uv} — соответственные ориентированные области. Доказательство (см. § 93) остается в силе, надо лишь иметь в виду, что площади ячеек разбиений могут быть как положительными, так и отрицательными в зависимости от ориентации области-прообраза и области-образа.

---

* Теорема о среднем значении $\iint\limits_{D} f(x,\ y)\,dx\,dy = f(\xi,\ \eta)\,D$ остается в силе и для отрицательно ориентированных областей. В самом деле, при изменении ориентации области двойной интеграл, а также и площадь области интеграции, меняет знак на противоположный.

§ 106. Ориентированные поверхности

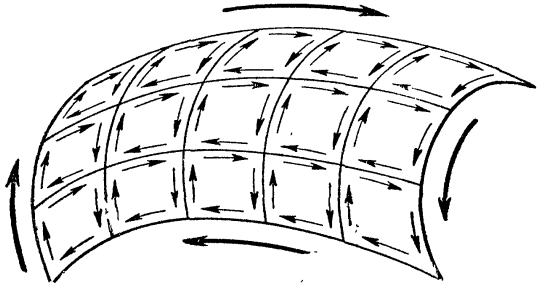
Рассмотрим простой кусок S поверхности:

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \qquad (S)$$

где $T(u, v) \in \overline{D}_T$.

Два различные способа ориентации области $\overline{D}_T$ при ее отображении на кусок S устанавливают на S два различные способа ориентации.

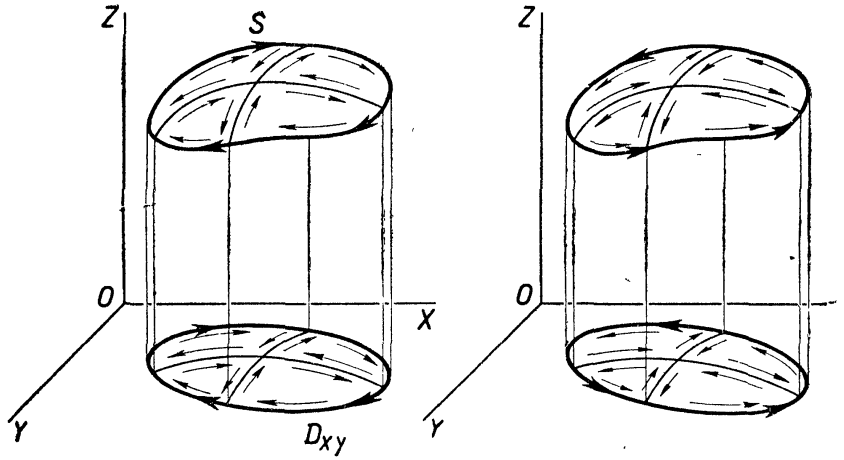
Всякому разбиению ориентированной области $\overline{D}_T$ соответствует разбиение куска S на ориентированные ячейки (кривые). При этом всякая дуга, общая двум различным ячейкам, имеет противоположную ориентацию относительно этих ячеек (черт. 278).



Черт. 278.

С понятием ориентации связано понятие «стороны» поверхности, именно говорят, что *два различные способа ориентации куска S определяют на этом куске две различные его стороны*. Для определенности рассмотрим частный случай, когда кусок S задан уравнением $z = f(x, y)$, где $X(x, y) \in \overline{D}_{xy}$.

При этом предположим, что функции $f(x, y)$ в области $\overline{D}_{xy}$ имеет непрерывные производные f'_x и f'_y. Ориентация куска S, порождаемая положительной (отрицательной) ориентацией области $\overline{D}_{xy}$, показана на левом (правом)



Черт. 279.

чертеже 279. Будем говорить, что *положительная* (*отрицательная*) *ориентация области $\overline{D}_{xy}$ определяет верхнюю* (*нижнюю*) *сторону куска S*. Рассмотрим нормаль в произвольной точке $P \in S$. На этой нормали можно различать два противоположные направления: направление «вверх», образующее острый угол с осью OZ, и направление «вниз», образующее тупой угол с осью OZ. Для верхней стороны куска S условимся выбирать направление

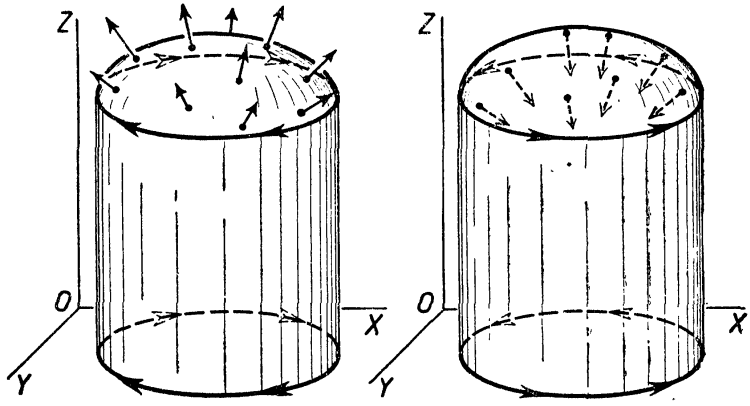
нормалей вверх, а для нижней стороны этого куска будем выбирать направление нормалей вниз:

$$\cos\gamma(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{1+f'^2_x+f'^2_y}} & \text{(на верхней стороне)}, \\ -\dfrac{1}{\sqrt{1+f'^2_x+f'^2_y}} & \text{(на нижней стороне)}, \end{cases}$$

где $\gamma(x, y)$ — угол, образованный нормалью к поверхности в точке $P(x, y, f(x, y))$ с осью OZ (черт. 280). Формула

$$S = \iint\limits_{D_{xy}} \sqrt{1+f'^2_x+f'^2_y}\,dx\,dy = \iint\limits_{D_{xy}} \frac{dx\,dy}{\cos\gamma(x, y)},$$

выражающая площадь куска поверхности, остается в силе для ориентированных областей. В самом деле, эта формула была выведена для положительно ориентированной области $\overline{D}_{xy}$ (см. § 93), при этом $\cos\gamma > 0$ (верхняя сто-



Черт. 280.

рона куска). При изменении ориентации куска изменит ориентацию область интеграции D_{xy}, но вместе с тем изменит знак и $\cos\gamma$ (нижняя сторона куска), а потому величина площади S не изменится.

Пусть α_i — ячейка в области $\overline{D}_{xy}$, а σ_i — соответствующая кривая ячейка на куске S. Имеем:

$$\sigma_i = \iint\limits_{\alpha_i} \frac{dx\,dy}{\cos\gamma(x, y)}.$$

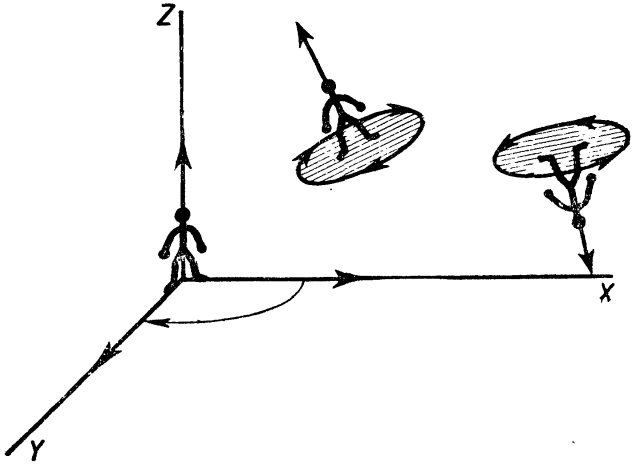
Применив теорему о среднем значении, получим:

$$\sigma_i = \frac{1}{\cos\gamma(\xi_i, \eta_i)}\alpha_i \quad \text{или} \quad \alpha_i = \cos\gamma(\xi_i, \eta_i)\,\sigma_i,$$

где (ξ_i, η_i) — некоторая точка ячейки α_i. Эта формула верна и для ориентированной ячейки. В самом деле, для положительно ориентированной ячейки α_i имеем $\alpha_i > 0$ и $\cos\gamma > 0$, а для отрицательно ориентированной ячейки $\alpha_i < 0$ и $\cos\gamma < 0$, при этом площадь σ_i кривой ячейки считается положительной.

С ориентацией куска поверхности можно связать следующее наглядное представление. Представим себе малый замкнутый простой контур L на куске S,

ориентированный в соответствии с ориентацией S, и наблюдателя, стоящего ногами на поверхности и обращенного головой в соответствующем направлении нормали. Наблюдатель увидит движение точки по L в том же направлении, в каком видит вращение от оси OX к оси OY наблюдатель, стоящий на плоскости (x, y) и обращенный головой вверх (черт. 281).



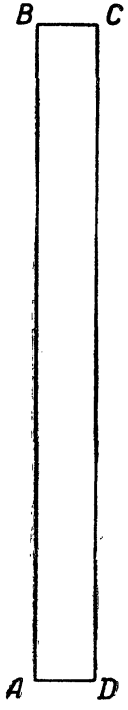
Черт. 281.

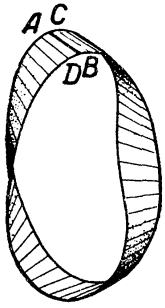
Аналогично можно рассматривать простые куски, определяемые уравнениями:

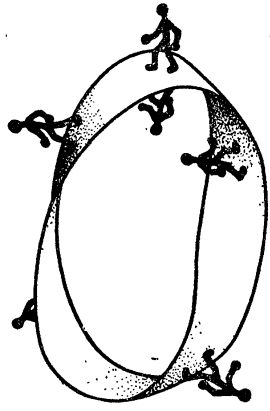
$$x = \varphi(y, z) \quad \text{или}$$

$$y = \psi(z, x).$$

Так, например, в первом случае положительная и отрицательная ориентации области $\overline{D}_{yz}$ (проекции куска) в плоскости (yz) определяют на куске ориентации, называемые соответственно правой и левой сторонами этого куска.







Черт. 282.

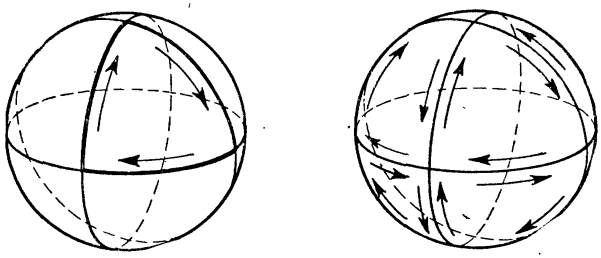
Черт. 283.

Для приложений обычно достаточно ограничиться рассмотрением кусков, выражающихся уравнениями, разрешенными относительно одной из координат. Такие куски мы и будем рассматривать в дальнейшем.

Рассмотрим поверхность S, которая может быть разбита на конечное число простых кусков $S = S_1 + S_2 + \ldots + S_n$ так, что два различные куска могут иметь лишь общие краевые точки.

Определение. *Поверхность S называется ориентируемой (двусторонней), если можно осуществить такое ее разбиение и такую ориентацию кусков, что на каждой из дуг, общей двум различным кускам, устанавливаются взаимно противоположные направления. Если ни при каком разбиении указанная ориентация кусков установлена быть не может, то поверхность называется неориентируемой (односторонней).*

Для построения простейшего примера неориентируемой поверхности — лист Мебиуса — достаточно взять узкую прямоугольную полоску $ABCD$, «перекрутить» ее на 180° и склеить меньшие стороны AD и BC так, чтобы точка A совпала с точкой C, а точка B — с точкой D (черт. 282). На чертеже 282 представлены последовательные положения наблюдателя, обходящего лист Мебиуса по средней линии.



Черт. 284.

На чертеже 283 изображена триангуляция полосы $ABCD$. При образовании листа Мебиуса примыкающие к линии склеивания треугольники устанавливают на этой линии одно и то же направление.

Все поверхности, рассматриваемые ниже, будут предполагаться ориентируемыми.

Чтобы фиксировать определенную сторону ориентируемой поверхности, можно поступать следующим образом: разбить поверхность на простые куски, придать одному из кусков определенную ориентацию, затем придать ориентацию кускам, примыкающим к этому куску так, чтобы на общих граничных дугах установились противоположные направления.

Для двусторонней поверхности этот процесс последовательной ориентации кусков приведет к ориентации всей поверхности (черт. 284).

§ 107. Интегралы по поверхности

Интегралы по координатам. Рассмотрим простой кусок гладкой поверхности, заданный уравнением

$$z = f(x, y), \quad \text{где} \quad X(x, y) \subset \bar{D}_{xy}. \tag{S}$$

Будем считать область $\bar{D}_{xy}$ и кусок S соответственно ориентированными. Рассмотрим разбиение (α) ориентированной области $\bar{D}_{xy}$. Пусть $R(x, y, z)$ — функция, непрерывная на куске S. Составим сумму

$$\sum_{xy} = \sum R(x_i, y_i, z_i)\,\alpha_i,$$

распространенную на все ячейки разбиения (α), где (x_i, y_i, z_i) — произвольная точка ячейки σ_i (соответствующей ячейке α_i). При этом площадь $\alpha_i > 0$ (или $\alpha_i < 0$), если область $\overline{D}_{xy}$ положительно (отрицательно) ориентирована, т. е. если рассматривается верхняя (нижняя) сторона S. Сумму Σ_{xy} будем называть интегральной суммой по координатам x и y.

Определение. *Интегралом по координатам x и y, распространенным по данной стороне куска S, называется предел интегральных сумм Σ_{xy}. Этот интеграл обозначается так:*

$$\lim \Sigma_{xy} = \int\limits_S R(x, y, z)\, dx\, dy.$$

Сторона куска S каждый раз указывается особо.

Если S есть кусок цилиндрической поверхности с образующими, параллельными оси OZ, то считают

$$\int\limits_S R\, dx\, dy = 0.$$

Для случая непрерывной функции $R(x, y, z)$ существование предела суммы Σ_{xy} не нуждается в особом доказательстве, так как Σ_{xy} есть интегральная сумма для сложной функции $R(x, y, f(x, y))$:

$$\Sigma_{xy} = \Sigma R(x_i, y_i, z_i)\, \alpha_i = \Sigma R(x_i, y_i, f(x_i, y_i))\, \alpha_i.$$

Следовательно, интеграл по поверхности выразится при помощи двойного интеграла:

$$\int\limits_S R\, dx\, dy = \lim \Sigma_{xy} = \iint\limits_{D_{xy}} R(x, y, f(x, y))\, dx\, dy$$

по ориентированной области $\overline{D}_{xy}$.

Пусть S — ориентированная поверхность, которая может быть разбита на конечное число простых кусков $S_1, S_2, \ldots, S_n$, каждый из которых либо изображается уравнением вида $z = f(x, y)$, либо является куском цилиндрической поверхности с образующими, параллельными оси OZ. Интегралом по координатам x и y, распространенным на данную сторону поверхности S, называется сумма интегралов

$$\int\limits_S R\, dx\, dy = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{S_i} R\, dx\, dy.$$

При этом ориентация каждого из кусков S_i определяется ориентацией (стороной) S.

Нижеследующие свойства интеграла по поверхности устанавливаются так же, как и для криволинейных интегралов.

1°. *Свойство дистрибутивности:*

$$\int (C_1 R_1 + C_2 R_2 + \ldots + C_n R_n)\, dx\, dy =$$

$$= C_1 \int R_1\, dx\, dy + C_2 \int R_2\, dx\, dy + \ldots + C_n \int R_n\, dx\, dy.$$

2°. *Свойство аддитивности:*

$$\int\limits_S R\,dx\,dy = \int\limits_{S_1} R\,dx\,dy + \int\limits_{S_2} R\,dx\,dy + \ldots + \int\limits_{S_k} R\,dx\,dy,$$

где $S_1, S_2, \ldots, S_k$ *— произвольное разбиение поверхности* S.

3°. *Интегралы от функции* R, *распространенные на различные стороны одной и той же поверхности, одинаковы по абсолютной величине и противоположны по знаку.*

Аналогично определяются интегралы

$$\int\limits_S P\,dy\,dz \quad \text{и} \quad \int\limits_S Q\,dz\,dx,$$

а также интеграл

$$\int\limits_S P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy = \int\limits_S P\,dy\,dz + \int\limits_S Q\,dz\,dx + \int\limits_S R\,dx\,dy.$$

Рассмотрим простой кусок S, заданный параметрически

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v). \tag{S}$$

Предположим, что система функции

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v) \tag{1}$$

реализует взаимно однозначное регулярное отображение области $\overline{D}_{uv}$ на область $\overline{D}_{xy}$.

При соблюдении этих условий кусок S может быть задан уравнением

$$z = f(x, y), \quad \text{где} \quad f(x, y) = z(u(x, y), v(x, y)).$$

Представив интеграл по координатам x и y в виде двойного интеграла и воспользовавшись формулой интегрирования подстановкой, получим:

$$\int\limits_S R\,dx\,dy = \int\limits_{D_{xy}} \int R(x, y, z(x, y))\,dx\,dy =$$

$$= \int\limits_{D_{uv}} \int R(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \frac{D(x, y)}{D(u, v)}\,du\,dv,$$

где последний интеграл распространяется на ориентированную область $\overline{D}_{uv}$ и соответствующую области $\overline{D}_{xy}$.

Рассмотрим поверхность, заданную параметрически уравнениями (S) в некоторой замкнутой квадрируемой области $\overline{G}_{uv}$. Предположим, что область $\overline{G}_{uv}$ может быть разбита на конечное число квадрируемых областей $G_1, G_2, \ldots, G_n$ таких, что либо

a) системой $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ реализуется взаимно однозначное и регулярное отображение области G_i на некоторую область в плоскости (x, y), либо

b) область G_i отображается на кусок цилиндрической поверхности с образующими, параллельными оси OZ. В этих последних областях $\dfrac{D(x, y)}{D(u, v)} = 0$.

В силу условий a) и b) поверхность S может быть составлена из конечного числа простых кусков, $S_1, S_2, \ldots, S_n$, каждый из которых выражается уравнением вида $Z = f(x, y)$ либо является куском цилиндрической поверхности с образующими, параллельными оси OZ. При задании ориентации области G_{uv} каждая из областей G_i имеет определенную ориентацию и устанавливает соответствующую ориентацию на кусках поверхности S.

Интеграл по поверхности S

$$\int\limits_S R\,dx\,dy$$

выразится суммой интегралов по кускам этой поверхности:

$$\int\limits_S R\,dx\,dy = \sum_{k=1}^{n}{}' \int\limits_{S_k} R\,dx\,dy = \sum \int\limits_{G_k}\int R(x(u, v), y(u, v), z(u, v))\,\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\,du\,dv.$$

Откуда в силу свойства аддитивности интеграла получим:

$$\int\limits_S R\,dx\,dy = \int\limits_{G_{uv}}\int R(x(u, v), y(u, v), z(u, v))\,\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\,du\,dv.$$

Интегралы по площади поверхности. Рассмотрим простой кусок поверхности, заданный системой функций

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \tag{S}$$

гладких в некоторой замкнутой области $\overline{D}_{uv}$. Пусть $F(x, y, z)$ — функция, непрерывная на поверхности S. Всякая сумма вида

$$\sum\nolimits_S = \sum_{i=1}^{n} F(X_i)\,\sigma_i,$$

где $X(x_i, y_i, z_i)$ — произвольная точка ячейки σ_i (при данном разбиении S), называется интегральной суммой по площади от функции $F(X)$.

Определение. *Интегралом по площади куска поверхности S от функции $F(X)$ называется предел интегральных сумм по площади S:*

$$\int\limits_S F(x, y, z)\,d\sigma = \lim \sum F(X_i)\,\sigma_i.$$

Для случая непрерывной функции $F(X)$ существование этого интеграла доказывается сведением его к двойному интегралу.

В самом деле, имеем (по теореме о среднем значении):

$$\sigma_i = \int\limits_{\alpha_i}\int \sqrt{EG - F^2}\,du\,dv = H(\overline{u}_i, \overline{v}_i)\,\alpha_i,$$

где через $H(u, v)$ обозначено подинтегральное выражение $\sqrt{EG - F^2}$, а $\alpha_i \in D_{uv}$ — ячейка, соответствующая кривой ячейке σ_i. Пусть $\overline{X}_i$ — точка поверхности S, соответствующая точке $(\overline{u}_i, \overline{v}_i)$. Оценим разность между двумя суммами:

$$\left|\sum F(X_i)\,\sigma_i - \sum F(\overline{X}_i)\,H(\overline{u}_i, \overline{v}_i)\,\alpha_i\right| \leqslant$$
$$\leqslant \sum [F(X_i) - F(\overline{X}_i)]\,\sigma_i < \varepsilon \sum \sigma_i = \varepsilon S,$$

так как (в силу равномерной непрерывности) неравенство $|F(X_i) - F(\overline{X}_i)| < \varepsilon$ будет выполняться во всех ячейках при достаточно мелком разбиении поверхности.

Первая из рассматриваемых сумм есть сумма $\sum\nolimits_S$ по площади поверхности, вторая сумма есть интегральная сумма, составленная для функции

$$F(x(u, v), y(u, v), z(u, v))\sqrt{EG - F^2}.$$

Так как пределом второй суммы служит двойной интеграл, то тот же предел имеет и первая сумма; итак,

$$\int\limits_S F\,d\sigma = \lim \sum F(X_i)\,\sigma_i = \int\int F(x(u, v), y(u, v), z(u, v))\sqrt{FG - F^2}\,du\,dv.$$

Интегралы по координатам могут быть представлены при помощи интегралов по площади. Рассмотрим для определенности интеграл

$$\int\limits_S R\,dx\,dy,$$

распространенный на кусок поверхности, заданный уравнением $z = f(x, y)$; имеем:

$$\int\limits_S R\,dx\,dy = \int\limits_{D_{xy}}\int R\frac{1}{\pm\sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2}}\left(\pm\sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2}\right)dx\,dy =$$

$$= \int\limits_S R\cos\gamma\,d\sigma,$$

где перед радикалом берется знак + (или —), если интеграл распространяется на верхнюю (нижнюю) сторону куска, а γ — угол, образованный соответствующим направлением нормали с осью OZ.

Аналогично устанавливаются следующие равенства:

$$\int\limits_S P\,dy\,dz = \int\limits_S P\cos\alpha\,d\sigma; \quad \int\limits_S Q\,dx\,dz = \int\limits_S Q\cos\beta\,d\sigma$$

и

$$\int P\,dy\,dz + Q\,dx\,dz + R\,dx\,dy = \int (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,d\sigma.$$

§ 108. Формула Остроградского

Формула Остроградского служит для преобразования тройного интеграла, распространенного на замкнутую область, в интеграл по поверхности, ограничивающей эту область. Мы будем рассматривать области, ограниченные либо гладкими замкнутыми поверхностями, либо замкнутыми поверхностями, состоящими из конечного числа гладких кусков. Условимся область $\overline{D}$ называть элементарным телом, если прямая, проходящая через любую внутреннюю точку M области D и параллельная оси OX либо оси OY, либо оси OZ, пересекает границу области в двух различных точках.

Рассмотрим, например, элементарное тело, ограниченное снизу поверхностью $z = z_1(x, y)$, сверху — поверхностью $z = z_2(x, y)$, а с боков — цилиндрической поверхностью.

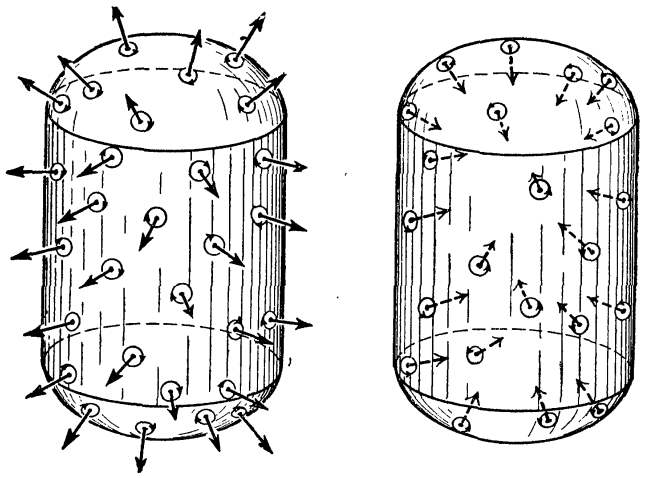
Две возможные ориентации поверхности, ограничивающей это тело, обычно называют внутренней и внешней сторонами замкнутой поверхности, а соответственные направления нормали — внутренней и внешней нормалями. Именно, при рассмотрении внешней (внутренней) стороны на верхнем куске $z = z_2(x, y)$ берется верхняя (нижняя) сторона, а на нижнем куске $z = z_1(x, y)$ берется нижняя (верхняя) сторона (черт. 285).

Пусть область $\overline{D}$ — либо элементарное тело, либо может быть разбита на конечное число элементарных тел, а S — замкнутая поверхность, ограничивающая $\overline{D}$.

Теорема. *Если функции P, Q и R в области $\overline{D}$ имеют непрерывные производные $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$ и $\frac{\partial R}{\partial z}$, то имеет место формула Остроградского:*

$$\iiint\limits_{D}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz=\oint\limits_{S}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,d\sigma,$$

где интеграл распространяется на внешнюю сторону поверхности S и α, β, γ — углы внешней нормали с осями координат.



Черт. 285.

Доказательство. Предположим, что область $\overline{D}$ есть элементарное тело; рассмотрим тройной интеграл

$$\iiint\limits_{D}\frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz.$$

Пусть $z=z_2(x, y)$ и $z=z_1(x, y)$ — уравнения кусков, ограничивающих $\overline{D}$ сверху и снизу (соответственно), а D_{xy} — проекция $\overline{D}$ на плоскость (x, y).

Представив тройной интеграл в виде повторного, получим:

$$\iiint\limits_{\overline{D}}R'_z(x, y, z)\,dx\,dy\,dz=\iint\limits_{D_{xy}}dx\,dy\int\limits_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)}R'_z(x, y, z)\,dz=$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}R(x, y, z_2(x, y))\,dx\,dy-\iint\limits_{D_{xy}}R(x, y, z_1(x, y))\,dx\,dy,$$

где двойные интегралы распространяются на положительно ориентированную область $\overline{D}_{xy}$. Первое слагаемое есть интеграл от функции R по верхней стороне куска, ограничивающего тело сверху, а второе есть интеграл от той же

функции по нижней стороне куска, ограничивающего поверхность снизу. Прибавив интеграл по боковой цилиндрической поверхности (этот интеграл равен нулю), получим (объединив в один интеграл по поверхности):

$$\iiint_D R'_z(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \int_S R(x, y, z)\,dx\,dy = \int_S R\cos\gamma\,d\sigma,$$

где интеграл по поверхности распространяется на внешнюю сторону S.

Если область $\overline{D}$ не является простым телом, то, разбив ее на простые тела, применим полученную формулу к каждому телу в отдельности и сложим почленно полученные равенства. На кусках, по которым граничат два прилегающие друг к другу тела, интегралы будут распространяться по разным сторонам. После сложения эти интегралы сократятся, и в правой части получится интеграл по внешней стороне поверхности S.

Аналогично устанавливаются формулы преобразования интегралов

$$\iiint_D P'_x\,dx\,dy\,dz \quad \text{и} \quad \iiint_D Q'_y\,dx\,dy\,dz.$$

Почленное сложение всех трех формул и даст формулу Остроградского.

§ 109. Формула Стокса

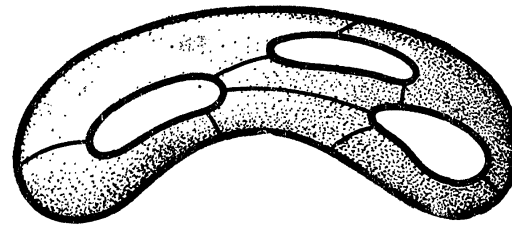
Рассмотрим ориентируемую поверхность S, составленную из конечного числа простых кусков

$$S = S_1 + S_2 + \ldots + S_n.$$

Предположим, что каждый из кусков S_i может быть параметризован посредством системы функций

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \tag{1}$$

гладких в соответствующей замкнутой области $\overline{D}_i$, ограниченной кусочной гладкой линией l_i, и что краем поверхности S служит линия L, состоящая из конечного числа простых замкнутых (пространственных) линий $L_1, L_2, \ldots, L_k$ (черт. 286).



Черт. 286.

Теорема. *Если функции P, Q и R имеют непрерывные производные в некоторой области G, содержащей поверхность S, то имеет место формула Стокса:*

$$\int_L (P\,dx + Q\,dy + R\,dz) =$$

$$= \int_S \left[\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta\right] d\sigma,$$

где L — линия, ограничивающая поверхность S и ориентированная в соответствии с ориентацией S.

Примечание. Для определения направления нормали к поверхности полезно помнить следующее практическое правило: наблюдатель, стоящий на

поверхности и обращенный головой в направлении нормали, видит движение по малому ориентированному контуру на поверхности в том же направлении, в каком видит вращение от оси OX к оси OY наблюдатель, стоящий на плоскости (x, y) и обращенный головой в положительном направлении оси OZ.

Доказательство. Предположим сначала, что S есть простой кусок, а L — простая замкнутая пространственная линия. Преобразуем криволинейный интеграл $\int\limits_L P\,dx$. Рассмотрим функцию $P(x, y, z)$ на поверхности S; положим:

$$P^*(u, v) = P\big(x(u, v),\ y(u, v),\ z(u, v)\big).$$

На линии l, ограничивающей область $\bar{D}$ в плоскости (u, v) и отображающейся на краевую линию L куска S, координаты u и v можно рассматривать как функции одного аргумента (параметра). На линии L координаты и функция $P(x, y, z)$ суть функции того же параметра:

$$x = x\big(u(t),\ v(t)\big),\ y = y\big(u(t),\ v(t)\big),\ z = z\big(u(t),\ v(t)\big),\ P = P^*\big(u(t),\ v(t)\big).$$

Для упрощения доказательства предположим, что функции $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ имеют непрерывные вторые производные (хотя окончательный результат верен и без этого ограничения).

Имеем:

$$\int\limits_L P\,dx = \int\limits_\alpha^\beta P^*\cdot\left(x'_u u' + x'_v v'\right)dt = \int\limits_l P^*\cdot x'_u\,du + P^*\cdot x'_v\,dv,$$

где ориентация линии l определяется ориентацией L при данной параметризации куска S. Применив формулу Грина, получим:

$$\int\limits_l P^* x'_u\,du + P^* x'_v\,dv = \iint\limits_D \left[\frac{\partial\left(P^* x'_v\right)}{\partial u} - \frac{\partial\left(P^* x'_u\right)}{\partial v}\right]du\,dv =$$

$$= \iint\limits_D \left(\frac{\partial P^*}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial P^*}{\partial v}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}\right)du\,dv,$$

где область D ориентирована в соответствии с ориентацией линии l. Вычислив производные функции P^*:

$$\frac{\partial P^*}{\partial u} = \frac{\partial P}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial u},$$

$$\frac{\partial P^*}{\partial v} = \frac{\partial P}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial v}$$

и подинтегральное выражение двойного интеграла, после несложных преобразований получим:

$$\int\limits_L P\,dx = \iint\limits_D \left(\frac{\partial P^*}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial P^*}{\partial v}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}\right)du\,dv =$$

$$= \iint\limits_D \left[\frac{\partial P}{\partial z}\frac{D(z, x)}{D(u, v)} - \frac{\partial P}{\partial y}\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right]du\,dv =$$

$$= \int\limits_S \left[\frac{\partial P}{\partial z}\,dx\,dz - \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy\right] = \int\limits_S \left[\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta - \frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\right]d\sigma.$$

Аналогично преобразуются два другие криволинейные интеграла — достаточно произвести круговую перестановку букв:

$$\int_L Q\,dy = \int_S \left[\frac{\partial Q}{\partial x}\cos\gamma - \frac{\partial Q}{\partial z}\cos\alpha\right] d\sigma;$$

$$\int_L R\,dz = \int_S \left[\frac{\partial R}{\partial y}\cos\alpha - \frac{\partial R}{\partial x}\cos\beta\right] d\sigma.$$

Сложив почленно эти равенства, получим формулу Стокса.

Если ориентированная поверхность S составлена из конечного числа простых кусков, то, применив формулу Стокса к каждому куску в отдельности, сложим почленно полученные равенства. Криволинейные интегралы по дугам, к которым прилегают два различные куска, сократятся, и в результате получится криволинейный интеграл вдоль края L поверхности S. Интегралы по поверхности, распространенные на куски, в сумме дадут интеграл, распространенный на S. Отсюда и следует формула Стокса для рассматриваемой поверхности.

§ 110. Понятие о приложениях интегралов по поверхности

Заданием трех функций

$$A_x(x, y, z),\quad A_y(x, y, z),\quad A_z(x, y, z)$$

в некоторой области определяется вектор

$$\mathbf{A} = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k},$$

проекции которого на координатные оси в каждой данной точке равны соответствующим значениям этих функций. Таким образом, каждой точке области ставится в соответствие вполне определенный вектор, или, как говорят иначе, задается векторное поле. Пусть S — данная замкнутая поверхность; выражение

$$A_x\cos\alpha + A_y\cos\beta + A_z\cos\gamma = \mathbf{An}$$

есть скалярное произведение вектора $\mathbf{A}$ на единичный вектор $\mathbf{n}$ внешней нормали к поверхности S; оно равно проекции A_n вектора $\mathbf{A}$ на направление $\mathbf{n}$. Скалярная функция

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

называется дивергенцией вектора $\mathbf{A}$ и обозначается так: $\operatorname{div}\mathbf{A}$. В этих обозначениях формула Остроградского запишется следующим образом:

$$\int_S A_n\,d\sigma = \iiint_V \operatorname{div}\mathbf{A}\,dV,$$

где V — тело, ограниченное поверхностью S.

Предположим, что пространство заполнено несжимаемой жидкостью, причем скорость движения каждой частицы определяется лишь ее координатами и не зависит от времени. Такое движение называется установившимся движением жидкости. Пусть

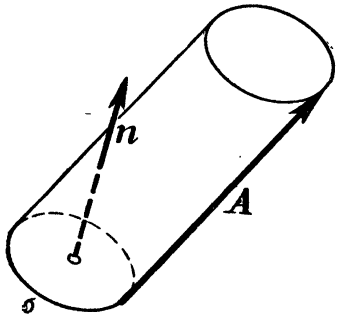
$$\mathbf{A} = A_x(x, y, z)\,\mathbf{i} + A_y(x, y, z)\,\mathbf{j} + A_z(x, y, z)\,\mathbf{k}$$

есть вектор скорости установившегося движения. Рассмотрим малый элемент поверхности σ и подсчитаем приближенно объем жидкости ΔV, протекающей

через этот элемент за единицу времени. Считая (приближенно) в пределах σ вектор скорости постоянным, а сам элемент плоским, получим

$$\Delta V \approx \sigma\, \mathbf{An} = A_n \sigma,$$

так как ΔV есть объем косого цилиндра с основанием σ и с высотой, равной проекции A_n образующей $\mathbf{A}$ на направление $\mathbf{n}$ нормали к σ (черт. 287). Количество жидкости, протекающей через поверхность S в единицу времени, определяется при помощи суммирования элементов ΔV и перехода к пределу. Значит, искомый объем выразится интегралом по поверхности



Черт. 287.

$$V = \int_S A_n \, d\sigma. \qquad (1)$$

В силу изложенной интерпретации интеграл (1) называется *потоком вектора через поверхность* S.

Если S — замкнутая поверхность, а $\mathbf{n}$ — направление внешней нормали, то поток означает количество жидкости, вытекающей из S в единицу времени (отрицательный результат означает втекание жидкости).

Пусть U — некоторая окрестность данной точки (x, y, z). Перепишем формулу Остроградского, применив к правой части теорему о среднем значении

$$V = \operatorname{div} \mathbf{A}\,(\xi, \eta, \zeta)\, U,$$

откуда

$$\operatorname{div} \mathbf{A}\,(x, y, z) = \lim_{\delta \to 0} \frac{V}{U}.$$

Иными словами, дивергенцию можно толковать как предел отношения количества жидкости, истекающей из окрестности данной точки, к объему этой окрестности. Благодаря полученной интерпретации дивергенцию называют силой источника векторного поля в данной точке. Дивергенция характеризует интенсивность возникновения (или исчезания) жидкости в данной точке. Выполнение тождественного равенства

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = 0$$

характеризует векторное поле, не имеющее источников, — это поле называется соленоидальным. Для соленоидального поля $\int_S A_n \, d\sigma = 0$ по любой замкнутой поверхности. Значит, поток поля через любую замкнутую поверхность равен нулю.

Это можно интерпретировать следующим образом: объем жидкости, вытекающей из области, ограниченной замкнутой поверхностью, равен объему втекающей жидкости.

ГЛАВА XI

ИНТЕГРАЛЫ, СОДЕРЖАЩИЕ ПАРАМЕТР. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§ 111. Определенный интеграл как функция параметра

Предположим, что функция двух аргументов $f(x, \alpha)$, определенная в некотором прямоугольнике

$$a \leqslant x \leqslant b, \quad \alpha_0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_1, \tag{$\bar{R}$}$$

интегрируема (по аргументу x) на сегменте $[a, b]$ при каждом значении $\alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]$. Рассмотрим интеграл

$$\Phi(\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha)\, dx$$

как функцию параметра $\alpha_0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_1$.

Теорема. *Если функция $f(x, \alpha)$ непрерывна в прямоугольнике $\bar{R}$, то функция $\Phi(\alpha)$ непрерывна на сегменте $\alpha_0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_1$.*

Доказательство. Пусть $\beta \in [\alpha_0, \alpha_1]$ — произвольное значение параметра. Докажем, что функция $\Phi(\alpha)$ непрерывна в точке β. В силу непрерывности функции $f(x, \alpha)$ существует предельная функция $\lim\limits_{\alpha \to \beta} f(x, \alpha) = f(x, \beta)$ и имеет место равномерная (относительно x) сходимость:

$$f(x, \alpha) \underset{\alpha \to \beta}{\rightrightarrows} f(x, \beta).$$

По теореме о переходе к пределу под знаком интеграла получим:

$$\lim_{\alpha \to \beta} \Phi(\alpha) = \lim \int_a^b f(x, \alpha)\, dx = \int_a^b \lim f(x, \alpha)\, dx = \int_a^b f(x, \beta) dx = \Phi(\beta).$$

Итак, $\lim\limits_{\alpha \to \beta} \Phi(\alpha) = \Phi(\beta)$; значит, функция $\Phi(\alpha)$ непрерывна в любой точке сегмента $[\alpha_0, \alpha_1]$, т. е. $\Phi(\alpha)$ непрерывна на этом сегменте, ч. т. д.

Теорема. *Если функция $f(x, \alpha)$ и ее производная по параметру $f'_\alpha(x, \alpha)$ непрерывна в прямоугольнике $\bar{R}$, то функция*

$$\Phi(\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha)\, dx$$

на сегменте $[\alpha_0, \alpha_1]$ *имеет производную и*

$$\frac{d\Phi}{d\alpha} = \int_a^b f'_\alpha(x, \alpha)\, dx.$$

Последняя формула называется формулой дифференцирования интеграла по параметру, или формулой дифференцирования под знаком интеграла.

Доказательство. Имеем:

$$\Phi(\alpha+h) - \Phi(\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha+h)\, dx - \int_a^b f(x, \alpha)\, dx =$$

$$= \int_a^b [f(x, \alpha+h) - f(x, \alpha)]\, dx = \int_a^b h f'_\alpha(x, \alpha+\theta h)\, dx,$$

откуда

$$\frac{\Phi(\alpha+h) - \Phi(\alpha)}{h} = \int_a^b f'_\alpha(x, \alpha+\theta h)\, dx.$$

В силу равномерной непрерывности производной f'_α в прямоугольнике $\bar{R}$ неравенство

$$|f'_\alpha(x_2, \alpha_2) - f'_\alpha(x_1, \alpha_1)| < \varepsilon$$

будет выполняться для произвольной пары точек (x_1, α_1) и (x_2, α_2), если только $|x_2 - x_1| < \delta$ и $|\alpha_2 - \alpha_1| < \delta$, где число δ определяется заданием ε.

Положив, в частности, $x_1 = x_2 = x$ и $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = \alpha + \theta h$, будем иметь:

$$|f'_\alpha(x, \alpha+\theta h) - f'_\alpha(x, \alpha)| < \varepsilon,$$

если $|h| < \delta$ при произвольном $x \in [a, b]$, а потому

$$f'_\alpha(x, \alpha+\theta h) \underset{h \to 0}{\rightrightarrows} f'_\alpha(x, \alpha).$$

Следовательно, возможен переход к пределу под знаком интеграла:

$$\Phi'(\alpha) = \lim_{h \to 0} \frac{\Phi(\alpha+h) - \Phi(\alpha)}{h} = \int_a^b \lim f'_\alpha(x, \alpha+\theta h)\, dx =$$

$$= \int_a^b f'_\alpha(x, \alpha)\, dx, \qquad \text{ч. т. д.}$$

Теорема. *Если функция* $f(x, \alpha)$ *непрерывна в прямоугольнике* $\bar{R}$, *то имеет место следующая формула интегрирования по*

параметру под знаком интеграла:

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \Phi(\alpha)\,d\alpha = \int_a^b dx \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} f(x, \alpha)\,d\alpha.$$

Доказательство. Функция $\Phi(\alpha)$, будучи непрерывной, интегрируема на сегменте $[\alpha_0, \alpha_1]$. Подлежащее доказательству равенство выражает равенство повторных интегралов:

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha_1} d\alpha \int_a^b f(x, \alpha)\,dx = \int_a^b dx \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} f(x, \alpha)\,d\alpha.$$

Согласно теореме о повторных интегралах (§ 91) это равенство имеет место для всякой функции $f(x, \alpha)$, непрерывной в прямоугольнике $\overline{R}$, ч. т. д.

Примечание I. Равенство повторных интегралов имеет место не только для случая непрерывной функции. Это равенство справедливо, если функция $f(x, \alpha)$ (рассматриваемая как функция двух аргументов) интегрируема в $\overline{R}$ и существуют интегралы $\int_a^b f(x, \alpha)\,dx$ и $\int_{\alpha_0}^{\alpha_1} f(x, \alpha)\,d\alpha$. В частности, ограниченная функция $f(x, \alpha)$ может иметь в $\overline{R}$ конечное множество линий разрыва с общей площадью, равной нулю.

Примечание II. Можно дать непосредственное доказательство теоремы, не опирающееся на теорию двойных интегралов. Пусть $f(x, \alpha)$ — функция, непрерывная в прямоугольнике $\overline{R}$, и (σ) — произвольное разбиение сегмента $[\alpha_0, \alpha_1]$; составим интегральную сумму функции $\Phi(\alpha)$:

$$\sum \Phi(\xi_i)\,\sigma_i = \sum \sigma_i \int_a^b f(x, \xi_i)\,dx = \int_a^b \left[\sum f(x, \xi_i)\,\sigma_i\right] dx.$$

Для доказательства возможности перехода к пределу под знаком интеграла достаточно доказать, что

$$\sum f(x, \xi_i)\,\sigma_i \rightrightarrows \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} f(x, \alpha)\,d\alpha.$$

Значит, надо установить, что неравенство

$$\Delta(x, \sigma) = \left| \sum f(x, \xi_i)\,\sigma_i - \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} f(x, \alpha)\,d\alpha \right| < \varepsilon$$

имеет место, если разбиение (σ) есть δ-разбиение, где число δ определяется заданием ε и может быть выбрано одним и тем же при произвольном $x \in [a, b]$. В самом деле,

$$\Delta(x, \sigma) = \left| \sum f(x, \xi_i)\,\sigma_i - \int_{\alpha}^{\alpha_1} f(x, \alpha)\,d\alpha \right| = \left| \sum f(x, \xi_i)\,\sigma_i - \sum_{\sigma_i} \int f(x, \alpha)\,d\alpha \right| =$$

$$= \left| \sum f(x, \xi_i)\,\sigma_i - \sum f(x, \mu_i)\,\sigma_i \right| \leqslant \sum |f(x, \xi_i) - f(x, \mu_i)|\,\sigma_i,$$

где (по теореме о среднем значении) $\mu_i \in \sigma_i$. В силу равномерной непрерывности функции f неравенство

$$|f(x, \xi_i) - f(x, \mu_i)| < \frac{\varepsilon}{\alpha_1 - \alpha_0}$$

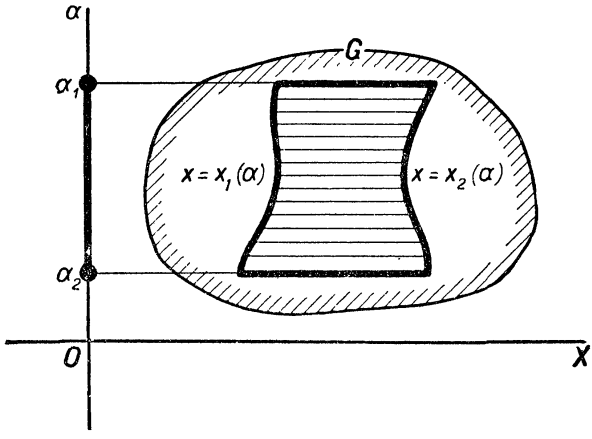
будет иметь место при произвольном $x \in [a, b]$, если $|\xi_i - \mu_i| < \delta$. Но тогда для любого δ-разбиения (σ)

$$\Delta(x, \sigma) < \sum \frac{\varepsilon}{\alpha_1 - \alpha_0} \sigma_i = \varepsilon, \quad \text{т. е. } \Delta(x, \sigma) \rightrightarrows 0.$$

Перейдя к пределу, под знаком интеграла получим:

$$\lim \int_a^b \left[\sum f(x, \xi_i)\, \sigma_i\right] dx = \int_a^b \left[\int_{\alpha_0}^{\alpha_1} f(x, \alpha)\, d\alpha\right] dx, \text{ ч. т. д.}$$

Предположим, что функции $f(x, \alpha)$ и $f'_\alpha(x, \alpha)$ непрерывны в некоторой замкнутой ограниченной области $\bar{G}$. Рассмотрим две функции $x = x_1(\alpha)$ и $x = x_2(\alpha)$, непрерывные на сегменте $\alpha_0 < \alpha < \alpha_1$ и удовлетворяющие следующим условиям:



Черт. 288.

1° *линии* $x = x_1(\alpha)$ *и* $x = x_2(\alpha)$ *при* $\alpha_0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_1$ *содержатся в области* G;

2° *при любом данном значении* $\alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]$ *отрезок, отсекаемый линиями* $x = x_1(\alpha)$ *и* $x = x_2(\alpha)$ *на соответствующей параллели оси* OX, *содержится в области* G (черт. 288).

Рассмотрим функцию $\Phi(\alpha)$, определенную на сегменте $\alpha_0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_1$ следующим законом соответствия:

$$\Phi(\alpha) = \int_{x_1(\alpha)}^{x_2(\alpha)} f(x, \alpha)\, dx.$$

Теорема. *Если функции* $x_1(\alpha)$ *и* $x_2(\alpha)$ *дифференцируемы на сегменте* $[\alpha_0, \alpha_1]$, *то функция* $\Phi(\alpha)$ *также дифференцируема на этом сегменте и*

$$\Phi'(\alpha) = \int_{x_1(\alpha)}^{x_2(\alpha)} f'_\alpha(x, \alpha)\, dx + f(x_2(\alpha), \alpha)\, x'_2(\alpha) - f(x_1(\alpha), \alpha)\, x'_1(\alpha).$$

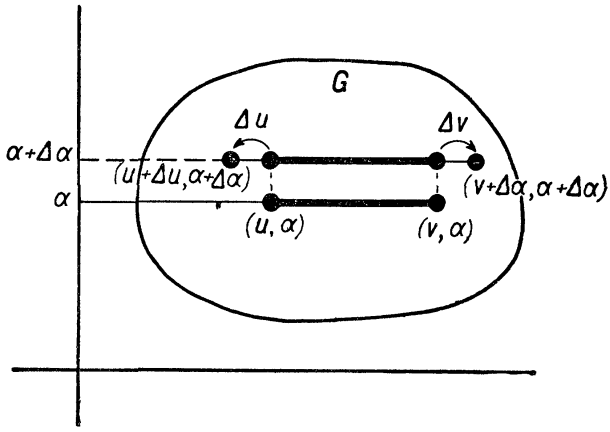
Доказательство. Рассмотрим функцию трех аргументов:

$$F(\alpha, u, v) = \int_u^v f(x, \alpha)\, dx$$

(где отрезок, соединяющий точки (u, α) и (v, α), содержится внутри G, черт. 289). Докажем, что функция $F(\alpha, u, v)$ имеет непрерывные частные производные по аргументам α, u и v. В самом деле, производные

$$\frac{\partial F}{\partial u} = -f(u, \alpha) \text{ и } \frac{\partial F}{\partial v} = f(v, \alpha)$$

непрерывны в силу непрерывности функции $f(x, \alpha)$.



Черт. 289.

Частная производная

$$F'_\alpha(\alpha, u, v) = \int_u^v f'_\alpha(x, \alpha)\, dx$$

также непрерывна. В самом деле,

$$F'_\alpha(\alpha+\Delta\alpha, u+\Delta u, v+\Delta v) = \int_{u+\Delta u}^{v+\Delta v} f'_\alpha(x, \alpha+\Delta\alpha)\, dx =$$

$$= \int_u^v f'_\alpha(x, \alpha+\Delta\alpha)\, dx + \int_{u+\Delta u}^{u} f'_\alpha(x, \alpha+\Delta\alpha)\, dx +$$

$$+ \int_v^{v+\Delta v} f'_\alpha(x, \alpha+\Delta\alpha)\, dx,$$

откуда

$$\lim_{\substack{\Delta\alpha\to 0\\ \Delta u\to 0\\ \Delta v\to 0}} F'_\alpha(\alpha+\Delta\alpha, u+\Delta u, v+\Delta v) = F'_\alpha(\alpha, u, v),$$

так как первое слагаемое имеет предел, равный

$$\int_u^v f'_\alpha(x, \alpha)\, dx = F'_\alpha(\alpha, u, v),$$

а второе и третье слагаемые имеют предел, равный нулю.

Это ясно, если принять во внимание, что производная $f'_\alpha(x, \alpha)$, будучи непрерывной в области $\overline{G}$, ограничена: $f'_\alpha(x, \alpha) < M$, но тогда второе и третье слагаемые по абсолютной величине меньше, чем

$$|\Delta u|\, M \text{ и } |\Delta v|\, M.$$

Функция $F(\alpha, u, v)$, как имеющая непрерывные производные, дифференцируема. Сложная функция

$$\Phi(\alpha) = F\big(\alpha, x_1(\alpha), x_2(\alpha)\big) = \int_{x_1(\alpha)}^{x_2(\alpha)} f(x, \alpha)\, dx$$

также дифференцируема и

$$\frac{d\Phi}{d\alpha} = \frac{\partial F}{\partial \alpha} + \frac{\partial F}{\partial v} \cdot \frac{dv}{d\alpha} + \frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{du}{d\alpha},$$

где $u = x_1(\alpha)$ и $v = x_2(\alpha)$.

Произведя подстановку, получим:

$$\frac{d\Phi}{d\alpha} = \int_{x_1(\alpha)}^{x_2(\alpha)} f'_\alpha(x, \alpha)\, dx + f\big(x_2(\alpha), \alpha\big)\, x'_2(\alpha) - f\big(x_1(a), \alpha\big)\, x'_1(\alpha), \text{ ч. т. д.}$$

Примеры.

1. Интеграл $I(\alpha) = \int_0^b \frac{dx}{\alpha^2 + x^2}$ есть непрерывная функция параметра α в интервале $0 < \alpha < +\infty$. В самом деле, пусть α_0 и α_1 — произвольные числа, взятые при условии $0 < \alpha_0 < \alpha < \alpha_1$; в прямоугольнике

$$\alpha_0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_1, \quad a \leqslant x \leqslant b \qquad (\overline{R})$$

подинтегральная функция непрерывна; следовательно, функция $I(\alpha)$ непрерывна в точке α. В этом можно убедиться и непосредственным вычислением:

$$I(\alpha) = \frac{1}{\alpha} \operatorname{arc\,tg} \frac{b}{\alpha}.$$

Так как подинтегральная функция имеет производную по α, непрерывную в $\overline{R}$, то производная $I'(\alpha)$ может быть найдена дифференцированием под знаком интеграла:

$$I'(\alpha) = -\int_0^b \frac{2\alpha\, dx}{(\alpha^2 + x^2)^2}.$$

Но, с другой стороны,

$$I'(\alpha) = -\frac{1}{\alpha^2} \operatorname{arc\,tg} \frac{b}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} \frac{b}{\alpha^2 + b^2}.$$

Сопоставив результаты, получим:

$$\int_0^b \frac{dx}{(\alpha^2 + x^2)^2} = \frac{1}{2\alpha^3} \operatorname{arc\,tg} \frac{b}{\alpha} + \frac{b}{2\alpha^2 (\alpha^2 + b^2)}. \qquad (1)$$

Если рассматривать интеграл как функцию верхнего предела (заменив b на x), то получим примитивную от подинтегральной функции:

$$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2} = \frac{1}{2a^3} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a} + \frac{x}{2a^2(a^2+x^2)} + C.$$

Дальнейшим дифференцированием равенства (1) по a можно получить формулу для $\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^3}$ и т. д.

2. Вычислить интеграл

$$I(m) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin^2 x + m^2 \cos^2 x)\, dx \quad (\text{где } m > 0).$$

При $m > 0$ подинтегральная функция есть дифференцируемая функция аргументов x и m. Выполнив дифференцирование под знаком интеграла, получим:

$$I'(m) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2m\cos^2 x}{\sin^2 x + m^2 \cos^2 x}\, dx;$$

положив $\operatorname{tg} x = t$, получим:

$$I'(m) = \int_0^{+\infty} \frac{2m\, dt}{(t^2+m^2)(1+t^2)}.$$

Разложим подинтегральную функцию на элементарные дроби:

$$\frac{1}{(t^2+m^2)(t^2+1)} = \frac{-1}{(m^2-1)(t^2+m^2)} + \frac{1}{(m^2-1)(t^2+1)},$$

при этом считаем $m \neq 1$. Интегрируя, находим:

$$I'(m) = \frac{2m}{m^2-1}\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2+1} - \frac{2m}{m^2-1}\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2+m^2}$$

(все указанные преобразования возможны, так как получились сходящиеся несобственные интегралы).

$$I'(m) = \frac{2m}{m^2-1}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{2m}{m^2-1}\cdot\frac{\pi}{2m}, \quad \text{или} \quad I'(m) = \frac{\pi}{m+1},$$

откуда

$$I(m) = \pi \ln(m+1) + C.$$

Это равенство доказано при $m \neq 1$, но так как обе части непрерывны в точке $m = 1$, то равенство сохраняется и при $m = 1$. Положим $m = 1$: $I(1) = \pi \ln 2 + C$, и, приняв во внимание, что $I(1) = 0$, получим $C = -\pi \ln 2$; следовательно,

$$I(m) = \pi \ln \frac{m+1}{2}.$$

3. Вычислить интеграл $I=\int\limits_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,dx$ (ср. том I, § 138, пример 4).

Рассмотрим интеграл

$$I(\alpha)=\int\limits_0^1 \frac{\ln(1+\alpha x)}{1+x^2}\,dx,$$

где $0\leqslant\alpha\leqslant 1$. При $\alpha=1$ получим искомый интеграл, $I=I(1)$. При $0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant\alpha\leqslant 1$ подинтегральная функция непрерывна и имеет непрерывную производную по α, поэтому возможно применить формулу дифференцирования под знаком интеграла:

$$I'(\alpha)=\int\limits_0^1 \frac{x}{(1+\alpha x)(1+x^2)}\,dx.$$

Разложив подинтегральную функцию на элементарные дроби, получим:

$$\frac{x}{(1+\alpha x)(1+x^2)}=-\frac{\alpha}{1+\alpha^2}\cdot\frac{1}{1+\alpha x}+\frac{1}{1+\alpha^2}\cdot\frac{x}{1+x^2}+\frac{\alpha}{1+\alpha^2}\cdot\frac{1}{1+x^2},$$

откуда:

$$I'(\alpha)=\frac{1}{1+\alpha^2}\left[\int\limits_0^1\frac{-\alpha\,dx}{1+\alpha x}+\int\limits_0^1\frac{x\,dx}{1+x^2}+\int\limits_0^1\frac{\alpha\,dx}{1+x^2}\right]=$$

$$=\frac{1}{1+\alpha^2}\left[-\ln(1+\alpha)+\frac{1}{2}\ln 2+\alpha\frac{\pi}{4}\right].$$

Проинтегрировав по α от 0 до 1, получим:

$$I(1)-I(0)=-\int\limits_0^1\frac{\ln(1+\alpha)}{1+\alpha^2}\,d\alpha+\frac{1}{2}\ln 2\int\limits_0^1\frac{d\alpha}{1+\alpha^2}+\frac{\pi}{4}\int\limits_0^1\frac{\alpha}{1+\alpha^2}\,d\alpha,$$

или

$$I=-I+\frac{\pi}{4}\ln 2,\quad \text{а потому}\quad I=\frac{\pi}{8}\ln 2.$$

4. Доказать, что если $f(x)$ есть функция, непрерывная на сегменте $a\leqslant x\leqslant b$, то функция

$$F(x)=\frac{1}{(n-1)!}\int\limits_a^x (x-t)^{n-1}f(t)\,dt \tag{1}$$

удовлетворяет условиям:

$$F(a)=F'(a)=\ldots=F^{(n-1)}(a)=0\quad\text{и}\quad F^{(n)}(x)=f(x).$$

В самом деле, дифференцируя по x, получим:

$$F'(x)=\frac{1}{(n-1)!}\int\limits_a^x (n-1)(x-t)^{n-2}f(t)\,dt+\frac{1}{(n-1)!}(x-x)^{n-1}f(x)$$

(здесь параметр x содержится и под интегралом, и в верхнем пределе), или

$$F'(x) = \frac{1}{(n-2)!}\int_a^x (x-t)^{n-2} f(t)\,dt.$$

Положив $x = a$, получим $F'(a) = 0$.

Повторное дифференцирование приводит к равенствам:

$$F''(x) = \frac{1}{(n-3)!}\int_a^x (x-t)^{n-3} f(t)\,dt, \ldots, F^{(n-1)}(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

и, наконец, $F^{(n)}(x) = f(x)$.

Следствие. Предположим, что функция $f(x)$ имеет в окрестности точки a непрерывную производную порядка $n+1$, тогда разность между $f(x)$ и многочленом Тейлора $T_n(x)$ в точке a

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x)$$

удовлетворяет условиям:

$$R_n(a) = R_n'(a) = \ldots = R_n^{(n)}(a) = 0,\ R_n^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x).$$

Заменив в равенстве (1) $F(x)$ на $R_n(x)$, $f(t)$ на $f^{(n+1)}(t)$ и n на $n+1$, получим представление остаточного члена формулы Тейлора в виде определенного интеграла:

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt.$$

Приняв во внимание, что $(x-t)^n$—знакоположительная функция, применим теорему о среднем значении:

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi)\int_a^x (x-t)^n\,dt = \frac{(x-a)^{n+1} f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

(форма Лагранжа).

Если применить теорему о среднем значении другим способом, то получим остаточный член в форме Коши:

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n(x-a) = \frac{(x-a)^{n+1}(1-\vartheta)^n}{n!} f^{(n+1)}(a+\vartheta(x-a)),$$

где $\xi = a + \vartheta(x-a)$.

5. Доказать, что если функция $f(x)$ непрерывна в некотором промежутке, содержащем точку a, то функция

$$y(x) = \frac{1}{k}\int_a^x f(t)\sin k(x-t)\,dt$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$y'' + k^2 y = f(x).$$

В самом деле

$$y'(x) = \frac{1}{k}\int_a^x f(t)\, k \cos k(x-t)\, dt + \frac{1}{k} f(x) \sin k(x-x) = \int_a^x f(t) \cos k(x-t)\, dt;$$

$$y'' = -k\int_a^x f(t) \sin k(x-t)\, dt + f(x) \cos k(x-x) = -k^2 y(x) + f(x).$$

Подставив в дифференциальное уравнение, получим тождество.

§ 112. Основные теоремы о несобственных интегралах

Мы будем рассматривать простейшие несобственные интегралы (том I, гл. XII)

$$\int_a^B f(x)\, dx \quad \text{и} \quad \int_A^b f(x)\, dx$$

с особенностью на верхнем и нижнем пределах соответственно. Для определенности мы будем формулировать основные предложения применительно к интегралу $\int_a^B f(x)\, dx$ с особенностью на верхнем пределе. Формулировку соответственных предложений для интеграла $\int_A^b f(x)\, dx$ предоставляем читателю. Итак, предположим, что в точке B имеет место по крайней мере одна из особенностей:

1° $B = +\infty$;

2° *функция $f(x)$ неограничена в окрестности точки B.*

Основные теоремы теории рядов могут быть перенесены на несобственные интегралы, при этом

1°. *Вместо частных сумм рассматриваются частные интегралы*

$$I(X) = \int_a^X f(x)\, dx, \quad \text{где } a \leqslant X < B;$$

несобственный интеграл $\int_a^B f(x)\, dx$ *(по определению) равен пределу*

частного интеграла

$$\int_a^B f(x)\,dx = \lim_{X \to B} \int_a^X f(x)\,dx.$$

2°. *Остаточным членом сходящегося интеграла называется разность*

$$R(X) = \int_a^B f(x)\,dx - \int_a^X f(x)\,dx = \int_X^B f(x)\,dx.$$

3°. *Отрезком интеграла будем называть интеграл*

$$I(X_1, X_2) = \int_{X_1}^{X_2} f(x)\,dx, \quad \text{где } a < X_1 < X_2 < B.$$

4°. В силу критерия Коши *необходимым и достаточным условием сходимости интеграла I является следующее условие: при любом заданном $\varepsilon > 0$ существует такая окрестность U_B точки B, что для отрезков интеграла выполняется неравенство:*

$$|I(X_1, X_2)| = \left| \int_{X_1}^{X_2} f(x)\,dx \right| < \varepsilon,$$

где $X_1 < X_2$ — две произвольные точки в окрестности U_B:

$$X_1 < X_2 < B.$$

На нижеследующих примерах выясняется смысл сформулированных основных понятий.

Примеры.

1. Рассмотрим сходящийся интеграл

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = -\left[e^{-x}\right]_0^{+\infty} = 1.$$

а) Частный интеграл есть

$$I(X) = \int_0^X e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_0^X = 1 - e^{-X}.$$

б) Остаточный член есть

$$R(X) = \int_X^{+\infty} e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_X^{+\infty} = e^{-X}.$$

Имеем:

$$I = I(X) + R(X).$$

c) Отрезок интеграла есть

$$I(X_1, X_2) = \int_{X_1}^{X_2} e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_{X_2}^{X_1} = e^{-X_1} - e^{-X_2}, \text{ где } 0 < X_1 < X_2.$$

d) Так как

$$0 < I(X_1, X_2) < e^{-X_1} = \frac{1}{e^{X_1}},$$

то неравенство $|I(X_1, X_2)| < \varepsilon$ (критерий Коши) выполняется при произвольных X_1 и X_2, удовлетворяющих условиям

$$\ln\frac{1}{\varepsilon} < X_1 < X_2.$$

2. Рассмотрим сходящийся интеграл с особенностью на нижнем пределе

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \left[2\sqrt{x}\right]_0^1 = 2.$$

a) Частный интеграл есть

$$I(X) = \int_X^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \left[2\sqrt{x}\right]_X^1 = 2 - 2\sqrt{X}, \text{ где } 0 < X < 1.$$

b) Остаточный член есть

$$R(X) = \int_0^X \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{X}.$$

Имеем:

$$I = I(X) + R(X).$$

c) Отрезок интеграла есть

$$I(X_1, X_2) = \int_{X_2}^{X_1} \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2(\sqrt{X_1} - \sqrt{X_2}).$$

d) Критерий Коши выполняется, так как

$$|I(X_1, X_2)| = 2(\sqrt{X_1} - \sqrt{X_2}) < 2\sqrt{X_1} < \varepsilon$$

при произвольных значениях X_1 и X_2, взятых при условиях $0 < X_2 < X_1 < \frac{\varepsilon^2}{4}$.

3. Рассмотрим расходящийся интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{1-x}$. Отрезок этого интеграла равен

$$I(X_1, X_2) = \int_{X_1}^{X_2} \frac{dx}{1-x} = \left[-\ln(1-x)\right]_{X_1}^{X_2} = \ln\frac{1-X_1}{1-X_2}.$$

Положим, например, $X_1 = 1 - \frac{2}{n}$ и $X_2 = 1 - \frac{1}{n}$; имеем: $I(X_1, X_2) = \ln 2$. Отсюда ясно, что критерий Коши для данного интеграла не выполняется.

5°. *Если функция* $f(x)$ *неотрицательна, то интеграл* $\int_a^B f(x)\,dx$ *будем называть знакоположительным.*

В этом случае частный интеграл $I(X) = \int_a^X f(X)\,dx$ есть монотонная (неубывающая) функция верхнего предела X.

6°. *Необходимым и достаточным условием сходимости знакоположительного интеграла является ограниченность частных интегралов:* $I(X) < M$.

7°. *Если знакоположительный интеграл* $\int_a^B |f(x)|\,dx$ *сходится, то сходится и интеграл* $\int_a^B f(x)\,dx$; *в этом случае второй интеграл называется абсолютно сходящимся.*

Доказательство сходимости интеграла $\int_a^B f(x)\,dx$ аналогично доказательству соответствующей теоремы об абсолютно сходящихся рядах: достаточно принять во внимание неравенства $\int_{X_1}^{X_2} |f(x)|\,dx < \varepsilon$ в некоторой окрестности U_B точки B (критерий Коши) и

$$\left| \int_{X_1}^{X_2} f(x)\,dx \right| \leqslant \int_{X_1}^{X_2} |f(x)|\,dx.$$

Если интеграл $\int_a^B f(x)\,dx$ *является сходящимся, а интеграл* $\int_a^B |f(x)|\,dx$ *— расходящимся, то интеграл* $\int_a^B f(x)\,dx$ *называется условно сходящимся.*

8°. Для знакоположительных интегралов имеет место принцип сравнения: *если*

$$0 \leqslant f(x) \leqslant F(x) \quad \text{и} \quad \int_a^B F(x)\,dx$$

сходится, то и интеграл $\int_a^B f(x)\,dx$ *сходится.* В самом деле, достаточно принять во внимание, что частные интегралы $\int_a^X f(x)dx$ при всех значениях $X \in [a, B)$ ограничены:

$$\int_a^X f(x)\,dx \leqslant \int_a^X F(x)\,dx < \int_a^B F(x)\,dx.$$

Аналогично устанавливается признак расходимости: *если* $0 \leqslant \Phi(x) \leqslant f(x)$ *и интеграл* $\int_a^B \Phi(x)\,dx$ *расходится, то расходится и интеграл* $\int_a^B f(x)\,dx$.

Примечание. Если $a < a_1 < X$, то

$$\int_a^X f(x)\,dx = \int_a^{a_1} f(x)\,dx + \int_{a_1}^X f(x)\,dx;$$

из этого равенства следует, что пределы

$$\lim_{X \to B} \int_a^X f(x)\,dx \quad \text{и} \quad \lim_{X \to B} \int_{a_1}^X f(x)\,dx$$

либо оба существуют, либо оба не существуют. Значит, для исследования характера интеграла $\int_a^B f(x)\,dx$ нижний его предел a всегда можно заменить другим числом a_1, лежащим между a и B. Поэтому *при применении признаков сходимости (или расходимости) достаточно установить выполнение этих признаков в некоторой окрестности (односторонней) точки B.*

9°. Пусть

$$a = b_0 < b_1 < b_2 < \ldots < b_n < \ldots \qquad \{b_n\}$$

— произвольная возрастающая последовательность чисел, взятых при условии $\lim b_n = B$. *Всякий сходящийся интеграл* $I = \int_a^B f(x)\,dx$ *может быть представлен в виде суммы ряда:*

$$I = \int_a^{b_1} f(x)\,dx + \int_{b_1}^{b_2} f(x)\,dx + \ldots + \int_{b_{n-1}}^{b_n} f(x)\,dx + \ldots.$$

В самом деле, частные суммы этого ряда образуют последовательность частных интегралов

$$s_n = \int_a^{b_n} f(x)\,dx = I(b_n). \qquad \{I(b_n)\}$$

Но так как $\lim\limits_{X \to B} I(X)$ существует, то тот же предел имеет последовательность $\{I(b_n)\}$.

Если при каком-либо специальном выборе последовательности $\{b_n\}$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \int\limits_{b_{n-1}}^{b_n} f(x)\,dx$ сходится, то интеграл $\int\limits_0^B f(x)\,dx$ может и не быть сходящимся, однако если при произвольном выборе последовательности $\{b_n\}$ рассматриваемый ряд сходится, то сходится и данный интеграл (концепция предела по Гейне).

Различные частные признаки сходимости (расходимости) знакоположительных интегралов обычно устанавливаются путем сравнения исследуемого интеграла с интегралами, характер которых известен. Отметим следующие наиболее часто встречающиеся признаки.

Если $0 \leqslant f(x)$ *и существует такое число* $p > 1$, *что произведение* $f(x)\,x^p$ *ограничено в окрестности точки* $+\infty$, то $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *сходится.*

В самом деле, если $f(x)\,x^p < M$, то $f(x) < \dfrac{M}{x^p}$, но при $p > 1$ интеграл $\int \dfrac{dx}{x^p}$ сходится.

В частности, это условие сходимости выполняется, если существует конечный предел $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)\,x^p$ (где $p \geqslant 1$).

Аналогично устанавливается признак расходимости: *если существуют такие числа* $p \leqslant 1$ *и* $M > 0$, *что* $f(x)\,x^p > M$ *в окрестности точки* $+\infty$, *то* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *расходится.*

В частности, это условие выполняется, если $\lim x^p f(x) = M \neq 0$ (где $M > 0$ — либо число, либо $M = +\infty$).

Аналогичные признаки устанавливаются для интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$, где $b < +\infty$ и неотрицательная функция $f(x)$ неограничена в окрестности точки b:

если $f(x)\,(b - x)^p < M$ (в окрестности точки b), *где* $0 \leqslant p < 1$, *то* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *сходится.*

В самом деле, $f(x) < \dfrac{M}{(b-x)^p}$ и при $0 < p < 1$ интеграл $\int\limits_a^b \dfrac{dx}{(b-x)^p}$ сходится.

Если $f(x)(b-x)^p > M > 0$ в окрестности точки b и $p \geqslant 1$, *то интеграл* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *расходится.* Доказательство предоставляем читателю в виде упражнения.

Аналогичные признаки имеют место для интегралов, подинтегральная функция которых неограничена в окрестности нижнего предела. Формулировку и доказательства этих признаков предоставляем читателю.

Отметим следующий признак сходимости, применимый и к условно сходящимся интегралам.

Если частные интегралы

$$\int\limits_a^X f(x)\,dx = F(X)$$

ограничены на полусегменте $a \leqslant X < +\infty$, *то при* $p > 0$ *интеграл* $\int\limits_a^{+\infty} \dfrac{f(x)}{x^p}\,dx$ *сходится.*

В самом деле, интегрируем по частям:

$$\int\limits_a^X \frac{f(x)}{x^p}\,dx = \left[\frac{F(x)}{x^p}\right]_a^X + p\int\limits_a^X \frac{F(x)}{x^{p+1}}\,dx;$$

перейдя к пределу, получим:

$$\int\limits_a^{+\infty} \frac{f(x)}{x^p}\,dx = -\frac{F(a)}{a^p} + p\int\limits_a^{+\infty} \frac{F(x)}{x^{p+1}}\,dx.$$

Заметим, что несобственный интеграл в правой части сходится абсолютно; в самом деле, если $|F(x)| < M$, то

$$\int\limits_a^{+\infty} \left|\frac{F(x)}{x^{p+1}}\right| dx < M\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^{p+1}} = \frac{M}{pa^p}.$$

Примеры.

1. Интеграл Пуассона. Так называется интеграл $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$. Этот интеграл сходится, так как при $x > 1$ имеем $e^{-x^2} < e^{-x}$ и $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$ сходится. Рассмотрим три фигуры:

a) круговой сектор радиуса X:

$$x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0, \quad x^2 + y^2 \leqslant X^2; \tag{$\overline{R}_1$}$$

b) квадрат

$$0 \leqslant x \leqslant X, \quad 0 \leqslant y \leqslant X; \tag{$\overline{Q}$}$$

c) круговой сектор радиуса $X\sqrt{2}$;

$$x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0, \quad x^2 + y^2 \leqslant 2X^2. \tag{$\overline{R}_2$}$$

Имеем

$$\overline{R}_1 \subset \overline{Q} \subset \overline{R}_2, \qquad \text{(черт. 290)}$$

а потому:

$$\int\limits_{R_1}\int e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy < \int\limits_{Q}\int e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy < \int\limits_{R_2}\int e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy. \tag{1}$$

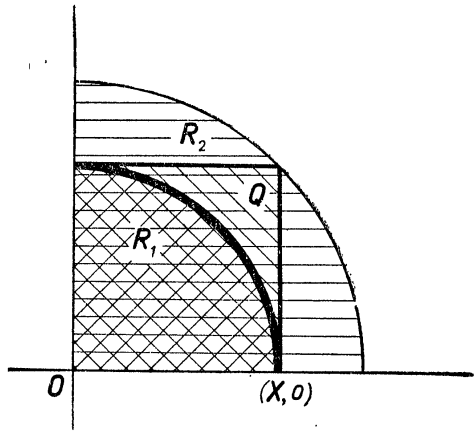
Вычислим крайние интегралы (в полярных координатах):

$$\int\limits_{R_1}\int e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^X e^{-\rho^2}\,\rho\,d\rho =$$

$$= \left[-\frac{\pi}{4}\,e^{-\rho^2}\right]_0^X = \frac{\pi}{4}\,(1 - e^{-X^2}).$$

И аналогично:

$$\int\limits_{R_2}\int e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \frac{\pi}{4}\,(1 - e^{-2X^2}).$$



Черт. 290.

Преобразуем средний интеграл:

$$\int\limits_{Q}\int e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \int\limits_0^X e^{-x^2}\,dx \int\limits_0^X e^{-y^2}\,dy = \left(\int\limits_0^X e^{-x^2}\,dx\right)^2.$$

Из неравенства (1) получим:

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{1 - e^{-X^2}} < \int\limits_0^X e^{-x^2}\,dx < \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{1 - e^{-2X^2}}.$$

Так как

$$\lim_{X \to +\infty} \sqrt{1 - e^{-X^2}} = \lim \sqrt{1 - e^{-2X^2}} = 1,$$

то

$$\lim_{X \to +\infty} \int\limits_0^X e^{-x^2}\,dx = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

2. При $a>0$ интеграл $\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}\sin bx\,dx$ абсолютно сходится, так как $|e^{-ax}\sin bx|\leqslant e^{-ax}$.

Произведя вычисления (том I, § 111), получим:

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}\sin bx\,dx=\left[-\frac{e^{-ax}(a\sin bx+b\cos bx)}{a^2+b^2}\right]_0^{+\infty}=\frac{b}{a^2+b^2}.$$

3. $\int\limits_2^{+\infty}\frac{1+x}{x^3-1}\,dx$ сходится абсолютно, так как

$$\lim_{x\to+\infty} x^2\frac{1+x}{x^3-1}=1 \qquad (p=2>1).$$

4. $\int\limits_0^2\frac{dx}{\ln x}$. Исследуем два интеграла $\int\limits_0^1\frac{dx}{\ln x}$ и $\int\limits_1^2\frac{dx}{\ln x}$, так как

$\ln x=\ln[1+(x-1)]=(x-1)\,E$, где $\lim\limits_{x\to1}E=1$, то $\lim\limits_{x\to1}(x-1)\frac{1}{\ln x}=\lim\frac{1}{E}=1$

($p=1$), следовательно, каждый из рассматриваемых интегралов расходится.

5. $\int\limits_{-1}^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$. Исследуем два интеграла:

$$\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \quad\text{и}\quad \int\limits_{-1}^0\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}};$$

имеем:

$$\lim_{x\to1}(1-x)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}=\lim\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)(1+x)}}=\frac{1}{2}\quad\left(p=\frac{1}{2}<1\right).$$

Следовательно, первый интеграл сходится. Сходимость второго интеграла устанавливается аналогично. Данный интеграл сходится.

6. Исследовать, при каких значениях k сходится интеграл $\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^k}{1+x^2}\,dx$.

Исследуем сходимость интегралов $\int\limits_0^1\frac{x^k}{1+x^2}\,dx$ и $\int\limits_1^{+\infty}\frac{x^k}{1+x^2}\,dx$. Первый интеграл сходится при $k>-1$ (при $k\geqslant0$ интеграл собственный), ибо

$$\lim_{x\to0} x^{-k}\frac{x^k}{1+x^2}=1 \quad (p=-k);$$

второй интеграл сходится при $k < 1$, ибо

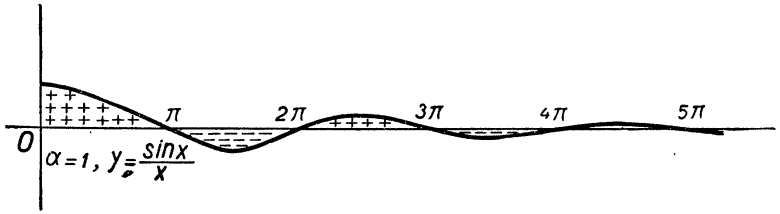
$$\lim_{x \to +\infty} x^{-k+2} \frac{x^k}{1+x^2} = 1 \quad (p = -k+2).$$

Данный интеграл сходится абсолютно, если $|k| < 1$, и расходится при $|k| \geqslant 1$.

7. Исследовать сходимость интеграла $\int_0^1 \ln^k x\, dx$. Исследуем сходимость каждого из интегралов:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \ln^k x\, dx \quad \text{и} \quad \int_{\frac{1}{2}}^1 \ln^k x\, dx.$$

Первый интеграл сходится при всех значениях k. В самом деле, при $k \leqslant 0$ интеграл собственный, а при $k > 0$ имеем $\lim\limits_{x \to 0} x^p \ln^k x = 0$ при любом



Черт. 291.

$0 < p < 1$. Второй интеграл сходится, если $k > -1$ (при $k \geqslant 0$ интеграл собственный), так как $\lim\limits_{x \to 1} (x-1)^{-k} \ln^k x = 1 \quad (p = -k)$.

Следовательно, данный интеграл сходится при $k > -1$.

8. $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\, dx$ при $0 < \alpha \leqslant 1$ сходится, так как функция $\sin x$ имеет ограниченный частный интеграл $F(x) = \int_0^X \sin x\, dx = 1 - \cos X$. Докажем, что исследуемый интеграл сходится условно. Подинтегральная функция положительна в интервалах

$$(0, \pi), (2\pi, 3\pi), \ldots, (2n\pi, (2n+1)\pi), \ldots$$

и отрицательна в интервалах $(\pi, 2\pi)$, $(3\pi, 4\pi)$, $\ldots$, $(2(n-1)\pi, 2n\pi)$, $\ldots$ (черт. 291).

Трансформируем данный сходящийся интеграл в знакопеременный ряд:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\, dx = \int_0^{\pi} + \int_{\pi}^{2\pi} + \ldots + \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} + \ldots.$$

Докажем, что полученный ряд сходится условно. В самом деле, при $0 < \alpha \leqslant 1$ и при $n > 1$ имеем:

$$|u_n| \geqslant \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x^\alpha} dx \geqslant \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{\sin x|}{x} dx.$$

Положив $x = (n-1)\pi + t$, получим:

$$|u_n| \geqslant \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{(n-1)\pi + t} dt \geqslant \frac{1}{n\pi} \int_0^{\pi} \sin t\, dt = \frac{2}{n\pi}.$$

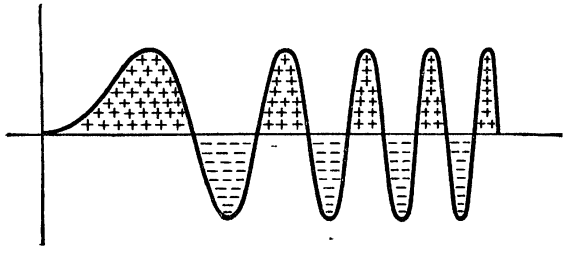
Расходимость ряда $\Sigma |u_n|$ следует из сравнения его с гармоническим рядом.

Если бы интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$ сходился абсолютно, то вместе с интегралом $\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^\alpha} dx$ сходился бы и ряд $\Sigma |u_n|$, что на самом деле не имеет места.

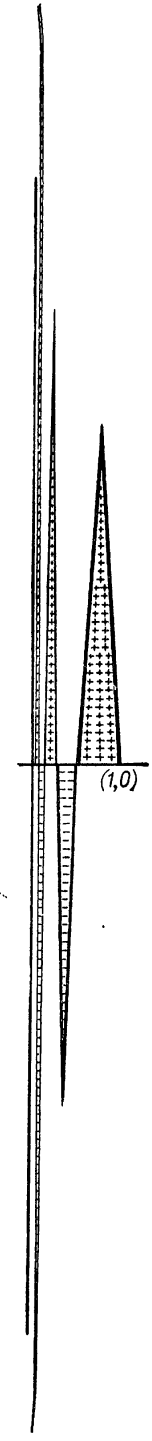
Геометрически частный интеграл $\int_0^X \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$ выражает алгебраическую сумму площадей (на сегменте $[0, X]$), отмеченных на чертеже 291 значками $+$ и $-$. Эта алгебраическая сумма имеет конечный предел. Однако если эти площади взять по абсолютной величине, то предел их суммы будет равен $+\infty$.

9. Положив в сходящемся интеграле $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$, $t = x^2$, получим условно сходящийся интеграл Френеля: $I = 2\int_0^{+\infty} \sin x^2 dx$.

Геометрическая интерпретация сходимости ясна из чертежа 292.



Черт. 292.



Черт. 293.

10. На чертеже 293 представлено следующее разбиение сегмента [0, 1]:

$$\sigma_1=\left[1, \frac{1}{2}\right], \quad \sigma_2=\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right], \ldots, \quad \sigma_n=\left[\frac{1}{2^{n-1}}, \frac{1}{2^n}\right], \ldots,$$

на каждом из сегментов σ_n построен равнобедренный треугольник с высотой, равной $\frac{2^{n+1}}{n}$, и с площадью, равной $\frac{1}{n}$. Треугольники расположены попеременно над и под осью абсцисс. Пусть $f(x)$ есть функция, графически изображающаяся боковыми сторонами построенных треугольников. Интеграл

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}=\ln 2 \quad \text{сходится условно,}$$

$$\text{ибо} \quad \int_0^1 |f(x)|\,dx=\sum \frac{1}{n}=+\infty.$$

§ 113. Несобственные интегралы, содержащие параметр

Мы будем рассматривать простейшие несобственные интегралы $\int_a^B f(x, \alpha)\,dx$ и $\int_A^b f(x, \alpha)\,dx$ при следующих предположениях:

1°. *Подинтегральная функция непрерывна на множестве точек*:

$$a \leqslant x < B, \quad \alpha_0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_1$$

или, соответственно,

$$A < x \leqslant b, \quad \alpha_0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_1.$$

2°. *Интеграл имеет особенность на верхнем (нижнем) пределе.*

Заметим, что при некоторых значениях параметра α интеграл может и не иметь особенностей, при этих значениях α он является собственным.

Для определенности ограничимся подробным рассмотрением интеграла $\int_a^B f(x, \alpha)\,dx$ с особенностью на верхнем пределе. Интегралы с особенностью на нижнем пределе рассматриваются аналогично.

Предположим, что при каждом значении α, принадлежащем некоторому множеству $\mathfrak{M}_\alpha$, интеграл

$$\Phi(\alpha)=\int_a^B f(x, \alpha)\,dx$$

сходится. Этот интеграл есть функция параметра α, определенная на множестве $\mathfrak{M}_\alpha$. Функция $\Phi(\alpha)$ есть предельная функция

$$\Phi(\alpha)=\lim_{X \to B} \int_a^X f(x, \alpha)\,dx.$$

Определение. *Интеграл* $\int_a^B f(x, \alpha)\,dx$ *называется равномерно сходящимся на множестве* $\mathfrak{M}_\alpha$, *если*

$$\int_a^X f(x, \alpha)\,dx \rightrightarrows \Phi(\alpha).$$
$$X \to B$$

Если данный интеграл равномерно сходится на множестве $\mathfrak{M}_\alpha$, то при любом заданном $\varepsilon > 0$ существует такая окрестность U_B точки B, что для остаточного члена

$$R(X, \alpha) = \int_X^B f(x, \alpha)\,dx \text{ неравенство } |R(X, \alpha)| = \left|\int_X^B f(x, \alpha)\,dx\right| < \varepsilon$$

выполняется, если $X \in U_B$ при произвольном значении $\alpha \in \mathfrak{M}_\alpha$.

Интеграл $\int_a^B f(x, \alpha)\,dx$ называется мажорируемым на множестве $\mathfrak{M}_\alpha$, если существует такая неотрицательная функция $\varphi(x)$, что при всех $\alpha \in \mathfrak{M}_\alpha$ выполняется неравенство $|f(x, \alpha)| < \varphi(x)$ и интеграл $\int_a^B \varphi(x)\,dx$ сходится. Интеграл, мажорируемый на множестве $\mathfrak{M}_\alpha$, абсолютно и равномерно сходится на этом множестве, так как при X, содержащемся в некоторой окрестности U_B точки B, имеет место оценка

$$|R(x, \alpha)| \leqslant \int_X^B |f(x, \alpha)|\,dx \leqslant \int_X^B \varphi(x)\,dx < \varepsilon,$$

не зависящая от значения параметра (ср. § 55).

Рассмотрим интеграл $\int_a^B f(x, \alpha)\,dx$, равномерно сходящийся на сегменте $\alpha_0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_1$, где $f(x, \alpha)$ — функция, непрерывная на множестве точек $a \leqslant x < B$, $\alpha_0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_1$.

Теорема. *Если интеграл* $\Phi(\alpha) = \int_a^B f(x, \alpha)\,dx$ *равномерно сходится на сегменте* $\alpha_0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_1$, *то*

1° *функция* $\Phi(\alpha)$ *непрерывна на сегменте* $[\alpha_0, \alpha_1]$;

2° *имеет место формула интегрирования по параметру под знаком интеграла*:

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \Phi(\alpha)\,d\alpha = \int_a^B dx \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} f(x, \alpha)\,d\alpha.$$

Доказательство основывается на общих теоремах о равномерно сходящихся функциях.

1°. Частные интегралы

$$F(X,\ \alpha)=\int_a^X f(x,\ \alpha)\,dx$$

суть непрерывные функции параметра α, поэтому при равномерной сходимости

$$F\underset{X\to B}{(X,\ \alpha)}\rightrightarrows\Phi(\alpha)$$

предельная функция $\Phi(\alpha)$ также непрерывна.

2°. Предельная функция $\Phi(\alpha)$, будучи непрерывной, интегрируема и в силу равномерной сходимости имеет место формула перехода к пределу под знаком интеграла:

$$\lim_{X\to B}\int_{\alpha_0}^{\alpha_1}F(X,\ \alpha)\,d\alpha=\int_{\alpha_0}^{\alpha_1}\lim_{X\to B}F(X,\ \alpha)\,d\alpha. \tag{1}$$

Так как

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha_1}F(X,\ \alpha)\,d\alpha=\int_{\alpha_0}^{\alpha_1}d\alpha\int_a^X f(x,\ \alpha)\,dx=\int_a^X dx\int_{\alpha_0}^{\alpha_1}f(x,\ \alpha)\,d\alpha,$$

то в левой части равенства (1) получим:

$$\lim_{X\to B}\int_a^X dx\int_{\alpha_0}^{\alpha_1}f(x,\ \alpha)\,d\alpha=\int_a^B dx\int_{\alpha_0}^{\alpha_1}f(x,\ \alpha)\,d\alpha,$$

а в правой части:

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha_1}\lim F(X,\ \alpha)\,d\alpha=\int_{\alpha_0}^{\alpha_1}d\alpha\int_a^B f(x,\ \alpha)\,dx,$$

откуда следует справедливость формулы интегрирования под знаком интеграла, ч. т. д.

Примечание. Для интегралов $\int_0^{+\infty}f(x,\ \alpha)\,dx$ при равномерной сходимости подинтегральной функции $\underset{\alpha\to c}{f(x,\ \alpha)}\rightrightarrows F(x)$ не всегда возможен переход к пределу под знаком интеграла. Рассмотрим, например, функцию

$$f_n(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{n} & (\text{если } 0\leqslant x\leqslant n),\\ 0 & (\text{если } x>n).\end{cases}$$

Последовательность $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$, ... равномерно сходится к нулю в интервале $(0, +\infty)$;

$$f_n(x) \rightrightarrows 0; \text{ значит, } F(x) = 0.$$

Имеем: $\lim \int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = 1$, так как $\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = 1$; но интеграл от предельной функции $\int_0^{+\infty} F(x)\,dx$ равен нулю.

Теорема. *Если функция* $f(x, \alpha)$

1° *имеет непрерывную производную* $f'_\alpha(x, \alpha)$ *на множестве*

$$a \leqslant x < B, \quad \alpha_0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_1,$$

2° *интеграл* $\Phi(\alpha) = \int_a^B f(x, \alpha)\,dx$ *сходится,*

3° *интеграл* $\int_a^B f'_\alpha(x, \alpha)\,dx$ *равномерно сходится на сегменте* $\alpha_0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_1$,

то функция $\Phi(\alpha)$ *дифференцируема на сегменте* $\alpha_0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_1$ *и имеет место формула дифференцирования под знаком интеграла* (см. § 111):

$$\Phi'(\alpha) = \int_a^B f'_\alpha(x, \alpha)\,dx.$$

Доказательство. В самом деле, частный интеграл при любом значении X есть дифференцируемая функция параметра

$$\frac{d}{d\alpha}\int_a^X f(x, \alpha)\,dx = \int_a^X f'_\alpha(x, \alpha)\,dx$$

и (условие 3°) имеет место равномерная сходимость:

$$\frac{d}{d\alpha}\int_a^X f(x, \alpha)\,dx \rightrightarrows \int_a^B f'_\alpha(x, \alpha)\,dx.$$

Следовательно, предельная функция $\Phi(\alpha)$ дифференцируема и применима формула перехода к пределу под знаком производной (см. § 22):

$$\Phi'(\alpha) = \frac{d}{d\alpha}\int_a^B f(x, \alpha)\,dx = \frac{d}{d\alpha}\lim_{X \to B}\int_a^X f(x, \alpha)\,dx =$$

$$= \lim \frac{d}{d\alpha}\int_a^X f(x, \alpha)\,dx = \lim \int_a^X f'_\alpha(x, \alpha)\,dx = \int_a^B f'_\alpha(x, \alpha)\,dx, \text{ ч. т. д.}$$

Интеграл, содержащий параметр, может служить средством аналитического представления функции и изучения ее свойств.

Поясним это на примере так называемой гамма-функции, которая определяется следующим образом:

$$\Gamma(x)=\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt \quad (\text{где } x \text{ — параметр}).$$

Установим множество значений x, при которых сходится рассматриваемый интеграл. Для этого исследуем сходимость каждого из следующих интегралов:

$$I_1(x)=\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}\,dt \quad \text{и} \quad I_2(x)=\int_1^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt.$$

При $x \geqslant 1$ первый интеграл является собственным, а при $x<1$ он имеет особенность на нижнем пределе $t=0$. Так как

$$\lim_{t\to 0} t^{1-x}t^{x-1}e^{-t}=1, \text{ то}$$

интеграл сходится при $1-x<1$, т. е. при $x>0$, и расходится при $x \leqslant 0$. Второй интеграл сходится при всех значениях x, так как $\lim\limits_{t\to+\infty} t^p t^{x-1}e^{-t}=0$ при любом $p>1$.

Итак, интеграл, изображающий функцию $\Gamma(x)$, сходится при всех значениях x в интервале $0<x<+\infty$.

Докажем, что $\Gamma(x)$ есть непрерывная функция в любой точке x интервала $0<x<+\infty$. Рассмотрим интеграл $I_1(x)$; пусть δ — любое число, выбранное при условии $0<\delta<x$, докажем, что $I_1(x)$ равномерно сходится на полусегменте $\delta \leqslant x<+\infty$. В самом деле, на этом полусегменте интеграл $I_1(x)$ является мажорируемым, так как при $0<t\leqslant 1$ выполняется неравенство

$$t^{x-1}e^{-t} \leqslant t^{\delta-1} \text{ и интеграл } \int_0^1 t^{\delta-1}\,dt=\frac{1}{\delta} \text{ сходится.}$$

Итак, будучи мажорируемым, $I_1(x)$ сходится равномерно на любом полусегменте $[\delta, +\infty]$, а поэтому $I_1(x)$ есть непрерывная функция на этом полусегменте. Следовательно, $I_1(x)$ есть функция, непрерывная в любой точке $x>0$.

Аналогично устанавливается равномерная сходимость интеграла $I_2(x)$ на любом сегменте $0 \leqslant x \leqslant N$, так как при $t>1$ имеем:

$t^{x-1}e^{-t}<t^{N-1}e^{-t}$ и интеграл $\int\limits_1^{+\infty} t^{N-1}e^{-t}\,dt$ сходится. Следовательно, $I_2(x)$ также есть непрерывная функция в любой точке $x>0$.

Будучи суммой двух непрерывных функций, $\Gamma(x)$ есть функция, непрерывная в интервале $0 < x < +\infty$.

Гамма-функция дифференцируема в интервале $0 < x < +\infty$. В самом деле, выполнив (формально) дифференцирование под знаком интеграла, получим:

$$\Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} \ln t \, e^{-t} \, dt,$$

Выполненное дифференцирование законно: достаточно разбить полученный интеграл на два интеграла от 0 до 1 и от 1 до $+\infty$, а затем доказать равномерную сходимость первого интеграла в любом промежутке $\delta \leqslant x < +\infty$, а второго на любом сегменте $0 \leqslant x \leqslant N$. Для этого достаточно заметить, что $|t^{x-1} \ln t \, e^{-t}| \leqslant t^{\delta-1} |\ln t|$ при $0 < t \leqslant 1$ и $\delta \leqslant x$ и $|t^{x-1} \ln t \, e^{-t}| < t^N e^{-t}$ при $1 < t$ и $0 < x < N$ и что интегралы $\int_0^1 t^{\delta-1} \ln t \, dt$ и $\int_1^{+\infty} t^N e^{-t} \, dt$ сходятся.

Аналогично доказывается, что функция $\Gamma(x)$ в интервале $(0, +\infty)$ бесконечно дифференцируема и

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} \ln^k t e^{-t} \, dt.$$

Пусть $x > 1$; интегрируя по частям, получим:

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \, dt = [-e^{-t} t^{x-1}]_{t=0}^{t=+\infty} + (x-1) \int_0^{+\infty} t^{x-2} e^{-t} \, dt =$$

$$= (x-1) \int_0^{+\infty} t^{x-2} e^{-t} \, dt = (x-1)\Gamma(x-1).$$

Если n — целое число, то, применяя последовательно формулу $\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1)$, получим:

$$\Gamma(n) = (n-1)(n-2) \ldots 2 \cdot 1 \, \Gamma(1) = (n-1)!,$$

так как

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \, dt = 1.$$

Последнее соотношение позволяет обобщить понятие факториала и на нецелые значения x: условимся считать $x! = \Gamma(x+1)$.

Так как

$$\Gamma''(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} \ln^2 t e^{-t} \, dt > 0$$

(подинтегральная функция положительна), то $\Gamma'(x)$ возрастает, а потому график функции $\Gamma(x)$ есть линия, вогнутая вверх.

Из соотношений

$$\Gamma(x)=\frac{\Gamma(x+1)}{x} \text{ и } \lim_{x\to 0}\Gamma(x+1)=\Gamma(1)=1$$

следует, что

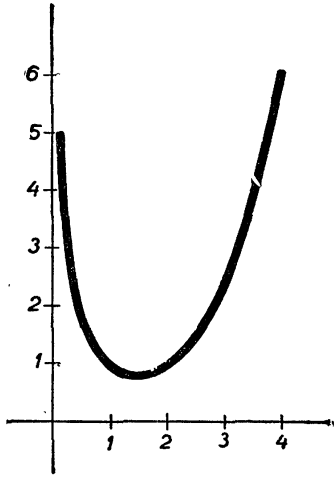
$$\lim_{x\to 0}\Gamma(x)=+\infty.$$

Из равенства

$$\Gamma(2)=\Gamma(1)=1$$

следует, что на сегменте [1, 2] существует (по теореме Ролля) единственная (в силу монотонности производной) точка x, в которой $\Gamma'(x)=0$. В этой точке функция $\Gamma(x)$ имеет минимум. Как показывают более подробные вычисления, $\min\Gamma(x)=\Gamma(1{,}461\ldots)=0{,}885\ldots$

График функции $\Gamma(x)$ в интервале $(0, +\infty)$ представлен на чертеже 294.



Черт. 294.

Формула $\Gamma(x)=\frac{\Gamma(x+1)}{x}$ позволяет продолжить гамма-функцию и на отрицательные (нецелые) значения аргумента. Так, например,

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)=-2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=-2\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt=-4\int_0^{+\infty}e^{-z^2}\,dz=-2\sqrt{\pi}.$$

(Подстановкой $t=z^2$ получим интеграл Пуассона.)

§ 114. Примеры вычисления несобственных интегралов

Теоремы о непрерывности, о дифференцировании и об интегрировании интегралов, содержащих параметры, имеют большое применение при вычислении несобственных интегралов. Следует, однако, иметь в виду, что обычно приходится пользоваться специфическими свойствами вычисляемых интегралов и применять различные частные приемы, так что никаких общих правил указать не представляется возможным. Ниже на примерах показаны различные частные приемы вычисления несобственных интегралов.

Примеры.

1.

$$I(\alpha)=\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x^2}\,dx,$$

где $\alpha > 0$. Этот интеграл приводится к интегралу Пуассона (стр. 528, пример 1), достаточно положить $t = x\sqrt{\alpha}$:

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}.$$

2. Продифференцируем по параметру интеграл (см. предыдущий пример):

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\alpha}};\quad \text{получим:}\quad \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2}x^2\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\alpha\sqrt{\alpha}}.$$

Выполненное дифференцирование законно при любом $\alpha > 0$. В самом деле, пусть η — любое число, взятое при условии $0 < \eta < \alpha$; интеграл $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2}x^2\,dx$ мажорируем (и следовательно, равномерно сходится) на полусегменте $[\eta, +\infty)$, так как $e^{-\alpha x^2}x^2 < e^{-\eta x^2}x^2$, и интеграл $\int_0^{+\infty} e^{-\eta x^2}x^2\,dx$ сходится, так как $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^p e^{-\eta x^2}x^2) = 0$ при произвольном $p > 1$.

После n-кратного последовательного дифференцирования по α получим:

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2}x^{2n}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)}{2^n}\cdot\frac{1}{\alpha^n\sqrt{\alpha}}.$$

3. Вычислить:

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-k^2x^2}\cos\alpha x\,dx.$$

Интеграл $I(\alpha)$ равномерно сходится в интервале $-\infty < \alpha < +\infty$, так как он является мажорируемым:

$$|e^{-k^2x^2}\cos\alpha x| \leqslant e^{-k^2x^2} \quad\text{и}\quad \int_0^{+\infty} e^{-k^2x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2|k|} \text{ сходится.}$$

Дифференцируя по параметру, получим:

$$I'(\alpha) = -\int_0^{+\infty} e^{-k^2x^2}x\sin\alpha x\,dx.$$

Выполненное дифференцирование законно, так как полученный после дифференцирования интеграл является мажорируемым:

$$|e^{-k^2x^2}x\sin\alpha x| \leqslant e^{-k^2x^2}x.$$

Интегрируя по частям, получим:

$$\int_0^{+\infty} e^{-k^2x^2} x \sin \alpha x \, dx = \left[-\frac{e^{-k^2x^2}}{2k^2} \sin \alpha x \right]_0^{+\infty} +$$

$$+ \frac{\alpha}{2k^2} \int_0^{+\infty} e^{-k^2x^2} \cos \alpha x \, dx = \frac{\alpha}{2k^2} \int_0^{+\infty} e^{-k^2x^2} \cos \alpha x \, dx.$$

Следовательно,

$$I'(\alpha) = -\frac{\alpha}{2k^2} I(\alpha) \quad \text{и} \quad \frac{I'(\alpha)}{I(\alpha)} = -\frac{\alpha}{2k^2},$$

откуда

$$\int_0^{\alpha} \frac{I'(\alpha)}{I(\alpha)} d\alpha = -\frac{\alpha^2}{4k^2}, \quad \text{или} \quad \ln I(\alpha) - \ln I(0) = -\frac{\alpha^2}{4k^2},$$

откуда

$$I(\alpha) = I(0) e^{\frac{-\alpha^2}{4k^2}}.$$

Так как

$$I(0) = \int_0^{+\infty} e^{-k^2x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2|k|}, \quad \text{то} \quad I(\alpha) = \frac{\sqrt{\pi}}{2|k|} e^{-\frac{\alpha^2}{4k^2}}.$$

4. Вычислить:

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Рассмотрим интеграл

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Докажем, что $I(\alpha)$ равномерно сходится на полусегменте $0 \leqslant \alpha < +\infty$. Заметим, что функция $e^{-\alpha x} \sin x$ имеет ограниченную примитивную функцию:

$$F(x) = -\frac{e^{-\alpha x}(\alpha \sin x + \cos x)}{\alpha^2 + 1}, \text{ так как}$$

$$|F(x)| < \frac{\alpha + 1}{\alpha^2 + 1} < \frac{2\alpha}{\alpha^2 + 1} + \frac{1}{\alpha^2 + 1} < 2, \quad \text{где } 0 \leqslant \alpha \text{ и } 0 \leqslant x.$$

Для оценки остаточного члена $I(\alpha)$ выполним интегрирование по частям:

$$|R(X, \alpha)| = \left| \int_X^{+\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin x}{x} dx \right| =$$

$$= \left| \left[\frac{F(x)}{x} \right]_X^{+\infty} + \int_X^{+\infty} \frac{F(x)}{x^2} dx \right| < \frac{2}{X} + 2 \int_X^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \frac{4}{X}.$$

Значит, $|R(X, \alpha)| < \varepsilon$, если $X > \frac{4}{\varepsilon}$ при произвольном $0 \leqslant \alpha$. Следовательно, интеграл сходится равномерно, а потому $I(\alpha)$ есть непрерывная функ-

ция на полусегменте $0 \leqslant \alpha < +\infty$. Дифференцируя по параметру, получим:

$$I'(\alpha) = \int_0^{+\infty} -e^{-\alpha x} \sin x \, dx = \left[\frac{e^{-\alpha x}(\alpha \sin x + \cos x)}{\alpha^2 + 1} \right]_0^{+\infty} = -\frac{1}{\alpha^2 + 1}.$$

Дифференцирование законно при любом $\alpha > 0$, так как на произвольном полусегменте $0 < \delta \leqslant \alpha < +\infty$ имеем $|-e^{-\alpha x} \sin x| < e^{-\delta x}$ и, значит, получается мажорируемый интеграл. Следовательно,

$$I(\alpha) = -\operatorname{arc\,tg} \alpha + C.$$

Для вычисления C заметим, что при $\alpha > 0$

$$|I(\alpha)| \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \frac{|\sin x|}{x} \, dx < \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \, dx = \frac{1}{\alpha}.$$

Перейдя к пределу в точке $+\infty$, получим:

$$\lim_{\alpha \to +\infty} I(\alpha) = 0 = -\frac{\pi}{2} + C, \quad \text{откуда} \quad C = \frac{\pi}{2}.$$

Итак,

$$I(\alpha) = -\operatorname{arc\,tg} \alpha + \frac{\pi}{2}.$$

В силу доказанной непрерывности функции $I(\alpha)$ в точке $\alpha = 0$ имеем:

$$\lim_{\alpha \to 0} I(\alpha) = I(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \, dx = -\lim \operatorname{arctg} \alpha + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}. \quad \text{Итак, } I = \frac{\pi}{2}.$$

Примечание. Равномерную сходимость интеграла $I(\alpha)$ можно доказать, воспользовавшись второй теоремой о среднем значении (том I, § 136). Для отрезка интеграла $I(\alpha)$ имеем оценку:

$$\left| \int_{X_1}^{X_2} e^{-\alpha x} \sin x \cdot \frac{1}{x} \, dx \right| = \frac{1}{X_1} \left| \int_{X_1}^{\xi} e^{-\alpha x} \sin x \, dx \right| =$$

$$= \frac{1}{X_1} |F(\xi) - F(X_1)| < \frac{4}{X_1} < \varepsilon, \text{ если } \frac{4}{\varepsilon} < X_1 < X_2 \text{ при произвольном } \alpha \geqslant 0.$$

5. Вычислить интеграл:

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} \, dx.$$

Непосредственной подстановкой найдем $I(0) = 0$. Если $\alpha \neq 0$, то имеем:

$$I(\alpha) = \operatorname{sign} \alpha \int_0^{+\infty} \frac{\sin |\alpha| x}{x} \, dx.$$

Положив $t = |\alpha| x$, получим:

$$I(\alpha) = \operatorname{sign}\alpha \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}\operatorname{sign}\alpha.$$

Итак,

$$I(\alpha) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & (\text{если } \alpha < 0), \\ 0 & (\text{если } \alpha = 0), \\ \frac{\pi}{2} & (\text{если } \alpha > 0). \end{cases}$$

Будучи разрывной функцией, данный интеграл не является равномерно сходящимся ни в каком промежутке, содержащем точку $\alpha = 0$.

6. Интегралы Френеля. Так называются интегралы:

$$\int_0^{+\infty} \sin x^2\, dx \quad \text{и} \quad \int_0^{+\infty} \cos x^2\, dx.$$

Рассмотрим интеграл

$$\frac{1}{\sqrt{z}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-zx^2}\, dx \quad (\text{где } z > 0, \text{ см. пример 2}).$$

Этот интеграл является мажорируемым на любом сегменте $0 < \alpha \leqslant z \leqslant \beta$, так как $|e^{-zx^2}| < e^{-\alpha x^2}$. Умножая на $\sin z$ и интегрируя, получим:

$$\int_\alpha^\beta \frac{\sin x}{\sqrt{z}}\, dz = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} dx \int_\alpha^\beta e^{-zx^2} \sin z\, dz =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \left[-\frac{e^{-zx^2}(x^2 \sin z + \cos z)}{1 + x^4} \right]_{z=\alpha}^{z=\beta} dx =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sin\alpha \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} x^2}{1 + x^4}\, dx + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cos\alpha \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2}}{1 + x^4}\, dx -$$

$$- \frac{2\sin\beta}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\beta x^2} x^2}{1 + x^4}\, dx - \frac{2\cos\beta}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\beta x^2}}{1 + x^4}\, dx.$$

Четыре получившиеся интеграла мажорируемы (каждый) на полусегментах $0 \leqslant \alpha < +\infty$ и $0 \leqslant \beta < +\infty$, так как сходятся интегралы

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1 + x^4}\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \quad \text{и} \quad e^{-\alpha x^2} \leqslant 1, \quad e^{-\beta x^2} \leqslant 1.$$

---

* Эти интегралы можно вычислить непосредственно разложением подинтегральных дробей на элементарные дроби. Предоставляем это сделать читателю. Принять во внимание, что

$$1 + x^4 = (x^2 + x\sqrt{2} + 1)(x^2 - x\sqrt{2} + 1).$$

Следовательно, получившиеся четыре интеграла суть непрерывные функции от содержащихся в них параметров. Переходя к пределу в точке $\alpha = 0$ и принимая во внимание, что в силу равномерной сходимости интегралов в правой части возможен переход к пределу под знаком интеграла, получим:

$$\int_0^{\beta} \frac{\sin z}{\sqrt{z}}\,dz = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\pi}{2\sqrt{2}} - \frac{2\sin\beta}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\beta x^2} x^2}{1+x^2}\,dx - \frac{2\cos\beta}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\beta x^2}}{1+x^4}\,dx.$$

Заметив, что каждый из интегралов в правой части не превосходит интеграла

$$\int_0^{+\infty} e^{-\beta x^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\beta}} \quad \text{и что} \quad \lim_{\beta \to +\infty} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\beta}} = 0,$$

перейдем к пределу по β в точке $+\infty$; получим:

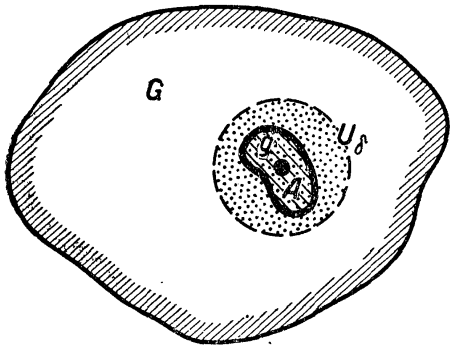
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin z}{\sqrt{z}}\,dz = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}.$$

Положив $z = x^2$, найдем:

$$\int_0^{+\infty} \sin x^2\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}.$$ Аналогично вычисляется $$\int_0^{+\infty} \cos x^2\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}.$$

§ 115. Понятие о несобственных кратных интегралах

Пусть $\overline{G}$ — замкнутая квадрируемая область, а $f(x, y)$ — неотрицательная функция, неограниченная в окрестности точки $A \in G$ и интегрируемая в любой области $G - g$, где g — произвольная квадрируемая область, содержащаяся в G и содержащая точку A (черт. 295).



Черт. 295.

Все рассматриваемые ниже области предполагаются квадрируемыми, о чем не будем делать оговорок.

Область g будем называть δ-областью, если g содержится в δ-окрестности U_δ точки A.

Вычтем из G область g и рассмотрим интеграл

$$I(g) = \iint_{G-g} f(x, y)\,dx\,dy.$$

Всякий такой интеграл будем называть частным интегралом.

Определение. *I (число или символ $+\infty$) называется пределом частных интегралов, если при любой заданной окрестности U_1 точки I существует такое число δ, что $I(g) \in U_1$ для произвольной δ-области g, содержащей точку A.*

Теорема. *Если функция* $f(x, y) \geqslant 0$ *интегрируема в любой области* $G - g$, *то существует конечный или бесконечный предел частных интегралов*: $I = \lim I(g)$.

Доказательство. Пусть $U_\delta \in G$ есть δ-окрестность точки A. Вычтем из $\overline{G}$ окрестность U_δ и рассмотрим функцию

$$I(\delta) = I(U_\delta) = \iint\limits_{G-U_\delta} f(x, y)\,dx\,dy.$$

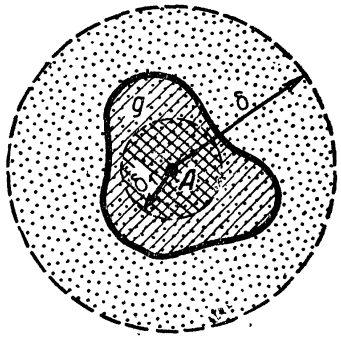
Так как по условию $f(x, y) \geqslant 0$, то $I(\delta)$ есть невозрастающая функция δ, а потому существует конечный или бесконечный (равный $+\infty$) предел $\lim\limits_{\delta \to 0} I(\delta) = I$.

Докажем, что I есть предел частных интегралов:

$$\lim I(g) = I.$$

Пусть g есть произвольная δ-область, выберем числа δ и δ_1 при условиях $U_{\delta_1} \subset g \subset U_\delta$ (черт. 296), тогда имеем:

$$I(\delta) \leqslant I(g) \leqslant I(\delta_1).$$



Черт. 296.

Если $I = +\infty$, то при всех достаточно малых значениях δ будем иметь $I(\delta) > N$, но тогда для любой δ-области g получим и подавно

$$I(g) > N, \quad \text{т. е. } \lim I(g) = +\infty = I.$$

Если $I \neq +\infty$ (I есть число), то

$$I(\delta) \leqslant I(g) \leqslant I(\delta_1) < I.$$

В этом случае при всех достаточно малых значениях δ будем иметь:

$$0 < I - I(\delta) < \varepsilon,$$

а значит, и подавно

$$0 < I - I(g) < \varepsilon, \quad \text{т. е. } \lim I(g) = I, \text{ ч. т. д.}$$

Определение. *Интеграл* $\iint\limits_G f(x, y)\,dx\,dy$ *называется сходящимся, если предел частных интегралов конечен; в этом случае полагаем*:

$$\iint\limits_G f(x, y)\,dx\,dy = I = \lim I(g).$$

Если $I = +\infty$, *то рассматриваемый интеграл называется расходящимся.*

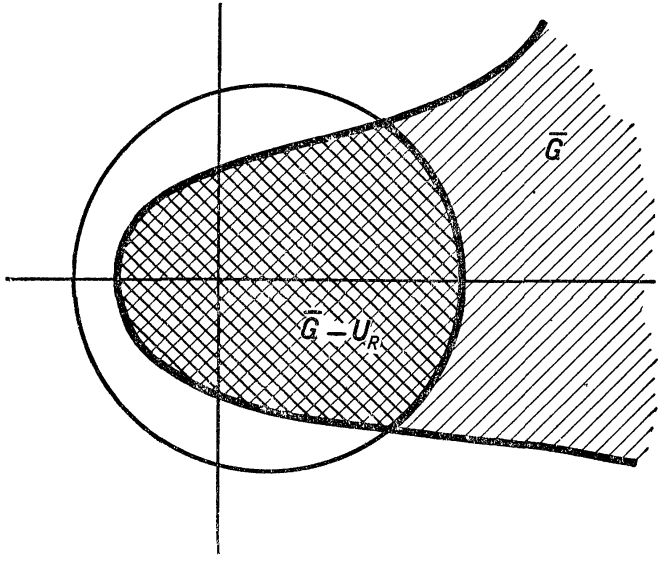
Из доказанного следует, что для нахождения предела частных интегралов в качестве областей g, выключающих особую точку, можно пользоваться какими-либо областями специального вида. Например, можно взять любую последовательность

$$g_1, g_2, \ldots, g_n, \ldots \qquad \{g_n\}$$

областей, где g_n есть δ_n-область и $\lim \delta_n = 0$.

Всякую такую последовательность будем называть последовательностью областей, стягивающихся к точке A. Для произвольной последовательности областей, стягивающихся к точке A, будем иметь: $\lim I(g_n) = I$.

Аналогично определяется несобственный двойной интеграл, распространенный на неограниченную область. Предположим, что любая



Черт. 297.

ограниченная часть границы области G имеет площадь, равную нулю. В этом случае область G будем называть квадрируемой, хотя, быть может, и не имеющей конечной площади*.

Рассмотрим R-окрестность U_R «точки (∞, ∞)» на плоскости. Под этой окрестностью будем подразумевать множество точек, лежащих вне круга радиуса R с центром в начале координат. Исключив из области $\overline{G}$ точки, содержащиеся в R-окрестности точки (∞, ∞), получим ограниченную замкнутую область $\overline{G} - U_R$, которую

* Площадь неограниченной области может быть конечной, например, площадь области $0 < x < +\infty$, $0 < y < e^{-x}$ равна 1, так как $\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = 1$.

область $\bar{G}$ высекает в круге $x^2+y^2\leqslant R^2$ (черт. 297). Пусть область $\bar{g}$ есть замкнутая ограниченная область, составляющая часть $\bar{G}$. Область $\bar{g}$ будем называть R-областью, если $\bar{G}-U_R\subset\bar{g}$. Пусть $f(x, y)\geqslant 0$ есть функция, интегрируемая в любой R-области.

Основные определения и теоремы, относящиеся к интегралам, распространенным на неограниченную область, аналогичны соответствующим предложениям, относящимся к рассмотренному выше типу интегралов от функции, неограниченной в окрестности точки.

1°. *Если $\bar{g}$ есть R-область, то*

$$I(g)=\int\int_g f(x, y)\,dx\,dy$$

называется частным интегралом.

2°. $I=\lim I(g)$ *есть предел частных интегралов, если* $I(g)\in U_I$ *(где U_I — данная окрестность точки I) для произвольной R-области g при всех достаточно больших значениях R.*

При этом $I=\lim\limits_{R\to+\infty} I(G-U_R)$.

3°. *По определению*

$$\int\int_G f(x, y)\,dx\,dy=\lim I(g),$$

если $\lim I(g)$ *конечен.*

4°. *Для нахождения* $\lim I(g)$ *можно пользоваться R-областями специального вида.*

Воспроизведение соответствующих доказательств предоставляем читателю.

Аналогично можно рассматривать интегралы от функций, неограниченных в окрестности некоторой линии. В этом случае частные интегралы получаются посредством исключения из области $\bar{G}$ некоторой области g, содержащей особую линию.

Все сказанное распространяется на интегралы от функций с любым числом аргументов.

Несобственные интегралы от функций, не являющихся знакопостоянными, рассматриваются лишь в случае их абсолютной сходимости, т. е. когда сходится интеграл

$$\int\int_G |f(x, y)|\,dx\,dy.$$

Если последний интеграл сходится, то и для данного интеграла существует предел частных интегралов. В самом деле, рассмотрим

две неотрицательные функции:

$$f_+(x, y)=\frac{1}{2}[|f(x, y)|+f(x, y)]$$

и

$$f_-(x, y)=\frac{1}{2}[|f(x, y)|-f(x, y)].$$

Функция $f_+(x, y)=f(x, y)$ на множестве тех точек, в которых $f(x, y)\geqslant 0$, и $f_+(x, y)=0$ на множестве точек, в которых $f(x, y)\leqslant 0$. Аналогично $f_-(x, y)=-f(x, y)$, если $f(x, y)\leqslant 0$, и $f_-(x, y)=0$, если $f(x, y)\geqslant 0$. Если $\int\int_G |f(x, y)|\,dx\,dy$ сходится, то

$$\int\int_G |f(x, y)|\,dx\,dy=\int\int_G f_+(x, y)\,dx\,dy+\int\int_G f_-(x, y)\,dx\,dy;$$

при этом оба интеграла в правой части сходятся, так как

$$f_+\leqslant|f| \text{ и } f_-\leqslant|f|.$$

Так как $f(x, y)=f_+(x, y)-f_-(x, y)$, то из существования предела частных интегралов для функций f_+ и f_- следует существование этого предела для функций f, при этом

$$\int\int_G f(x, y)\,dx\,dy=\int\int_G f_+(x, y)\,dx\,dy-\int\int_G f_-(x, y)\,dx\,dy.$$

Примечание. Если $\int\int_G |f(x, y)|\,dx\,dy$ расходится, то, как можно доказать, частные интегралы для функции $f(x, y)$ не имеют предела (конечного), поэтому не имеет смысла рассматривать «условную сходимость» кратных интегралов. Это пояснено ниже на примере (см. пример 3).

Примеры.

1. Исследовать сходимость интеграла

$$I=\int\int\int_S \frac{1}{\rho^p}\,dx\,dy\,dz, \quad \text{где } p>0, \text{ а } S \text{ есть шар:}$$

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2\leqslant R^2$$

$$\rho=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}.$$

Вычтем из шара S радиуса R шар s радиуса δ; перейдя к сферическим координатам, получим:

$$I(\delta)=\int\int\int_{S-s}\rho^{-p}\,dx\,dy\,dz=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta\int_\delta^R\rho^{-p+2}\,d\rho=4\pi\int_\delta^R\frac{1}{\rho^{p-2}}\,d\rho.$$

Так как $\int_{\delta}^{R} \frac{d\rho}{\rho^{p-2}}$ сходится при $p-2<1$, то данный интеграл сходится при $p<3$ и $I=\frac{4\pi R^{3-p}}{3-p}$.

2. Пусть $A(a, b, c)$ — данная точка и $X(x, y, z)$ — материальная точка, в которой сосредоточена масса M. Как известно из физики, потенциалом точки X в точке $A(a, b, c)$ называется $\frac{M}{\rho(X, A)}$, где $\rho(X, A)$ — расстояние от точки X до точки A. Пусть V — данное тело, а $\mu(x, y, z)$ — его плотность в точке $(x, y, z) \in V$. Разобьем тело V на произвольные ячейки $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Заменим ячейку v_i материальной точкой $X_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in v_i$ с массой $\mu(X_i) v_i$, т. е. будем мыслить, что вся масса ячейки v_i сосредоточена в одной ее точке. Пусть A — внешняя точка относительно тела V, тогда потенциал в точке A системы точек $X_1, X_2, \ldots, X_n$ выразится суммой $\sum \frac{\mu(X_i) v_i}{\rho(X_i, A)}$; предел этой суммы равен интегралу

$$U=\iiint_V \frac{\mu(x, y, z)\,dx\,dy\,dz}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}=\int_V \frac{\mu}{\rho}\,dV.$$

Этот интеграл рассматривается как потенциал тела V в точке A. Если точка A принадлежит телу V, то в окрестности точки A подинтегральная функция является неограниченной, однако полученный интеграл является сходящимся.

В самом деле, если $\mu(x, y, z)<k$, то подинтегральная функция не превосходит функции $\frac{k}{\rho}$ и $\iiint_v \frac{k}{\rho}\,dx\,dy\,dz$ существует (см. предыдущий пример, $p=1$). Таким образом, потенциал U имеет смысл независимо от положения точки A относительно данного тела.

3. Рассмотрим функцию $\sin(x^2+y^2)$ в первом квадранте $0 \leqslant x$, $0 \leqslant y$. Пусть Q есть квадрат $0 \leqslant x \leqslant N$, $0 \leqslant y \leqslant N$; имеем:

$$I(Q)=\iint_Q \sin(x^2+y^2)\,dx\,dy=\int_0^N \sin x^2\,dx \int_0^N \cos y^2\,dy+\int_0^N \cos x^2\,dx \int_0^N \sin y^2\,dy$$

и

$$\lim_{N\to+\infty} I(Q)=2\left[\int_0^{+\infty} \sin x^2\,dx\right]^2=\frac{\pi}{4}$$

(см. интеграл Френеля, пример 6, стр. 543).

Пусть S есть круговой сектор: $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x^2+y^2 \leqslant R^2$.

Перейдя к полярным координатам, получим:

$$I(S)=\iint_S \sin(x^2+y^2)\,dx\,dy=\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^R \sin\rho^2 \cdot \rho\,d\rho=\frac{\pi}{4}[1-\cos R^2].$$

Следовательно, $\lim I(S)$ не существует.

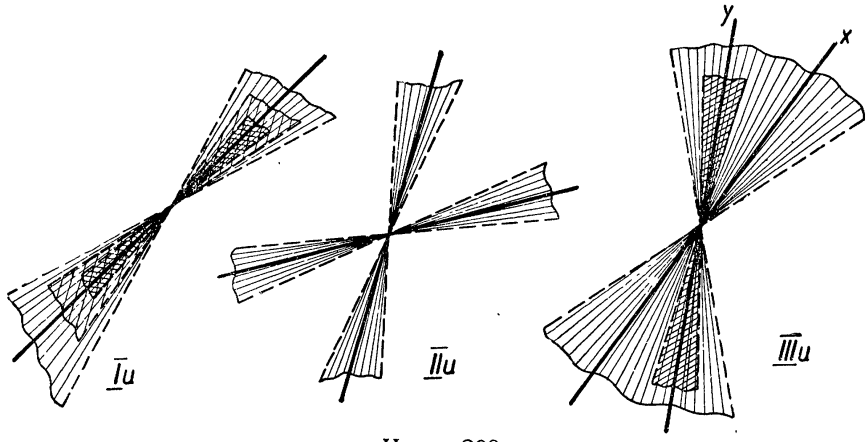
Мы видим, что предел частных интегралов не существует, но при специальном выборе областей (в нашем примере квадраты) этот предел может существовать. При различном выборе областей можно получать различные пределы. Так, например, если брать радиусы секторов равными $\sqrt{2k\pi}=R$, то получим $\lim I(S)=0$.

ДОПОЛНЕНИЕ

§ 116. Понятие топологического пространства

Будем рассматривать функции, для которых значения аргумента и значения функции могут быть элементами произвольных (а не только числовых) множеств.

Для математического анализа существенно установить условия, при которых могут быть распространены понятия предела и непрерывности применительно к произвольным функциям. В построении теории пределов существенную роль играют понятия окрестности значений аргумента и окрестности значений функции. По этой причине особую важность приобретают такие множества, для элементов которых установлено понятие окрестности. Пусть $\mathfrak{M}$ — данное множество, а x — любой его элемент, под окрестностью U_x эле-



Черт. 298.

мента $x \in \mathfrak{M}$ подразумевается некоторая (вообще говоря, непроизвольная часть множества $\mathfrak{M}$, содержащая элемент x.

Если в данном множестве

1° установлена система окрестностей такая, что для каждого элемента $x \in \mathfrak{M}$ существует хотя бы одна окрестность,

2° для окрестностей имеют место основные свойства окрестностей I_U, II_U и III_U (том 1, § 15),

то множество $\mathfrak{M}$ будем называть топологическим пространством *, а его элементы точками этого пространства.

Примеры.

1. Прямая, плоскость и пространство суть топологические пространства. Окрестности (соответственно) суть отрезки, круги и шары (см. том I, § 15).

2. Множество действительных чисел есть топологическое пространство; точки суть числа, а окрестности — числовые интервалы.

3. Арифметическое n-мерное Евклидово пространство есть топологическое пространство (см. §§ 3 и 6).

---

* Система аксиом, характеризующая понятие топологического пространства, может устанавливаться различным образом, в зависимости от большей или меньшей общности, которую желают придать этому понятию. Взяв за основу указанные выше аксиомы окрестностей, мы не преследовали цель ни наибольшей общности, ни наиболее современной формулировки аксиом, характеризующих понятие топологического пространства. Мы руководствовались стремлением придерживаться того круга идеи, с которым читатель знаком из основного текста.

4. Рассмотрим пучок прямых, проходящих через данную точку. Окрестностью данной прямой x пучка назовем множество всех прямых пучка, лежащих внутри любого данного угла, для которого прямая x является биссектрисой. Выполнение аксиом I_U, II_U и III_U пояснено на чертеже 298. В этом примере топологическое пространство есть пучок прямых, а «точки» — прямые пучка.

5. Пусть C — множество всех функций, непрерывных на сегменте $[a, b]$. Согласно определению (стр. 88) ε-окрестность функции $f(x)$ есть множество всех непрерывных функций $\varphi(x)$, удовлетворяющих неравенству

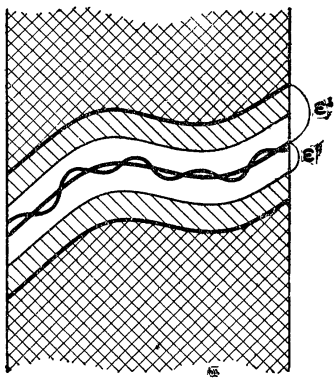
$$|\varphi(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Нетрудно доказать, что C есть топологическое пространство, его «точками» являются функции, непрерывные на сегменте $[a, b]$.

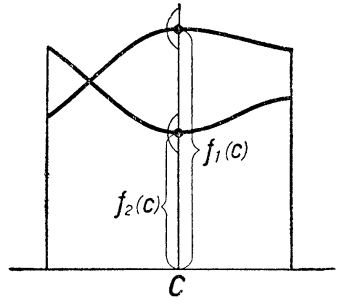
В самом деле, проверим выполнение основных свойств окрестностей.

I_U. Пусть U_1 и U_2 — данные ε'- и ε''-окрестности функции $f(x)$, а U — любая ее ε-окрестность, где ε не больше наименьшего из чисел ε' и ε'', тогда, если $\varphi(x) \in U$, то $|\varphi(x) - f(x)| < \varepsilon$, а потому и подавно $|\varphi - f| < \varepsilon'$ и $|\varphi - f| < \varepsilon''$, т. е. $\varphi \in U_1$ и $\varphi \in U_2$, а значит, $U \subset U_1$ и $U \subset U_2$ (черт. 299).

II_U. Пусть $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — две различные функции, непрерывные на $[a, b]$. Если $f_1(c) \neq f_2(c)$, то возьмем ε-окрестности точек $f_1(c)$ и $f_2(c)$, не имеющие общих точек. Если бы существовала функция $\varphi(x)$, лежащая в ε-окрестностях обеих функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ (черт. 300), то значение $\varphi(c)$ должно содержаться в ε-окрестностях точек $f_1(c)$ и $f_2(c)$, что невозможно. Заметим, что



Черт. 299.



Черт. 300.

линии $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ могут пересекаться, но каждую из них можно заключить в полосы, не содержащие ни одной общей линии, т. е. линии, проходящей в этих полосах на протяжении всего сегмента.

III_U. Предоставляем читателю убедиться в справедливости этого свойства. Геометрическое пояснение дано на чертеже 301.

Определения предельной точки, замкнутого множества, внутренней, внешней и граничной точки относительно данного множества остаются в силе применительно к любому топологическому пространству.

1°. *Предельная точка множества есть точка, содержащая в любой своей окрестности точки множества, отличные от нее самой.*

2°. *Замкнутое множество есть множество, содержащее все свои предельные точки.*

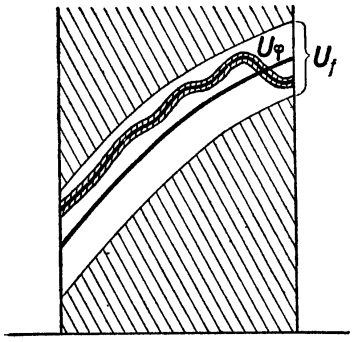
3°. *Внутренняя точка есть точка, содержащаяся в данном множестве вместе с некоторой своей окрестностью; внешняя точка есть точка, для*

которой существует окрестность, не содержащая точек данного множества. Граничная точка есть точка, в любой окрестности которой содержатся точки как принадлежащие, так и не принадлежащие множеству.

Пример.

Для множества прямых с угловыми коэффициентами $k = 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ ось OY является предельной точкой в пучке прямых, проходящих через начало координат.

Будем рассматривать функцию $f(x)$, для которой областью определения является некоторое множество $\mathfrak{M}$ точек топологического пространства X, а значения которой являются точками топологического пространства Y. Примером может служить расстояние точки M плоскости от некоторой фиксированной точки O плоскости. Здесь значения аргумента — точки M плоскости, а значения функции — числа. Пространство X есть плоскость, а пространство Y — множество действительных чисел. В частности, может оказаться, что значения аргумента и функции черпаются из одного и того же пространства (например, в случае числовых функций от числового аргумента). В таком случае можно мыслить это пространство, взятое в двух экземплярах.



Черт. 301.

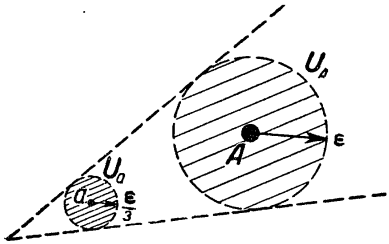
Определения понятий предела и непрерывности функции в данной точке остаются в силе в общем случае.

Именно: *точка A есть предел $f(x)$ в точке a, где a — предельная точка для области определения функции: если при любой заданной окрестности U_A точка A (в пространстве Y) существует окрестность U_a точки a (в пространстве X) такая, что образ любого значения аргумента, лежащего в U_a, $x \in U_a$ и $x \neq a$, лежит в окрестности U_A,*

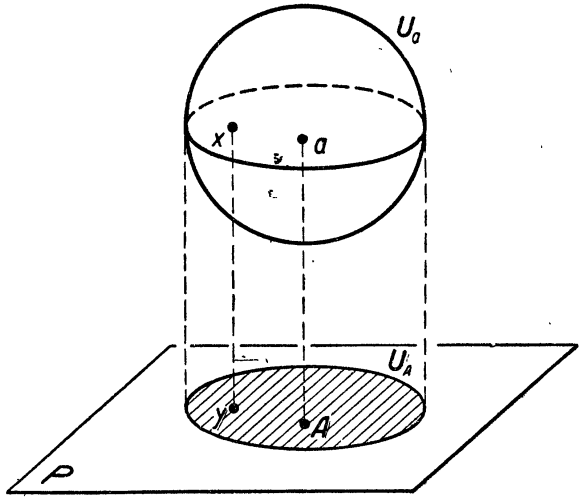
$$f(x) \in U_A, \text{ если } x \in U_a \text{ и } x \neq a.$$

Функция $f(x)$ непрерывна в точке a, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Общие теоремы о пределах (том I, § 22) остаются в силе.



Черт. 302.



Черт. 303.

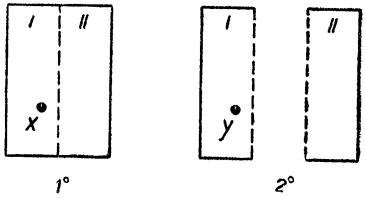
Эти теоремы в специальных доказательствах не нуждаются. В самом деле, доказательства основываются на общих свойствах окрестностей, но поскольку

ку остаются в силе эти свойства, постольку остаются и все вытекающие из них следствия.

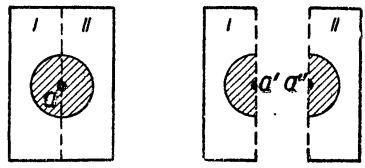
Примеры.

1. Рассмотрим преобразование гомотетии на плоскости с центром в точке O и с коэффициентом подобия $k=3$ (черт. 302). Пусть x — любая точка плоскости, а $y=f(x)$ — ее образ. Покажем, что это отображение непрерывно в любой точке a. Пусть $A=f(a)$ — образ точки a и U_A — заданная ε-окрестность точки A. Образ точки x лежит в U_A, если точка x лежит в окрестности U_a (точки a) радиуса, меньшего, чем $\frac{\varepsilon}{3}$. Следовательно, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A=f(a)$.

2. Пусть $y=f(x)$ есть ортогональная проекция точки x в пространстве на данную плоскость P (черт. 303). Пусть $A=f(a)$ и U_A — любая заданная окрестность точки A на плоскости P. Если точка x лежит внутри шара U_a



Черт. 304.



Черт. 305.

с центром в точке a и с радиусом, равным радиусу U_A, то точка y лежит в U_A:

$$y\in U_A, \text{ если } x\in U_A.$$

Следовательно, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$, т. е. ортогональное проектирование есть отображение, непрерывное в любой точке.

3. Рассмотрим пространство C всех функций $f(x)$, непрерывных на сегменте $[a, b]$. Интеграл

$$I(f)=\int_a^b f(x)\,dx$$

есть функция, непрерывная в любой «точке» пространства C. В самом деле, неравенство

$$|I(\varphi)-I(f)|=\left|\int_a^b [\varphi-f]\,dx\right|<\varepsilon \text{ выполняется, если } |\varphi(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{b-a},$$

т. е. если «точка» $\varphi(x)$ пространства C содержится в δ-окрестности U_f «точки» $f(x)$, где $\delta=\frac{\varepsilon}{b-a}$.

Свойством непрерывности интеграла в пространстве C мы фактически пользовались в теореме о предельном переходе под знаком интеграла.

4. Рассмотрим прямоугольный лист, разрезанный «посередине», как показано на чертеже 304, 1°. Строго говоря, рассматривается множество точек прямоугольника с исключенной линией, соединяющей середины вертикальных сторон. Расставим левую и правую части I и II, как показано на чертеже 304, 2°. Каждой точке x на фигуре 1° соответствует точка $y=f(x)$

на фигуре 2°. Точка a на линии разреза есть предельная для области определения отображения. Нетрудно видеть, что $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ не существует. В самом деле (обозначения ясны из чертежа 305), $\lim\limits_{x \to a} f(x) = a'$ (на левой части листа) и $\lim\limits_{x \to a} f(x) = a''$ (на правой части листа). Значит, $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ не существует. Мы имеем пример р а з р ы в н о г о отображения.

Если для отображения $y = f(x)$ существует обратное отображение $x = \bar{f}(y)$, то образы и прообразы можно объединить в пары взаимно соответственных элементов. Соответствие, устанавливаемое взаимно обратными функциями, называется в з а и м н о о д н о з н а ч н ы м соответствием.

Определение. *Если обе взаимно обратные функции $y = f(x)$ и $x = \bar{f}(y)$ непрерывны (в соответственных областях их определения), то взаимно однозначное соответствие называется гомеоморфным (топологическим) отображением, или гомеоморфизмом.*

Два множества $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ называются гомеоморфными, если их элементы могут быть поставлены во взаимно однозначное соответствие посредством гомеоморфизма.

Грубое представление о гомеоморфизме дает следующая модель. Представим себе фигуру, сделанную из эластичного материала. Будем подвергать фигуру каким угодно деформациям (сжатие, растяжение, изгибы и т. п.), не допуская, однако, ни образования складок (взаимная однозначность), ни разрывов. При всевозможных таких деформациях будут получаться гомеоморфные фигуры.

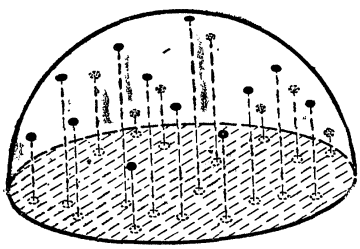
Свойства фигуры называются т о п о л о г и ч е с к и м и, если они сохраняются при любых топологических преобразованиях фигуры.

Примеры.

1. Простую дугу в пространстве E_n можно определить как гомеоморфный образ сегмента.

2. Простую замкнутую линию на плоскости можно определить как гомеоморфный образ окружности. Так, например, квадрат, треугольник, эллипс гомеоморфны окружности.

3. Круг и поверхность полусферы являются гомеоморфными фигурами. Топологическое отображение можно реализовать посредством проектирования, как показано на чертеже 306.



Черт. 306.

4. Проектирование пространственного тела на плоскость есть непрерывное, но не гомеоморфное отображение, так как нарушается взаимная однозначность соответствия: точки тела, лежащие на одном перпендикуляре к плоскости проекции, отображаются в одну точку.

Важным частным видом функций являются числовые функции, значениями которых служат действительные числа. Примерами могут служить площадь многоугольника (функция фигуры), длина окружности (функция окружности), объем тела, периметр многоугольника, определенный интеграл и т. д. Для числовых функций, областью определения которых служит множество точек топологического пространства, остаются в силе определения ограниченности и арифметических действий и теоремы о конечных и бесконечных пределах.

Важно выяснить условия, при которых остаются в силе теоремы о свойствах функций, непрерывных на сегменте. Остановимся на теореме об ограниченности и теореме о наибольшем и наименьшем значениях. Доказательства

этих теорем основываются на принципе предельных точек и на свойстве замкнутости сегмента.

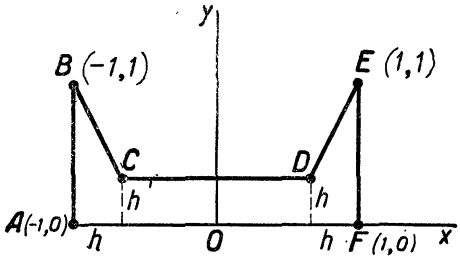
Определение. *Множество* $\mathfrak{M}$ *точек топологического пространства называется компактным (в себе), если любая бесконечная часть множества* $\mathfrak{M}$ *имеет хотя бы одну предельную точку, принадлежащую* $\mathfrak{M}$.

Примером компактного числового множества может служить всякое ограниченное замкнутое бесконечное множесто (в частности сегмент). В самом деле, всякое бесконечное множество чисел, входящее в состав данного множества, ограничено и потому имеет хотя бы одну предельную точку ξ. Будучи замкнутым, множество $\mathfrak{M}$ содержит все свои предельные точки, и в частности точку ξ.

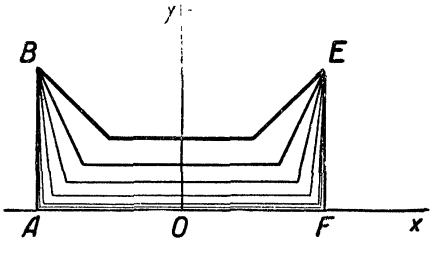
Теорема об ограниченности и теорема о наибольшем и наименьшем значениях остаются в силе для любой числовой функции, непрерывной на компактном множестве точек топологического пространства. Доказательства этих теорем, данные в § 39, т. I, остаются в силе.

Пример.

Пространство функций, непрерывных на сегменте $[a, b]$, не является компактным. Рассмотрим, например, множество $\mathfrak{M}$ точек (т. е. функций) этого



Черт. 307.



Черт. 308.

пространства, изображающихся графически посредством всевоможных ломаных $X = (BCDE)$ (как показано на чертеже 307). Для последовательности ломаных, изображенных на чертеже 308 $\left(h = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right)$, не существует предельной точки. Ломаную $BAFE$ нельзя рассматривать как предельный элемент, так как она не является графиком непрерывной функции. Определим функцию $f(x)$ на множестве $\mathfrak{M}$ как площадь многоугольника $ABCDEF$. Функция $f(x)$ на множестве $\mathfrak{M}$ не имеет наименьшего значения, так как нижняя грань ее значений равна нулю, однако ни для одного из рассматриваемых многоугольников площадь нулю не равна.

§ 117. Понятие метрического пространства

Определение. *Множество* $\mathfrak{M}$ *называется метрическим пространством, если любой паре его элементов* $x \in \mathfrak{M}$ *и* $y \in \mathfrak{M}$ *поставлено в соответствие неотрицательное число* $\rho(x, y)$, *обладающее следующими основными свойствами:*

I_ρ (аксиома тождества) $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда точки x и y совпадают;

II_ρ (аксиома симметрии) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;

III_ρ (аксиома треугольника) $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y)$, каковы бы ни были элементы x, y и z множества $\mathfrak{M}$.

Элементы метрического пространства называются точками, а значение числовой функции $\rho(x, y)$ — расстоянием между точками x и y.

Пусть a — данная точка метрического пространства $\mathfrak{M}$.

Определение. *Сферой радиуса r с центром в точке a называется множество всех точек $x \in \mathfrak{M}$, расстояние которых до точки a меньше r:*

$$\rho(x, y) < r.$$

r-окрестностью точки a метрического пространства называется сфера радиуса r с центром в точке a.

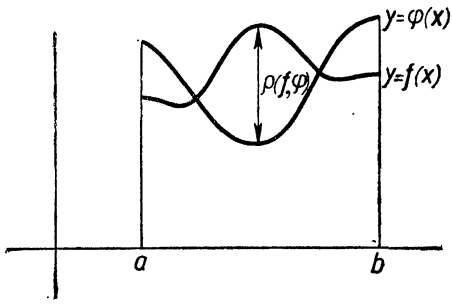
Окрестности точек метрического пространства обладают основными свойствами окрестностей I_U, II_U и III_U. Доказательство, проведенное в § 6 применительно к сферическим окрестностям в евклидовом пространстве, остается в силе и в общем случае.

Таким образом, метрическое пространство с определенными в нем сферическими окрестностями является топологическим пространством.

Примеры.

1. Множество действительных чисел есть метрическое пространство. При этом, как обычно, расстоянием между двумя числами x и y считается

$$\rho(x, y) = |x - y|.$$



Черт. 309.

Выполнение свойств I_ρ и II_ρ очевидно, выполнение аксиомы треугольника следует из свойств абсолютной величины

$$|x - y| = |(x - z) + (z - y)| \leqslant |x - z| + |z - y|.$$

2. Евклидово пространство E_n есть метрическое пространство. Выполнение свойств I_ρ, II_ρ и III_ρ для евклидовой метрики показано в § 3.

3. Пусть $\mathfrak{M}$ есть множество упорядоченных пар чисел $X(x, y)$, в котором расстояние между двумя точками $X_1(x_1, y_1)$ и $X_2(x_2, y_2)$ определяется следующим образом: $\rho(X_1, X_2)$ есть наибольшее из чисел

$$|x_1 - x_2| \text{ и } |y_1 - y_2|. \qquad (1)$$

Выполнение свойств I_ρ и II_ρ очевидно, проверим выполнение аксиомы треугольника. Допустим для определенности, что из двух чисел (1) наибольшим является первое, тогда имеем:

$$\rho(X_1, X_2) = |x_1 - x_2| \leqslant |x_1 - x_3| + |x_3 - x_2| \leqslant \rho(X_1, X_3) + \rho(X_2, X_3)$$

при произвольной точке $X_3(x_3, y_3)$. Будем изображать точки данного пространства обычным способом при помощи точек координатной плоскости. В этом пространстве сферой радиуса r с центром в точке $A(a, b)$ является внутренность квадрата с центром в данной точке со сторонами, параллельными осям координат. Окрестности в рассматриваемой метрике суть квадраты.

4. Пусть C — множество функций, непрерывных на сегменте $[a, b]$. Назовем расстоянием между двумя функциями $f(x)$ и $\varphi(x)$ максимум абсолютной величины разности (черт. 309):

$$\rho(f, \varphi) = \max |f(x) - \varphi(x)|$$

на сегменте $[a, b]$. Геометрически $\rho(f, \varphi)$ означает наибольшую длину отрезка, отсекаемого линиями $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$ на всевозможных параллелях оси ординат. Справедливость аксиом I_ρ, II_ρ и III_ρ предлагаем проверить чита-

телю. Рассматриваемое пространство непрерывных функций есть метрическое пространство. Сфера радиуса r с центром в данной точке $f(x)$ есть множество всех функций, содержащихся в r-полосе, окружающей данную функцию $y = f(x)$.

5. Пусть $\mathfrak{M}$ — множество всех функций, непрерывных на данном сегменте $[a, b]$; назовем расстоянием между функциями $f(x)$ и $\varphi(x)$ — среднее квадратичное отклонение

$$\rho(f, \varphi) = \int_a^b [f - \varphi]^2 \, dx.$$

В § 67 доказано, что так определенное расстояние удовлетворяет условиям I_ρ, II_ρ и III_ρ. Следовательно, $\mathfrak{M}$ есть метрическое пространство.

Пусть $\mathfrak{M}$ — данное множество; если каждой паре элементов может быть поставлено число $\rho(x, y) \geqslant 0$, удовлетворяющее аксиомам расстояния, то множество $\mathfrak{M}$ называется м е т р и з у е м ы м.

Введение в рассмотрение расстояния $\rho(x, y)$ называется м е т р и з а ц и е й данного множества. Одно и то же множество (метризуемое) может быть метризовано различными способами (так, например, можно функцию $\rho(x, y)$ заменить на $k\rho(x, y)$, где $k > 0$). Одно и то же множество, метризованное двумя различными способами, рассматривается как два различные метрические пространства.

В примере 3 указан способ метризации плоскости, отличный от евклидовой метрики. В примерах 4 и 5 указаны два различные способа метризации множества функций, непрерывных на данном сегменте.

Если $y = f(x)$ есть функция, значениями которой являются точки метрического пространства, то существование предела $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ (где A — точка данного пространства) характеризуется выполнением неравенства

$$\rho(f(x), A) < \varepsilon$$

в некоторой окрестности U_a точки a, определяемой заданием числа ε.

В качестве примера рассмотрим последовательность функций, непрерывных в данном сегменте:

$$f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots. \qquad \{f_n\}$$

Здесь значения аргумента суть натуральные числа, а «значения функции» — члены данной последовательности, т. е. непрерывные функции.

При способе метризации, указанном в примере 4,

$$\rho(f, \varphi) = \max |f - \varphi|,$$

сходимость последовательности $\{f_n\}$ означает следующее: существует функция $f(x)$, такая, что неравенство

$$\max |f_n - f| < \varepsilon \qquad (1)$$

выполняется при $n > N$ (где число N определяется заданием ε). Иными словами, в рассматриваемом функциональном пространстве сходимость означает р а в н о м е р н у ю сходимость данной последовательности. При способе метризации, указанном в примере 5, неравенство (1) заменится неравенством

$$\rho(f_n, f) = \int_a^b (f_n - f)^2 \, dx < \varepsilon.$$

Иными словами, в данном случае сходимость последовательности $\{f_n\}$ следует понимать как сходимость в среднем.

Понятия топологического пространства, окрестности, метрического пространства, как обладающие большой степенью общности, получили в науке широкое применение. Возможность вкладывать в эти понятия различное содержание открыла пути плодотворного применения топологических методов в различных математических дисциплинах.

В развитии современной топологии исключительно важное значение принадлежит русской топологической школе, возглавляемой ныне акад. П. С. Александровым. Открытия первостепенной значимости, принадлежащие П. С. Александрову, А. Н. Тихонову, Л. С. Понтрягину и другим русским ученым, легли в основу многочисленных исследований, ведущихся в настоящие дни в самых разнообразных разделах математики.

АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

(*Цифры обозначают страницы*)

Абеля теорема 285
Бесселя неравенство 330
Гамма-функция 537
Гармоника 362
Гомеоморфизм 554
Графическое дифференцирование 386
Графическое интегрирование 381
Грина формула 481
Даламбера признак 245
Дивергенция 511
Дирихле признак 256
Дифференциал функции 110
Дифференциал отображения 430
Дифференцирование интеграла по параметру 514
Евклидово пространство 11
Жордана теорема 25
Замкнутая система 333
Интеграл кратный 403
Интеграл криволинейный 469
Интеграл мажорируемый 534
Интеграл повторный 411
Интеграл по поверхности 503
Интеграл равномерно сходящийся 534
Интегральный признак сходимости 148
Интегральная сумма 401
Интегрирование подстановкой 441
Интервал сходимости 285
Интерполирование 368
Интерполяционный полином 367
Касательная плоскость 116
Квадрильяж 388
Квадрируемая фигура 391
Консервативное поле 497
Коши — Адамара теорема 287
Коши критерий равномерной сходимости 95
Коши критерий сходимости ряда 234
Коши признак сходимости 244
Криволинейные координаты 204
Кубируемая фигура 399
Лагранжа интерполяционная формула 369
Лагранжа множители 216
Лагранжа теорема 107
Лейбница признак 254
Линия уровня 36
Метризация 557
Метрическое пространство 555
Многомерная поверхность 212
Множество замкнутое 22
Множество неограниченное 16
Множество ограниченное 16
Множество открытое 22
Независимые функции 193
Неравенство треугольника 12
Норма функции 326
Ньютона интерполяционная формула 375
Область 25
Область односвязная 26
Ориентированная линия 468
Ориентированная поверхность 500
Ориентируемая поверхность 503
Ортогональная система 326
Ортонормальная система 326
Остаточный член интеграла 553
Остаточный член интерполяции 377
Остаточный член ряда 230
Остроградского формула 508
Отображение взаимно однозначное 155
Отображение непрерывное 155
Отображение обратное 155
Отображение регулярное 156
Парсеваля равенство 433
Пластинчатая поверхность 454
Площадь поверхности (кривой) 454
Площадь фигуры 392
Поверхность уровня 36
Повторные пределы 76
Правильное разбиение 396
Предельных точек принцип 33
Предел функции 48
Предельная функция 70
Простой кусок 63
Производная по аргументу 104
Производная по направлению 124

Произведение отображений 189
Раабе признак 247
Равномерная сходимость функции 80
Равномерная сходимость последовательности 81
Радиус сходимости 285
Разности функции 370
Ряд абсолютно сходящийся 382
Ряд знакопостоянный 238
Ряд знакопеременный 254
Ряд мажорируемый 274
Ряд равномерно сходящийся 274
Ряд степенной 284
Ряд сходящийся 230
Ряд расходящийся 230
Ряд Тейлора 296
Ряд условно сходящийся 252
Ряд Фурье 328
Ряд (числовой) 228
Стационарная точка 141
Стокса формула 509
Стягивающихся кубов принцип 31
Сумма ряда 230
Сферические координаты 208
Сходящаяся в среднем последовательность 331
Тейлора формула 136
Теоремы о непрерывных функциях 58
Топологическое пространство 550
Тригонометрическая система 335
Условный экстремум 213
Факториальный полином 372
Функция аналитическая 308
Функция дифференцируемая 110
Функция интегрируемая 403
Функция n аргументов 35
Функция непрерывная 53
Функция неявная 163
Функция потенциальная 497
Функция постоянная по аргументу 37
Функция точки 35
Фурье коэффициент 328
Цилиндрические координаты 208
Частные производные 104
Частные производные высших порядков 127
Частные суммы ряда 228
Член ряда 228
Эйлера теорема 126
Эйлера принцип взаимности 220
Экстремум 139
Экстраполяция 371
Якобиан 156
Якоби матрица 194